

张英伯：大学先修的课堂轶事



青岛中学是北京十一学校的盟校，由十一学校校长李希贵担任名誉校长，2016 年前后负责学校筹建及校务工作的是秦建云校长。

记得有一天，北师大数学系的毕业生，十一学校的数学教师潘国双接我们去学校，秦校长和王东刚老师一起郑重地邀请我们到青岛中学讲授大学先修课程，我们愉快地接受了邀请。在 2017 年的秋季开学之前抵达青岛，东刚开车到火车站迎接。

当我们跟着东刚第一次踏进青岛中学，看到庄重、美丽的德国式教学大楼，看到绿草茵茵，绿树成行，三面环海的校园，感到十分震惊。在北京，在我们访问过的全国各个高校，甚至欧洲美国的学校，从来没有见过这么漂亮的校园。

我们很快投入了工作。九年级的数学分析由王昆扬教授担任，所用课本是在他自己编写的北师大一年级《数学分析》教材的基础上，考虑到中学生的实际水平，再三修订而成的；高等代数由张英伯教授担任，所用课本由张英伯，王恺顺编写的大学

教材《高等代数》修订而成。我们也曾经考虑过是不是用物理、化学或工科的《高等数学》，经过反复衡量，觉得还是用数学系的课本更加合适。因为数学日益成为现代科学不可或缺的基础，英才教育需要培养通晓数学的科技人才。

我们教的第一个班由 2017 年秋季入学的九年级、当年 15 岁的学生组成。第一堂课教室里坐满了人，大约有三、四十名。然后陆续减员，到第一学年结束剩下七名，期末考试成绩还算说得过去。

第二学年有两个孩子去了北京十一学校，两个孩子退出，剩下两个女孩纪乃文和李逸然，一个男孩张博文仍然很努力地跟着。

选修数学分析课的学生多一些，除了他们三人之外，盛佳宁、宋玉倩等也都陆续跟了几个月。两年之后的 2019 年秋季开学，伍文浩同学一个人单独跟着王老师学习了一年。

我的高等代数作业很多，课本上的习题全部留给学生做了，稍难一点的题目就在做完后进行课堂讨论。难题大多由张博文讲，至今记得张博文在白板上讲题时，李逸然和纪乃文不错眼珠地盯着他，全神灌注地看他板书，听他讲解。

在 2019 年夏季，学期结束之前，我们为三个孩子参加中国教育学会组织的大学先修课程（CAP）全国统一考试做过准备。当时我给他们制定的高等代数考试目标是：张博文 80 分，两个女孩子 70 分。但是由于新冠疫情的干扰，那一年的 CAP 考试未能如期举行。而张博文得到了一个赴美交流一年的机会，远走他乡。

在 2020 年春季，大学先修课程全国统考之前，我们为硕果仅存的两个女孩子进行了考前辅导，仔细地回顾了全书重要的定义和定理。其中李逸然得到了全国第一名的好成绩。

王东刚是李逸然班上数学课的任课教师，岁数不大却有多年的教学经验，特别认真负



左起：王昆扬、李逸然、张英伯

贵。学生的成绩是东刚从网上查出来的，查到分数的那天上午十点来钟，我和王昆扬离开办公室打算去操场走走，隔壁办公室的东刚见到后，立刻跟出来说，咱们一块走吧。

他向我们宣布了关于李逸然的好消息，王昆扬和我都感到相当意外。记得当时我们三个人特别兴奋，沿着操场上褚红色的四百米跑道走了两圈，跑道内是绿草茵茵的足球场。东刚始终不停地说着，为了保险起见，他请我们再向高等教育委员会核实一下。

回到办公室，我立即给负责 CAP 考试安排的李杨映雪发微信询问，她是中国大学先修课程试点项目数学专家委员会的召集人。记得我特别询问了这个第一是青岛市、山东省、还是全国。李杨非常负责任地查阅了考试记录，回信说是全国第一。但全国参加考试的学生不多，只有四十余人。

李逸然的绝对分数并不很高，只有 71 分，但这是与北京、上海、江苏、浙江、广东等名校林立的发达地区相比，在全国的高手之间能够排在第一名也算相当不容易了。学校的走廊里很快挂出了李逸然的大幅照片，学校向全体教师和同学宣布了好消息。在整个过程中，表现最淡定的是李逸然本人。记得学校的摄影师在课堂上找到她，叫她到我们的办公室来，给她、王昆扬和我拍了一张三人合影。刚一拍完，她马上

