

数字间的邂逅

柳形上

哪里有事，哪里就有美。

——普罗克勒斯 (Proclus) 如是说

在我们的孩提时代，就和数字相识……数的世界，看似如此的简单平常，让我们不以为然。然而经由发现的眼睛，这里的世界却是奇妙的。上学期某一次的数学文化课堂，我们曾通过两个数字：153 与 666 来分享这样的理念——数的世界有大美在焉！

I 开篇之曲

回眸处，在远古时代人们的眼里，数或具有童真的色彩。毕达哥拉斯学派相信神用“数”创造了宇宙万物。数是万物之母，整个世界——物质的、形而上学的一切，都是建立在 1, 2, 3, ……这些数的离散模式之上的；1, 2, 3, ……是上帝创造世界的砖块。

这是一个卓越的理念，简单而美妙。数具有魔术般的性质：音乐的和声是数的简单比例，天空中的一切都是数的各种音乐和不同的数之间的和弦。

在古希腊人眼里，每一个数可以有其独特的属性。比如数字 1 是数之源，代表理性；2 表示变化多端的见解，它是第一个阴性数；3 代表着和谐，它也是第一个阳性数；4 表示公正，因为它是第一个平方数；5 表示婚姻，因为它是第一个阴性数与第一个阳性数之和： $2 + 3 = 5$ ；6 代表完美，因为它是上帝创造世界的天数。

II 奇妙的圣经数

153 是一个奇妙的数，它也被称作“圣经数”。之所以得此大名，或因为它有出现在《圣经》里。在《圣经·新约》约翰福音第 21 章里记载了这样一个故事——



提比哩亚海

话说耶稣死而复活之后，在提比哩亚的海边向 7 个门徒显现，当时耶稣的门徒打了一整夜的鱼，什么也没有打着。天将要亮的时候，耶稣站在岸上，但是门徒却不知道是耶稣。

耶稣对门徒说：“你们把网撒在船的右边，就必得着。”

他们便撒下网去，竟拉不上来，因为鱼甚多。当他们把网拉到岸上之后，发现网满了大鱼，共 153 条。

153，或许你曾许多次和它不经意间相逢。只是你并不知晓，其实它具有许多奇妙的数学性质。

(i) “圣经数” 153 是一个三角形数——153 恰是前 17 个自然数的和：

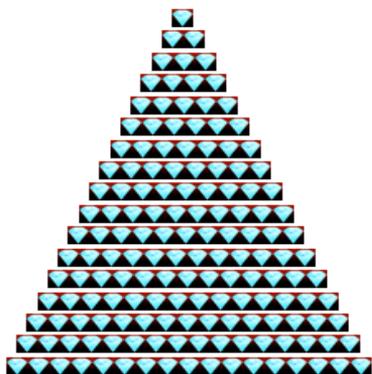
$$153 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 17$$

(ii) 153 恰是前 5 个自然数的阶乘之和：

$$153 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5!$$

(iii) 153 还有一个奇妙的特性：

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$



有着这一特性的数被称作水仙花数。水仙花是我国的十大名花之一，在 1300 多年前的唐代即有栽培，深得人们喜爱，因而有许多的别名——凌波仙子、金盏银台、洛神香妃、玉玲珑……

让我们阅读如下的数学画片——

任给一自然数 m ，我们记 $P(m) =$ 数 m 的所有数位中数字的 3 次方之和。

进而我们有如下的有趣发现——

水仙花数的黑洞：任给一个被 3 整除的自然数，对其作有限次的 P 映射迭代必可回归到圣经数 153。其例证如下：
 $P^5(201) = 153$; $P^6(36) = 153$; $P^3(333) = 153$ 。

画外音：在所有三位数中，有着水仙花数特性的数还有 370, 371, 407：

$$\begin{aligned} 407 &= 4^3 + 0^3 + 7^3 \\ 370 &= 3^3 + 7^3 + 0^3 \\ 371 &= 3^3 + 7^3 + 1^3 \end{aligned}$$

