THE ABEL PRIZE

拉兹洛 • 洛瓦兹

——2021 年阿贝尔奖得主

史永堂 / 文　　李佳傲 / 校对

LÁSZLÓ LOVÁSZ

2021 年 3 月 17 日，挪威科学与文学院宣布将 2021 年阿贝尔奖授予匈牙利数学家拉兹洛 • 洛瓦兹（László Lovász）[1] 和来自美国普林斯顿高等研究院的艾维 • 维格森（Avi Wigderson），以表彰“他们对理论计算机科学和离散数学的基础性贡献，以及他们在将其塑造成现代数学的核心领域方面的领军作用（for their foundational contributions to theoretical computer science and discrete mathematics, and their leading role in shaping them into central fields of modern mathematics）”。

阿贝尔奖于 2002 年设立，以纪念挪威著名数学家阿贝尔二百周年诞辰。阿贝尔奖于 2003 年 6 月 3 日首次颁发，每年颁发一次，其目的是表彰在数学领域做出杰出贡献的科学工作者，奖金为 750 万挪威克朗，约合 580 万人民币。阿贝尔奖与菲尔兹奖以及沃尔夫奖一起被称为国际数学界最高的“三大奖”。

1. 生平简介

洛瓦兹于 1948 年 3 月 9 日出生于匈牙利的布达佩斯，在布达佩斯读中学时的

[1] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lovasz/

照片来自阿贝尔奖的生平介绍，版权归匈牙利科学院

他就显示出了在数学方面的天分。在 14 岁那年他偶然见到了埃尔德什（Paul Erdős）的一篇论文，并且着了魔似的读了“至少二十遍”，第二年他就遇到了他心中的数学英雄——埃尔德什。受埃尔德什影响，在 1964-1966 年，洛瓦兹连续三次获得国际数学奥林匹克竞赛（IMO）金牌，其中在 1965 年及 1966 年的竞赛中获得了满分。这里顺便推介一本书 *An Invitation to Mathematics*（Springer，2011），这本书邀请了 14 位专家，每人撰写一章，其中多人为数学奥林匹克竞赛的获奖者，包括鲍乐博（Béla Bollobás，1959 年铜牌、1960 年金牌、1961 年金牌，ICM 邀请报告），洛瓦兹（1964-1966 年金牌），诺顿（Simon Norton，1967-1969 年金牌），约科（Jean-Christophe Yoccoz，1973 年银牌、1974 年金牌，1994 年菲尔兹奖），高尔斯（Timothy Gowers，1981 年金牌，1998 年菲尔兹奖），陶哲轩（1986 年铜牌、1987 年银牌、1988 年金牌，2006 年菲尔兹奖），斯米尔诺夫（Stanislav Smirnov，1986、1987 年金牌，2010 菲尔兹奖），书中洛瓦兹写的章节题目为“Graph Theory Over 45 Years”。感兴趣的读者，可以先阅读一下丁玖老师写的书评[2]。

[2] 丁玖，书评：“An Invitation to Mathematics”，数学文化，3(3) (2012), 99.

在 17 岁那年（1965 年），洛瓦兹独自发表了第一篇学术论文 *On graphs not containing independent circuits*，这是一篇图论方向的论文，论文中他对任意两个圈都有公共点的图进行了结构刻画和分类。接下来的几年，他发表了多篇论文，包括 *On decomposition of graphs*（1966）、*Operations with structures*（1967）、*Über die starke Multiplikation von geordneten Graphen"*（1967）、*On connected sets of points*（1967）、*On chromatic number of finite set-systems*（1968）。对于 1968 年的这篇论文，著名图论学家哈拉里（Frank Harary）在美国《数学评论》写道："埃尔德什用概率方法证明了'对于任意正整数存在色数为 n 且围长至少为 g 的图'，但是没有给出这样的图的构造。而本文将这一问题从图推广到有限集合，从而成功地给出了这样图的构造"。事实上，埃尔德什的这个结果和洛瓦兹的构造，是染色理论中非常有名的结论，早已写在图论的教科书里了。