很有礼貌地对我们说：“老师，对不起，我还有课，先走了。”说完便站起来冲回了上课的教室。

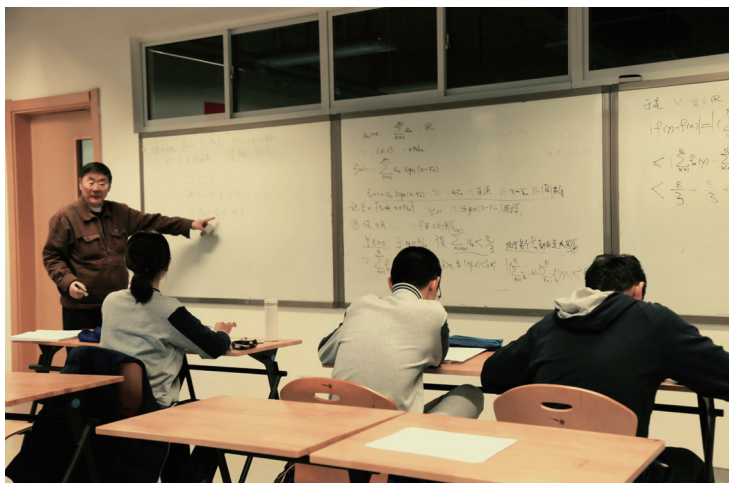
事过两年之后，我在学生食堂见到她正跟同学们坐在一起进餐，她也看到了我，马上站起来打招呼。两年前我可以拍拍她的头顶，现在她已经比我高出小半个头，成了亭亭玉立的大姑娘，我们只能拥抱一下了。

李逸然是一个美丽善良、文静谦和的女孩子，学习非常踏实、特别刻苦。记得在他们九年级第一学期结束之前，我布置寒假作业，除了做题之外，还请同学们写一份高等代数的学期总结。因为心里对学生写总结没抱什么希望，第二学期开学我都快把这件事情忘了。没想到李逸然交给我一份学习总结，写得整整齐齐，清清楚楚。说心里话我当时相当感动，感叹着竟然还有这么听话的乖孩子。我让她将总结当中关于“矩阵秩”的一段摘录出来投给《数学通报》杂志，经过两位专家审查后刊登了。

一年后张博文从美国回来，马上找到王老师复习数学分析，每周两次，每次一、二个学时。他觉得这门课程理论性很强，自己掌握得不够理想。他不断地提问题与老师讨论，每个问题不彻底弄明白不会罢休，是个准备上大学攻读数学专业的样子。

从2020年9月开始，我们为新一届的九年级学生讲授数学分析和高等代数，为期两年，每科历时一年，课时安排为每周四学时。因为在新冠流行的隔离阶段教过这届学生读八年级时的网课，我们彼此之间非常熟悉。

这届学生以男生为主，共有五名：李中元、苏彻、黄冠翔、宛卓远、曲浩洋，还有一位女生邢文，依然聪慧美丽。当然男孩子好像更有优势，他们的逻辑思维能力似乎要强一些。王昆扬曾在上课时谈到他们的学姐李逸然在CAP考试中得到全国第一名的好成绩，孩子们在课堂上情不自禁地鼓掌欢呼，也许这是对他们莫大的鼓励吧。我们过去在北师大给本科生上基础课时，课堂是大阶梯教室，坐着三个班级的120名学生。除了老师讲课的声音，学生们都在安静地记笔记听讲，一声不出。但是中



王昆扬讲数学分析，左起：王昆扬、邢文、李中元、黄冠翔

学生上大学先修课时特别活跃。

李中元是一个非常聪明的孩子，接受能力和理解能力皆为一流。王昆扬曾经在课堂上讲过一个定理：“实直线上的单调函数最多只有可数多个间断点。”在弄清楚一个间断点对应于一个开区间，不同的间断点对应于不同的开区间之后，李中元立即想到互不相交的开区间最多只有可数多个，这是因为分数的集合是可数的，从每个开区间中取出一个分数，最多只能取可数多个。他把手高高地举过头顶，大声阐明了上述想法。得到老师的肯定后，他兴奋地倒在黑板前的地上打了个滚儿，站起来拍着桌子为自己欢呼。王昆扬问坐在最边上的女孩子邢文听懂了没有，邢文严肃地点点头说“懂了。”不久以后，曲浩洋和邢文去了北京十一学校，宛卓远退出了。