在众多数学人的眼里，水仙花数是指一个 n 位数 ($n \geq 3$)，它的每个数位上的数字的 n 次幂之和等于它本身。借助于相关的理论分析，我们可知道，满足这一属性的数是稀有而珍贵的——只有有限多个，而最大的水仙花数不超过 34 位。在计算机的辅助下，我们可写出所有水仙花数。下面的表格列出了 3-8 位间的水仙花数。

n	n 位水仙花数
3	153, 370, 371, 407
4	1634, 8202, 9474
5	54748, 92727, 93084
6	548834
7	1741725, 4210818, 9800817, 9926315
8	24678050, 24678051, 88593477

在西方，水仙花数又有着“自恋数”的名号，此缘自一个希腊的神话故事——纳西索斯 (Narcissus) 的哀伤。这是一个特别的故事，无关众神之间的明争暗斗，无关人间王国的王朝更替，而只是一个讲述爱上自己倒影的离奇故事：

美少年纳西索斯是河神刻菲索斯 (Cephisus) 与林间仙女莱里奥普 (Liriope) 的儿子。他的出生伴随着一个来自先知忒瑞西阿斯 (Tiresias) 的奇特预言。预言说，纳西索斯绝不可见到自己的倒影，否则他将死去。带着这样的一个预言，纳西索斯渐渐长大，成为全希腊最俊美的男子。无数的少女对他一见倾心，可他却无情地拒绝了所有的人。

伊可 (Echo) 是一个美丽的山中仙女，也是被拒绝者中的一个。伊可十分伤心，日日在幽静的山林中流泪徘徊，很快地消瘦下去，直至她的身体完全消失，只剩下忧郁而轻柔的声音在山谷中回荡。此后希腊人用伊可的名字 (Echo) 来表示“回声”。

纳西索斯的行为惹怒了阿尔忒弥斯 (Artemis)，她决定让纳西索斯去承受痛苦：爱上别人，却不能以被爱作为回报。于是有一天纳西索斯无意间看到自己在水中的倒影——一个比他以前见过的任何人都更加俊秀的少年。他疯狂地爱上了他，无数次将手伸入水中，想要拥抱水中的他，最后溺水而死。他的身体化作一朵晶莹剔透、出水而立的水仙花 (narcissus)。顺便说一句，narcissism (自恋) 这个词即源于 narcissus。

III 魔鬼数 666

经由数学的眼睛，666 也是一个奇妙的数。这个数被称为魔鬼数。其亦有着圣经故事的背景——

666 这个数字在圣经中有记载，在启示录 13: 18 中如此写道：

" This calls for wisdom. If anyone has insight, let him calculate the number of the beast, for it is man's number. His number is 666 . " (“在这里有智慧：凡有聪明的，可以计算兽的数目；因为这是人的数字，他的数目是 666。”)

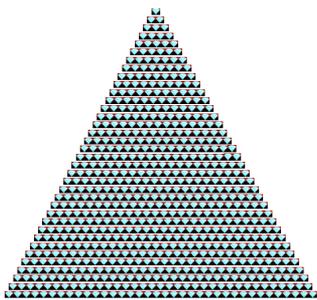
缘何 666 被认为是邪恶的，不祥的数字呢？有一种说法是，因为 7 有着神圣、祝福、圆满、完全的意思，而 666 则是七缺一后重复三次，表示极不完全的意思。

不管 666 是否真的会带来不幸，西方人很忌讳这一魔鬼的代号或是一种文化的认同。下面流传的这个故事或多或少说明这一点：

话说美国前总统里根在卸任前打算移居洛杉矶 - 贝莱尔市的克劳德大街, 当他得知自己未来的别墅牌号是 666 时, 大惊失色; 急忙动用总统权力让莱尔市政府将寓所号码改动……

然而, 这个在圣经中视为人间至恶的符号的魔鬼数, 却有着许多奇妙的数学性质——有如圣经数 153, 666 也是一个三角形数:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 36 = 666$$