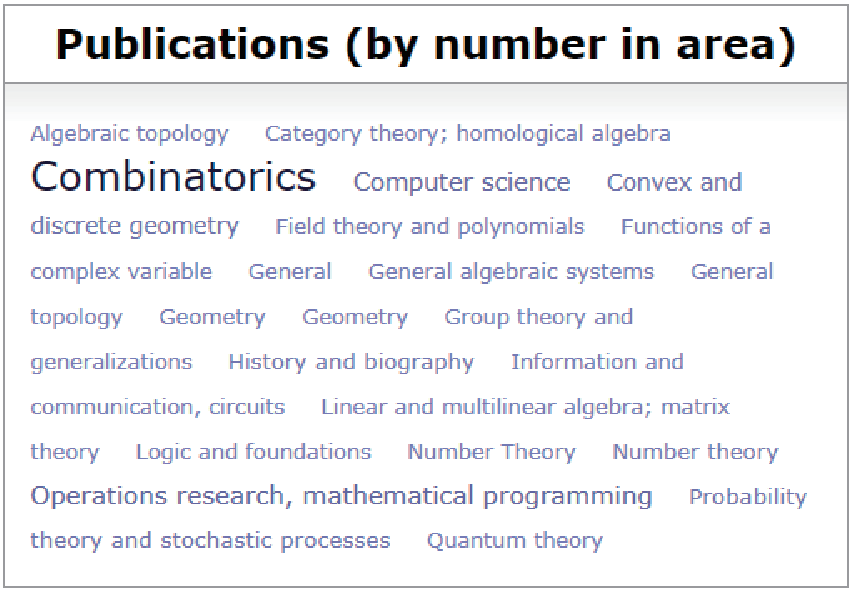
高中毕业后，洛瓦兹就读于布达佩斯罗兰大学（ Eötvös Loránd University）。期间他已经在很多国际会议上作过讲座并且在会议文集上发表论文，包括 *Theory of graphs*(1967)、*Beiträge zur Graphentheorie*（1967）、*Combinatorial Structures and their Applications*（1969）等。由于洛瓦兹出色的工作，他在 1970 年获得了"Grünwald Géza 奖"，在 1971 年获得了博士学位，博士论文为"图的因子（Factors of Graphs）"，导师为匈牙利科学院院士、著名图论学家加莱（Tibor Gallai）。自 1971 至 1975 年，他在罗兰大学做研究助理，1975 至 1978 年，受聘于塞吉德（Szeged）的约瑟夫阿提拉大学（Jozsef Attila University），担任教师（Docent），1978 至 1982 年担任该校几何学主任、教授，1978-1979 年在加拿大的滑铁卢大学访问。在 1979 年，也就是他 31 岁那年，成为匈牙利科学院准院士（corresponding member），也是迄今为止匈牙利科学院最为年轻的记录，1985 年担任正式院士（regular member）。

在 1983 年，他回到罗兰大学担任计算机系主任，直到 1993 年他辞去系主任（仍担任教授），受聘到美国耶鲁大学计算机系担任教授。1999 至 2006 年，在微软担任研究员，2006 至 2011 年担任罗兰大学数学研究所所长，自 2011 年起

辞掉所长，担任教授至今。

2. 学术工作简介

洛瓦兹的研究跨越了数学和理论计算机科学等领域，涉及到组合优化、图论、算法、复杂性以及随机游走等领域的交叉和融合，产生了大量深刻的结果。洛瓦兹是一位非常多产的数学家，截至目前（2021 年 4 月），Math. Review 上显示论著数量为 304，引用次数为 11524。