王昆扬讲授数学分析时，经常对学生进行测试，李中元每次的分数都在 95 以上。以王昆扬一贯的严谨作风和高标准要求，能得到这种分数的学生并不多见。

李中元是提前一年从青岛中学毕业的，他修完了学校的全部课程，每门课都得到了几乎满分的成绩。与此同时，他还参加了英国剑桥大学的入学考试，并被顺利录取。今年秋季开学，他便要远渡重洋奔赴英伦，成为剑桥大学的学生了。

青岛中学爱乐乐团团长，萨克斯管演奏员黄冠翔上半个学期没有跟大家一起上课，学期中间才来到班上，王昆扬给他一本数学分析教材，让他自己读书。在没听过老师讲课的情况下，黄冠翔竟然也在黑板上把习题做出来了。一般学生在老师的指导下理解数学分析的理论尚且不易，他能够自学理解，学习能力可以说相当强了。

有一天上高代课习题课，下课铃声刚响，李中原和黄冠翔就一溜烟地跑出教室不见了踪影，过了五分钟，两人又气喘吁吁地跑回来了，一副胜利者的模样。我问他们干什么去了，他们说把刚刚讲过的高代题目拿去考他们的数学老师了，老师不会做，我听了真是哭笑不得。后来黄冠翔每次参加数学竞赛，总会给我带来一道竞赛题，我不会做，他就很高兴地给我讲一遍。

高等代数课本也用的是北师大数学系本科教材。这本书的习题有相当的难度，是由现任北师大数学学院院长，当年和我同时讲课的王恺顺教授搜集整理的。

王恺顺是一个特别严肃认真的人，他搜集了所有纸质版的、网络上的中、外课本和习题集，从中提炼出适合课程内容的题目，编写成目前每节书后的习题。

全书的题目全部作为作业留给孩子们了。黄冠翔把他的同学兼朋友周润禾拉过来一起上课，周润禾高高瘦瘦，长得非常漂亮，如果不是事先知道这是一个男孩子，很容易让人以为遇到了一位小姑娘。

黄冠翔、周润禾学习非常刻苦，做完了高等代数书中的全部习题。这些题目数量众多，覆盖面广泛，其中部分题目有相当的难度。

在高等代数讲完之后，我和两个孩子合作，编写了全书的习题解答。他们非常认真，我写完初稿后，他们仔细检查，从数学内容到行文编排，提出了许多宝贵的意见。

其中有一道解三元一次方程组的题目，周润禾指出我的计算错误，并给出了正确答案。

还有一道非常困难的题目，黄冠翔在黑板上演算了两次，都没有得到正确答案。第二次演算错误之后，我决定惩罚他，就到木工房拿了两块巴掌大的长方体木块儿，木工房也有类似鞭子的长条木片，我考虑那东西打在手上太疼了，就没有拿。我把木块放在办公桌上，对黄冠翔说，明天上课你必须给出正确解答，这是你最后的机会，如果再做错，就用木块儿打手心了。

第二天他在黑板前侃侃而谈，果然十分严谨，挑不出一点毛病。我心中暗暗高兴，怪不得早年间私塾先生惩罚学生时要打手心呢，还真管用。

最为难能可贵的是，黄冠翔不仅学习出色，而且为人善良，乐于奉献。大先课与缝纫、木工等等选课一样，将上课时间排在晚饭以后。在 2021 年严冬，一个风雪交加的傍晚，我走进教室准备上课，发现里面只有周润禾与苏彻。我问黄冠翔呢？两人都不知道。正在这时，黄冠翔气喘吁吁地跑了过来，见面就检讨“老师对不起，我没听到铃声，迟到了。”他头上冒汗，双手冻得通红。我问“你干什么去了？”他不好意思地笑笑：“我在操场上捡冰块。”我很惊讶：“为什么捡冰块啊？”他回答：“周一早晨全校同学在操场集合，举行升国旗的仪式。我怕有人滑倒。”我听后心中十分感动，让他赶快进教室暖和暖和。那天上的是习题课，三个孩子马上热火朝天地讨论起来。