666 具有如下的一些奇妙的性质:

(ii) $666 = 1^6 - 2^6 + 3^6$ —— 666 是最小的 3 枚自然数的一奇妙组合;

(iii) $666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$ —— 666 恰是前 7 个素数的平方和, $666 = 313 + 353$ —— 666 是 2 个相邻的回文素数的和;

(iv) $\varphi(666) = 6 \times 6 \times 6$ —— 这里 φ 是 Euler 函数, 这个等式表明, 在 1 至 666 中与数 666 互素的个数是 216;

(v) 666 方程:

$$(6 + 6 + 6) + (6 + 6 + 6)^2 + (6 + 6 + 6)^3 = 666,$$

$$(6 + 6 + 6) + (6^3 + 6^3 + 6^3) = 666,$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 = 666;$$

(vi) 魔鬼数 666 的奇妙还在于——

黄金比 $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的前 146 位数字之和 = 666:

0. 618033988749894848204586834365638117720

3091798057628621354486227052604628189024

49707207204189391137484754088075386891752

12663386222353693179318006……

圆周率 π 的小数点后的前 144 位数字之和 = 666:

3. 141592653589793238462643383279502884197169399

375105820974944 59230781640628620899862803482534

21170679821480865132823066470938446095505822317
25359……

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768744 ?$$

$e^{\pi\sqrt{163}}$ 这个数联系着一个传奇数学家的名字, 叫做拉玛努金数。一则有趣的数学往事是, 在 38 年前 (1975 年 4 月出版的) 一期《科学美国人》中, 数学科普大师马丁·加德纳曾开玩笑说这是一个整数。拉马努金数 $e^{\pi\sqrt{163}}$ 小数点后的前 132 位数字之和 = 666:

262537412640768743. 999999999992500725971981856
88879353856337336990862707537410378210647910118
60731295118134618606450419308388794975386404490
57287144771 ……

$\sqrt{2} = 1.259921049894873164767210$ 小数点后的前 156 位数字之和 = 666:

1.2599210498948731647672106072782283505702514647
01507980081975112155299676513959483729396562436
25509415431025603561566525939902404061373722845
9110304269355246……

$\sqrt{3} = 1.73205080756887729$ 小数点后的前 146 位数字之和 = 666:

1.7320508075688772935274463415058723669428052538
10380628055806979451933016908800037081146186757
24857567562614141540670302996994509499895247881
165551 ……

奇妙的是其小数点后前 34 位数字之和 = 153。

IV 注释的楼阁

这个以“数字的星空”为主题的数学文化讲座, 以两个数字 153 和 666 的知识和相关的人文故事的讲授来呈现数学的魅力。课堂伊始以一则其名曰“数字雷”的游戏设计展开话题, 约定踩到数字之雷的同学可以和我们分享一段他或她的校园往事……缘于那天是 5 月 31 日, 设计篇中的三个数字雷依次是 531, 153, 666。

在一个半小时的讲课过程中, 我们偶有互动, 分享着知识的七彩……总的说来, 这一主题的数学文化讲座还是蛮成功的, 在课后我们做了一个简单的问卷调查, 相关的数据和文字片断表明, 绝大多数的同学还是很喜爱这一数学的课堂——一方面看似如许简单的数字背后竟然有着许多奇妙的数学故事, 让他们感受到比较

多的惊奇；一方面课堂上的学生多是文科生，相关的人文趣事自然可以极大地引起他们的共鸣……且听如下的一部分同学的文字片断：

(i) 通过今天的课，对生活中的普通数字有了更深的认识，原来一些再平凡、再普通、再常用不过的数竟然有这样奇妙的内涵与奥秘在其中。而过去的我在生活中错过了太多对有趣数字的发现与了解，实在遗憾。希望老师能够为我们多讲一些如此有趣生动的课程，让我对数学有更多更进一步的热爱。