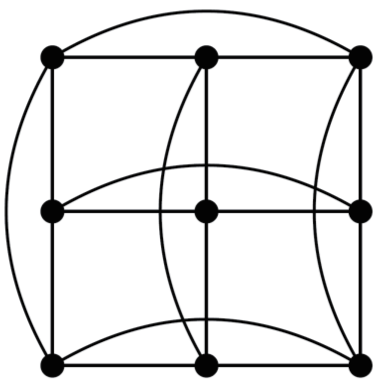


因其开创性的工作，洛瓦兹获得了很多的奖项，包括 1999 年沃尔夫奖（Wolf Prize）、1999 年高德纳奖（Knuth Prize）、2001 年哥德尔奖（Goedel Prize）、2006 年冯•诺依曼理论奖（John von Neumann Theory Prize），2010 年京都奖（Kyoto Prize）、2019 希帕蒂娅奖（Hypatia Prize）等奖项。其中，沃尔夫奖的获奖辞如下：“洛瓦兹在离散数学领域得到了许多开创性的结果，这些在纯粹和应用数学的其他领域以及理论计算机科学领域都有着非常重要的应用。他通过引入基于几何多面体和拓扑技术的深刻数学方法，解决了许多著名的问题，包括完美图猜想、克内泽尔猜想、五边形的香农容量的确定（the determination of the Shannon capacity of the pentagon）等。他的算法思想，包括组合优化中椭球法的应用、格基归约算法、拟阵奇偶算法（matroid parity algorithm）以及体积计算的改进（improved procedures for volume computation）等，都在理论计算机科学领域有着深远的影响。洛瓦兹也在 NP 理论中的 PCP 刻画及其与近似复杂性的联系方面做出了贡献，他的‘局部引理’是概率方法发展早期的主要结果之一。他的综合类书籍以及那些极有吸引力的讲座报告促进了世界数学的研究。”

事实上，他前期的主要贡献，包括解决了离散数学领域中多个影响深远的重要问题，如完美图猜想、克内泽尔猜想、局部引理等。

【LLL 算法】洛瓦兹可能因为广泛使用的“LLL 算法”而著名，这一名字源于阿尔杰•莱斯特拉（Arjen K. Lenstra）、昂德里克•莱斯特拉（Hendrik W. Lenstra）和洛瓦兹三人合作发表的论文 *Factoring Polynomials with Rational Coefficients*（Math. Ann., 1982）首次给出了一个算法，这个算法给出了点格（point lattice）的一个有效基归约方法。这一强有力的算法是他在计算机科学领域的基础性工作之一，还可用于设计和保证较新的格基加密系统的安全性。

【完美图猜想】如果图 G 的每个导出子图 H 都满足 H 的色数等于 H 中最大完全子图的大小，则称图 G 是完美图。例如，完全图、二部图、弦图、Paley 图等都是完美图。



Paley 图（9 个顶点）是完美图

上世纪六十年代贝尔热（Claude Berge）开始研究完美图，并于1961年提出了两个奠基性的猜想[3]。

完美图猜想：每个完美图的补图是完美图。

强完美图猜想：一个图是完美的当且仅当它不包含长大于3的奇圈或它们的补图作为导出子图。

关于完美图的研究有很多方法，包括组合方法、多面体方法、代数方法、椭球法等。洛瓦兹在1972年，完全用组合方法给出了完美图猜想的证明。事实上富尔克森在1972年借助反交锁多面形（anti-blocking polyhedra）理论，也独立地给出了一个证明。直到2002年，丘德诺夫斯基、罗伯逊、西摩、托马斯等四人借助组合方法，给出了强完美图猜想的证明（Ann. of Math., 2006）。

【克内泽尔猜想】数论学家克内泽尔（Martin Kneser, 1962年ICM邀请报告人）在1955年提出如下猜想[4]。

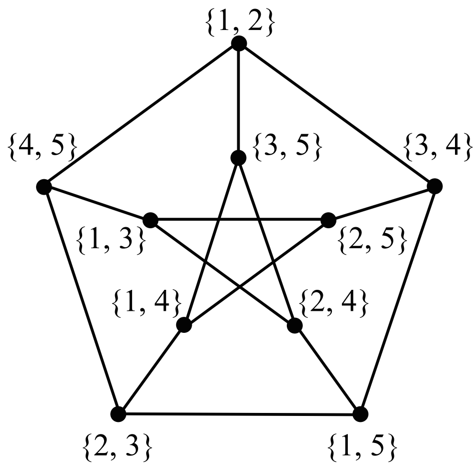
克内泽尔猜想：将$(2n+k)$−元集合的n−元子集任意划分为$k+1$个部分，都会有两个不交子集出现在同一部分中。

洛瓦兹在1978年基于图论，用拓扑学中的博苏克—乌拉姆定理（Borsuk-Ulam theorem）给出了一个证明，他证明克内泽尔图（顶点集是这些n−元子集，每条边连接两个不交的子集）的色数等于$k+2$，这也意味着如果将部分数增加

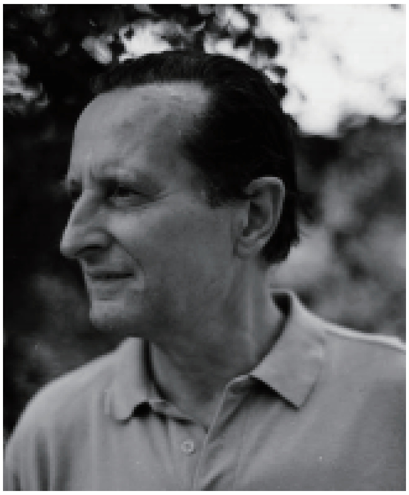
[3] F. Roussel, I. Rusu, H. Thuillier, The strong perfect graph conjecture: 40 years of attempts, and its resolution, Discrete Mathematics 309 (2009) 6092-6113.