有一个星期天，黄冠翔来学校向王昆扬请教一些问题，问题讨论完毕已经到了午饭时间。我们对他说一起到学校附近的小饭店去吃点东西吧。王昆扬走在前头，很快从学校西门出去过了马路。我们在后面，出了西校门后我也准备和黄冠翔一起过马路，不料黄冠翔说，按照交通规则，这个马路不能直接过，应该从学校北门的立交桥绕行。我说：“现在马路上一辆车都没有呀，不至于吧！”但他坚持交通规则是应该遵守的。我心里这份气啊！绕过去得有一里多地。

他告诉我有一次他和父亲去大商场买东西，也是要穿过一条马路，父亲直接过去了，他不干，非要绕立交桥，绕是绕了，但是出来就被他父亲打了一顿。我心想打得好，

我也想打你一顿，只是作为教师不能下手罢了。我们顶着大太阳走了一里地，浑身被汗水湿透。王昆扬早已点好了饭菜等候多时，惊讶地问我们去哪里了，怎么才来。

高等代数讲完以后，我对黄冠翔和周润和进行了一次测试，用的是教育部组织北大和北师大共同拟定的 CAP2007 年 B 卷。也许流年不利，考试的那天晚上黄冠翔感冒了，周润禾肚子疼。我跟他们商量要不要推迟两天，他俩说不用，能够坚持。黄冠翔一直在咳嗽，周润禾则一直捂着肚子。我见状下楼到医务室，跟校医要了感冒药和止疼片，回来给他们一人打了一杯温开水服药。好在他们年轻，竟然暂时把症状压下去了。我以为这次肯定要考砸了，没想到按照试卷的判分标准，黄冠翔得到 92 分，周润禾 89 分。我当时都呆住了，反复检查几次，确定自己没有判错。这可是大学先修课程从未有过的高分！

剑桥大学是黄冠翔一直以来的理想学校。目前他经过近一年的努力，顺利地通过了剑桥大学数学专业各类课程的几十门考试，拿到青中的推荐之后，预计明年就可以到英国去学习了。

周润禾也通过了五花八门的英语测试，准备申请美国的学校了。考虑到这孩子身体较弱，我联系到过去的北师大数学系毕业生，现在美国华盛顿为政府维护电脑系统安全的张强。张强是个热心人，凡是北师大赴美留学的同学，只要找到他，都会得到热情的接待。我跟张强详细地谈了周润禾的情况，请他帮忙，他一口答应下来，尽可能地给这孩子提供生活上的照顾。

前几天我和王昆扬在食堂吃过午饭，在回办公室的路上迎面碰到孙嘉欣。孙嘉欣是一位端庄美丽，聪慧优雅的女孩子，曾经和黄冠翔等人一起跟随我们学习过大学先修课程。她满面笑容地对我们说，她已经被美国的学校录取，很快就要去那里读书了。我双手握住她的手，衷心地祝愿她学习顺利。

现在我们又开始教新一轮的大学先修课程，这次已经不再是数学分析和高等代数，

而是王昆扬的实变函数和我的近世代数，大学数学系大二、大三的课程。王昆扬那里有两名学生，耿子翔和牟俊毓，我这里有一位杨儒辰。

由于只有一名学生，课堂教学几乎都是他讲我听，遇到重点和难点时予以点拨。同时，我和杨儒辰开始编写近世代数习题解答，他已经做完了书中的大部分习题，并逐题跟我进行过讨论。

我们准备下学期开学讲授高等代数的若尔当标准型和近世代数的伽罗瓦理论。这是代数学的两大重点和难点。

孩子们自发地、非常强烈地要求学习，甚至主动要求老师讲深一点、多一点，完全不发憊 ε - δ 语言之类严格的逻辑训练。

青岛中学的现任主管校长汪正贵先生是一位博学睿智的实干家。他非常支持大学先修课程的开设，经常与我们交流、沟通：关心学生的学习情况；谈谈各自对教育教学，国内外教育形势的看法；询问我们在青岛的生活；甚至还在周末邀请我们去青岛市内走走、聊聊。

在青岛中学讲授大学先修课程，成为我们晚年的生活乐趣与精神寄托。

文章来源：《数学通报》2023 年第 8 期 59-62 页