(ii) 153，原本一个在数字海洋里平凡的数字，当赋予了数字的想象力，这个数字竟也有了神秘的色彩：三角形数， $1!+2!+3!+4!+5!$ ，以及之前我就知道的水仙花数。

666，一个看似幸运的数，在不同的国界竟也有着不同的含义……很多神奇的数字进行组合给出了我们神奇的想法。

这堂课，我学到了很多与数字有关的东西，让我产生了对数字奇妙的感受，我们要多挖掘，找出数字间更多的魅力。

(iii) 课堂开篇的游戏，其实早已司空见惯，玩过多次，但摆在课堂中进行，着实是令人耳目一新的。这才发现，其实我们平时玩的很多游戏都与数学相关。之后，再由喜爱的数字引申出圣经数 153 和魔鬼数 666，到介绍每一个数字背后的故事……都让我有一种“Wow，原来是这样的”的惊奇感，数学真的很奇妙……这一次与数字的邂逅真令人欣喜。

(iv) 从未认真思考过这些数字背后有这么神奇的故事。人文与数字的完美结合，是巧合还是必然？……以前简单地以为数字仅在数学中占有重要的地位，但其实也会与生活息息相关……当了解到数字 6 为计算机出错率最少的数字后觉得十分奇妙，而每一个条形码的首、中、尾处均含有代表数字 6 的条码，即为 666。还有神奇的水仙花数与伊可相关……数字带来了无穷的乐趣。

原来数字下隐藏着这么多的秘密，在中国传统观念中“666”是个吉祥的数字，人们常说“六六大顺”，而在西方居然被称作魔鬼数，文化很奇妙……也许今天的数字介绍只是数学王国的冰山一角，但也足以震撼。

数字真奇妙！那些神秘的数字 153，666……是怎样被人们发现的呢？我想这个过程必是一种“灵感”所激发的，或许这个过程本身就是上帝赋予人类的。

数字的世界，就是一个秘密花园，我们只是嬉戏其中的顽童，偶尔发现了隐藏其中的七彩石，而后为此兴奋不已。不知还有多少七彩石待我们去发现……

有数字的生活，不再是那样单调枯燥了。数 = 趣

味 + 神秘。

(v) 水仙花数的由来，那唯美的神话，虽然以前早就看过了，但是今天在数学的课堂上提出它，别有一番滋味；将严肃的数学与唯美的神话结合起来，非常的美，也充分激起了我的兴趣，让我沉浸在这片神奇的数字海洋……不只 153，魔鬼数字 666 也带给了我惊艳的感觉，那些我们平时不会注意到的数字，竟然藏了这么多的小秘密……于我来说，这是一场数字的盛宴，带给了我们很多美的享受，发现数学是如此的美。

今日的课堂让我觉得数字充满了神奇，有很多奥秘和乐趣，它是古老、神秘、精彩的，并不是那样的单一无聊。数学中拥有着很多看似巧合但实则有着必然的道理……这或许就是数学的魅力……

(vi) 数学，无处不在，无孔不入，穿梭于我们生活中的每一个角落，不去探索，你永远不会知道它是有多么的令人惊奇。有人总是认为数学是枯燥无趣的，那是因为他们不懂数学之美……

V 画外音

上面的“数字间的邂逅”，或许让我们有几分触动，几许感悟：现代数学卷帙浩瀚，抽象绵延，然究其数学之本原，或是为了演绎数字之纯真；而隐藏在简单纯粹的数学精灵们背后的，却又是一个无限的星空……想起曾在莫里斯·克莱因 (Morris Kline) 的《古今数学思想》一书中看到如下的一句名言：

God exists since mathematics is consistent, and the devil exists since we cannot prove the consistency.

上帝是存在的，因为数学无疑是相容的；魔鬼也是存在的，因为我们不能证明这种相容性。在数学的浪漫星空有许多许多美丽的真理在闪烁——这里有上帝缔造的完美；然数学的证明之旅，却往往会是个魔鬼的旅程。

数学，如同人生，简单的平凡的每一天可以绘就多彩的往事。