[4] M. de Longueville, 25 years proof of the Kneser conjecture – the advent of topological combinatorics. EMS-Newsletter 53, 16–19 (2004)

到 $k+2$，克内泽尔猜想的结论将是不正确的。洛瓦兹的这个证明被看作是现代拓扑组合学的开端。洛瓦兹的证明之后又出现了多个简单的证明，如巴拉尼（Imre Barany, 1978），格林（Joshua Greene, 2002），可参见著作 *Proofs from the Book*。



Kneser 图（5- 元集的 2- 元子集）



克内泽尔（1928-2004）

【**局部引理**】洛瓦兹在组合学和算法设计领域的一个核心贡献是概率方法的研究，在这一领域中他最有名的贡献是在上世纪七十年代得到的局部引理（Lovász Local Lemma），这是极值组合学中一个重要的且应用广泛的工具，被认为是概率方法的基石，可用来证明“稀有物品”的存在性，这与证明“丰盛物品”的一些标准工具是相反的[5]。

局部引理（对称形式）：设 B 为一些事件的集合，其中每个事件发生的概率至多为 p，且每个事件与除了至多 d 个事件外的其它事件均相互独立。若有 $ep(d+1)\leq 1$，则 $Pr\,[\wedge_{x\in B}\bar{x}]>0$，即所有事件均不发生的概率为正。

[5] Mario Szegedy. The Lovász local lemma - a survey. In Andrei A. Bulatov and Arseny M. Shur, editors, Computer Science Theory and Applications, volume 7913, pages 1–11. Springer, Lecture Notes in Computer Science, 2013.

洛瓦兹给出的局部引理的证明是非构造性的，直到 20 年以后，贝克（József Beck）在 1991 年给出了一个构造性的证明，但是技巧性非常强；莫泽尔（Robin A. Moser）在 2008 年、莫泽尔和塔多斯（Gábor Tardos）在 2009 年借助简单重采样的方法给出了一个构造性证明。后来进一步发展出算法版本的局部引理方法，被陶哲轩命名为熵压缩（entropy compression）方法，在各类组合问题中发挥着越来越广泛的作用。

下面我们举一个关于三维空间开球覆盖的例子来展示局部引理的应用。考虑用一些单位开球来覆盖整个三维空间 R^3，如果每个点都属于至少 k 个单位开球，则称这个覆盖为 k– 覆盖。如果一个覆盖能够分解成两个覆盖来分别覆盖住 R^3，则称这样的覆盖是可分解的。下面仅考虑不可分解的覆盖这一非平凡的情形。运用局部引理可以证明如下结论：

存在常数 $c > 0$ 使得 R^3 上每一个不可分解的 k– 覆盖都有一个点被覆盖了至少 $c2^{k/3}$ 次。这说明无法找到 R^3 的覆盖使得其中的每个点都被覆盖了相同的次数。

我们构造一个无限超图 $G = (v, \varepsilon)$，其中点集 v 中每个顶点代表一个单位开球，对 R^3 中任意点 x 把包含 x 的所有开球作为一条超边 E_x，从而边集为 $\varepsilon =\{E_x, x \in R^3\}$。如果这个超图 G 是二染色的，那么我们可以用红蓝两种颜色对点进行染色，使得每条边都包含红蓝这两种颜色，从而根据定义每个 R^3 中的点 x 都被红色的单位开球覆盖也被蓝色的单位开球覆盖。这样所有红色的单位开球形成了 R^3 的一个覆盖，所有蓝色的开球也形成了 R^3 的一个覆盖，这与原覆盖是不可分解的矛盾。下面我们将用这个超图的非二染色性，结合局部引理和反证法来证明这个命题。

假设在这个 R^3 的不可分解 k- 覆盖中每个点都被覆盖了至多 t 次，其中 $t < c2^{k/3}$。构造上述无限超图 $G = (v, \varepsilon)$。对两条相交的超边 E_x 和 E_y，在 R^3 中点 x 与点 y 的距离不超过 2，任意 $E_x \cup E_y$ 中的单位开球必包含在以 x 为球心半径为 4 的球内，由于每个点被覆盖了至多 t 次，故 $E_x \cup E_y$ 包含至多 4^3t 个单位开球，

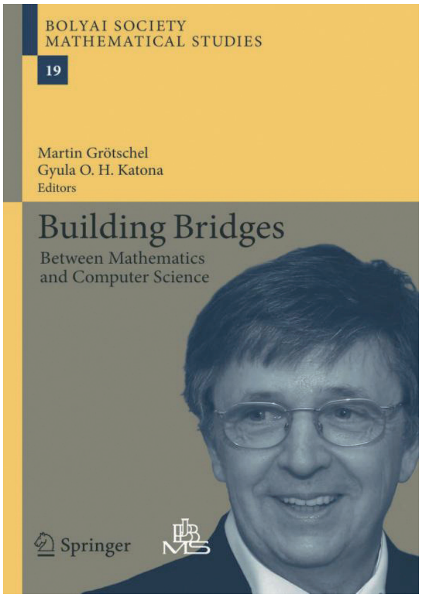
可以验证这些单位开球把 R^3 分成了至多 $4^9t^3 + 1$ 个区域，其中每个区域对应于超图的一条超边，这说明与超边 E_x 相交的超边至多有 $4^9t^3+ 1$ 条。

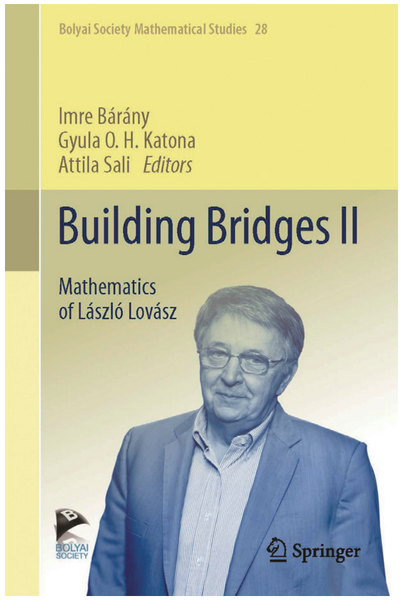
对于无限超图 $G = (v, \varepsilon)$ 的任意有限子超图 H，它的每条超边与至多 $4^9t^3+ 1$ 条超边关联。考虑 H 的随机二染色，出现一条单色边的事件的概率至多为 2^{-k+1}，而每个事件与除了至多 $4^9t^3 + 1$ 个事件外的其它事件均相互独立（即不关联超边出现单色的事件相互独立），经过简单计算可得 $e2^{-k+1}(4^9t^3 + 2) \leq 1$。根据局部引理，所有边均不是单色的概率为正，从而 H 是存在一种二染色方案的。由于无限超图 G 的任意有限子超图 H 都是二染色的，由紧性定理知无限超图 G 也是二染色的，这说明原覆盖是一个可分解的覆盖，导出矛盾！

前面几个工作是洛瓦兹早期的工作，图极限理论应该是洛瓦兹近年来的代表性工作之一。在洛瓦兹的主页“论著和学术报告”项中，他将工作分为几个部分，其中排在最前面的就是“图同态与极限”[6]。

【图极限】洛瓦兹与合作者发展了图极限理论，这项研究将极图理论、概率理论和统计物理学等要素结合在了一起，同时也架起了图论和分析之间的桥梁。在2012 年出版了著作 *Large Networks and Graph Limits*，仅从这本书的七个关键词，你就可以看到这个领域的“复杂”：图同态（graph homomorphism），图代数 (graph algebra)，图极限（graph limit），graphon, graphing, 性质检验（property testing），正则引理（regularity lemma）。关于这本书，菲尔兹奖得主陶哲轩这样评价：“现代组合学绝不是数学中一门孤立的学科，它与数学和计算机科学的几乎每个领域都有着许多丰富而又有趣的关联。洛瓦兹这本书中所展示的研究，通过“有限图”这一非常标准的组合结构以及这些图所构成序列的极限展示了这一现象的一个典型实例，揭示了与测度论、分析、统计物理、度量几何、

[6] http://web.cs.elte.hu/~lovasz/index.html

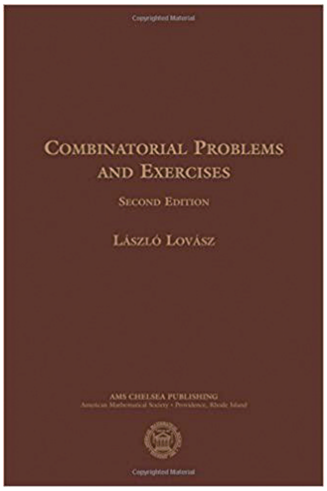


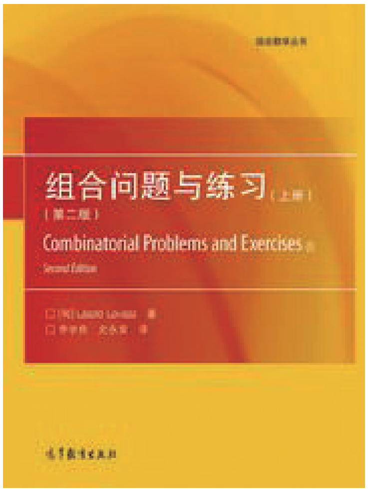


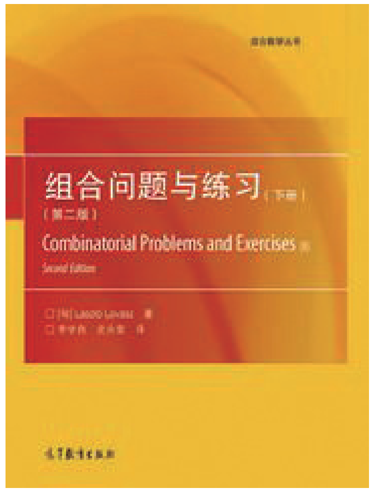
谱理论、性质检测、代数几何以及希尔伯特第十、十七个问题之间的联系。”

现实世界中的很多现象都可以用网络来描述，我们每个人也处在各种各样的网络之中，到处都是超大网络，大网络的研究显得尤为重要，正如洛瓦兹在书中所写“超大网络给数学家们带来了激动人心的挑战（huge networks pose exciting challenges for the mathematician）”。

洛瓦兹在书的前言部分，这样描写图极限理论的发端。图极限理论，是 2000 年左右，洛瓦兹在微软的时候跟他的同事们一起发展的理论，书的前言部分指出他的这一研究源于 2003 年他的三个同事提出的三个问题。弗里德曼（Michael Freedman），他当时正在研究基于代数拓扑的方法设计量子计算机的一些有意思的构思，他想知道哪些图参数可以被表示为统计物理学模型的划分函数；查耶斯（Jennifer Chayes），他当时正在研究互联网模型，他的问题是，是否存在图序列（而不是数列）的“极限分布”的一个概念；索斯（Vera T. Sós），来自布达佩斯的一个访问学者，他感兴趣的是拟随机性现象以及与正则引理的关联，他建议考虑拟随机图（quasirandom graphs）到多类型拟随机







图（multitype quasirandom graphs）的推广。这三个问题是密切关联的，洛瓦兹与合作者一起发展了图极限这一理论模型来回答这些问题，并建立了多个学科之间相互深刻联系的桥梁。这一理论目前还在发展完善中，相信一定会对未来的理论和应用研究起到重要的影响。

洛瓦兹本人也提出了很多的猜想和公开问题。关于洛瓦兹的研究工作，感兴趣的读者可以去翻看斯普林格出版社的两部著作 Building Bridges: Between Mathematics and Computer Science（2008）、Building Bridges II: Mathematics of László Lovász（2019）。这两部著作分别是庆祝洛瓦兹的 60 和 70 岁生日学术会议上邀请报告人所写的综述性论文，这些论文都是与洛瓦兹的研究方向相关联的。

3. 著作及其他

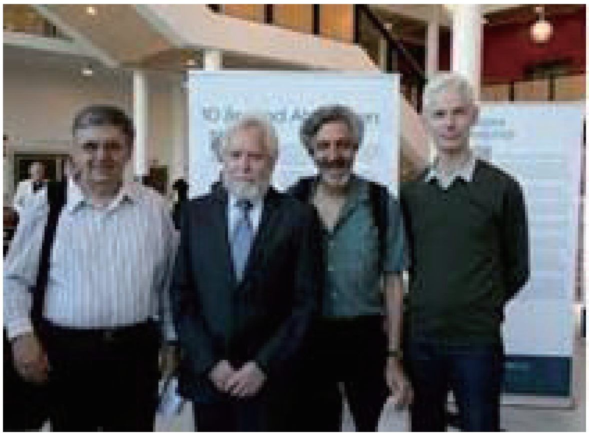
洛瓦兹有很多经典的著作，除了上面提到的 *Large Networks and Graph Limits*（2012）外，还有十余部著作，包括 *Combinatorial problems and exercises*（*1979*），*Matching theory*（1986, 合作者：Michael D. Plummer），A*n algorithmic theory of numbers, graphs and convexity*（1986），*Geometric algorithms and combinatorial optimization*（1988，合作者：Martin Grötschel, Alexander Schrijver），*Greedoids*（1991，合作者：Bernhard Korte, Rainer Schrader），*Discrete mathematics*（2003, 合作者：Josef Pelikan, Katalin L.

Vesztergombi）等。

让我们来说说这本书 *Combinatorial problems and exercises*，本书由美国数学会出版，第二版于 1993 年出版，共 640 道习题。全书分为三部分，第一部分是习题，第二部分是提示，第三部分是解答。本书不仅是一本习题集，更是一本很好的学术参考书，其中一些习题都是非常困难的问题，截至目前为止，谷歌学术中显示已经被引用了 2080 次。正如维格森所说，这本书对组合数学具有巨大影响（This book had a huge influence on combinatorics）。我们非常有幸翻译了 *Combinatorial problems and exercises* 的第二版（1993），分上下册在高等教育出版社出版（2017/2019）。

除了他本身的研究工作之外，洛瓦兹还对整个数学学科，乃至整个自然科学的发展做出了重要的贡献。他于 2007-2010 担任国际数学联盟主席。

洛瓦兹于 2014-2020 年，担任匈牙利科学院的院长。在任职期间，他发起了多学科研究计划，比如学科教学研究计划、国家水科学计划、农业研究计划和公共卫生计划等等。此外，他还倡导女性参与数学、物理和其他自然科学，这在 2017 年至 2019 年期间促进了匈牙利女性学者数量的显著增加。



10.10 Professor Endre Szemerédi: "In Every Chaos There is an Order"

11.00 Coffee/tea

11.30 Professor László Lovász: The many facets of the Regularity Lemma"

12:30 Lunch (requires registration)

13.30 Professor Timothy Gowers: "The afterlife of Szemerédi's theorem"

14:15 Coffee/tea

14:30 Science Lecture: Avi Wigderson, "Randomness and Pseudorandomness"

4. 结尾

阿贝尔委员会主席蒙特凯斯（Hans Munthe-Kass）评论道："正是因为洛瓦兹和维格森的领导，离散数学和相对年轻的理论计算机科学现已被确立到现代数学研究的中心领域中。（Thanks to the leadership of these two, discrete mathematics and the relatively young field of theoretical computer science are now established as central areas of modern mathematics.）"[7]

值得一提的是，2012 年度的阿贝尔奖授予匈牙利数学家安德烈·塞迈雷迪（Endre Szemerédi），"以嘉奖其在离散数学和理论计算机科学方面的杰出贡献，以及对堆垒数论和遍历理论产生的深远影响。" 2012 年 5 月 22 颁奖当日，四位顶尖数学家塞迈雷迪、洛瓦兹、高尔斯（菲尔兹奖得主）、维格森给大家带来了精彩的阿贝尔报告[8]。而 9 年后的阿贝尔奖则授予了洛瓦兹和维格森。

此文源自《数学文化》2021 年第 3 期。感谢 Global Science Press 允许本通讯转载。

[7] https://www.norway.no/en/thailand/lovasz-and-wigderson-to-share-the-abel-prize/

[8] 史永堂，安德烈·塞迈雷迪——2012 年度阿贝尔奖得主，数学文化，3(3) (2012), 13-16.