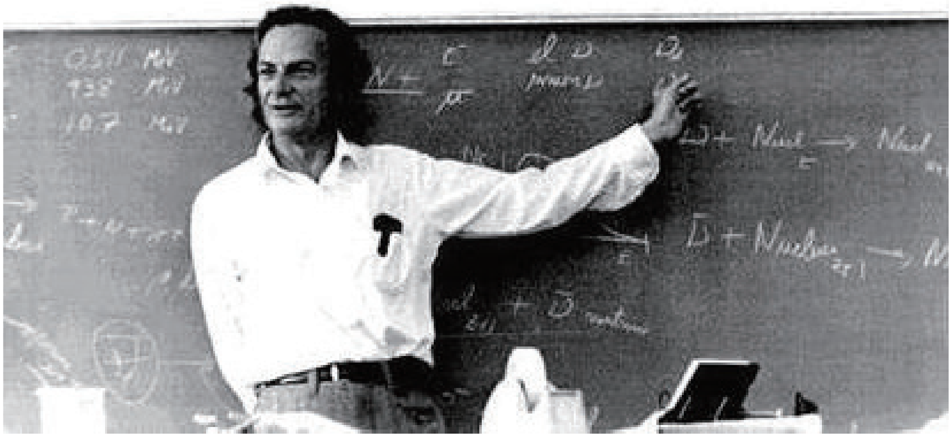
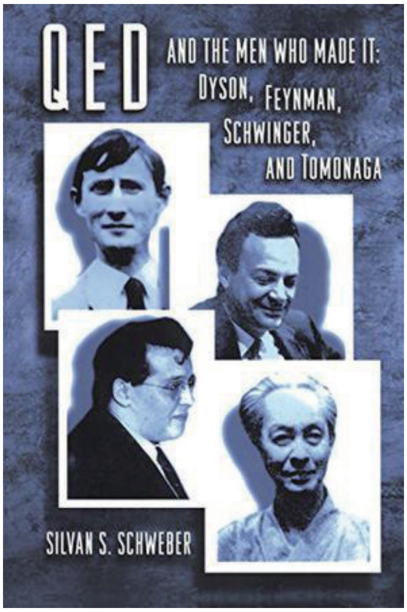
费曼用概率方法“巧证”费马定理 [1]

Luis Batalha / 文　欧阳顺湘 / 译



理查德 • 费曼（Richard Feynman）或许是 20 世纪最有天赋的物理学家。他以拥有强大的数学和物理直觉来解构复杂的概念并从第一原则来解决问题而知名。有数不清的逸闻趣事显示费曼的天才：在 MIT 念本科时 , 他用自己的方法求解看起来不可能处理的积分，在普林斯顿读研究生时独自推导薛定谔方程。我在阅读施韦伯（Silvan S. Schweber）的书《量子电动力学及创造它的人》（*QED and the Men who made it*）中有关费曼推导薛定谔方程的介绍时，见到书中提及费曼曾写有两页纸的有关费马大定理的稿件。费曼的稿件并没有出现在施韦伯的书中，但施韦伯对费曼的方法作了一些解释。我下面更详细地叙述。



《量子电动力学及其创造它的人》

[1] 原文 *Feynman on Fermat's Last Theorem* 来自 http://www.lbatalha.com/blog/feynman-on-fermats-last-theorem?from=timeline&isappinstalled=0，写作时间为 2016 年 6 月 30 日。

17 世纪，费马称若 n 为大于 2 的正整数，则方程 $x^n + y^n = z^n$ 无非平凡整数解，即 x, y 和 z 都不是 0 的解。这个声明通常被称为“费马大定理”或“费马最后定理”，方程 $x^n + y^n = z^n$ 被称为“费马方程”。

在长达三个半世纪的时间里，这个难题吸引了许许多多著名数学家的兴趣，其中包括欧拉，勒让德，狄利克雷，库默尔，以及近来的罗杰 • 希斯 - 布朗（D. R. Heath-Brown），格哈德 • 弗雷（G. Frey）和怀尔斯。怀尔斯最终解决了这个问题。

施韦伯没有提费曼稿件的写作日期。但费曼死于 1988 年，而安德鲁 • 怀尔斯是在 1995 年发表了他关于费马大定理的证明，所以当费曼写他的稿件时，费马大定理仍是数学中最有名的公开问题之一。费曼的稿件有趣之处在于费曼的方法纯粹是概率方法。

设 N 为大整数（后面我将解释我们为什么这样做），费曼一开始是计算一个数 N 为 n 次完全方的概率。为此，我们需要计算 $\sqrt[n]{N}$ 和 $\sqrt[n]{N+1}$ 之间的距离

$$d=\sqrt[n]{N+1}-\sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{N}\sqrt[n]{1+\frac{1}{N}}-\sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{N}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{N}}-1\right).$$

利用幂级数展开

$$(1+x)^k=1+kx+\tfrac{k(k-1)}{2}x^2+\cdots,\ -1<x<1,$$

令 $k=\frac{1}{n}$，$x=\frac{1}{N}$，可得

$$d=\sqrt[n]{N}\left(\left(1+\frac{1}{n}\frac{1}{N}+\frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)}{2}\frac{1}{N^2}+\cdots\right)-1\right).$$

这里可以使用幂级数是因为 $\frac{1}{N}<1$。取极限 $N\to\infty$ 并只保留其中最大的项，可得

$$d\approx\frac{\sqrt[n]{N}}{nN}.$$

因为 n>1，$\sqrt[n]{N}>1$，所以

$$n\sqrt[n]{N}\cdots\sqrt[n]{N}>1.$$

从而可得

$$d\approx\frac{\sqrt[n]{N}}{nN}=\frac{1}{n\underbrace{\sqrt[n]{N}\cdots\sqrt[n]{N}}_{n-1\text{次}}}<1.$$

费曼随后写道：“N 为完全 n 次方的概率是 $\frac{\sqrt[n]{N}}{nN}$。”他没有解释如何得到这个结论。下面是我猜的他的思考过程。若 N 是完全 n 次方 $N=z^n$，则在区间 $[\sqrt[n]{N},\sqrt[n]{N+1}]$ 中至少有一个整数 ($\sqrt[n]{N}=z$)。因为连续整数之间的距离为 1，$[\sqrt[n]{N},\sqrt[n]{N+1}]$ 含有整数的概率是 $\sqrt[n]{N}$ 和 $\sqrt[n]{N+1}$ 之间距离和两个整数组成区间长度之比 [2]：$\frac{d}{1}$。理解这一点的好方法是想象有一条直线，其中任意连续整数之间的距离是 1 米。如果有人丢下一个长为 d 米的尺子于这条线上，则这把尺子“击中”一个整数的概率是

[2] 原文表达的比是反的，这里做了修改。

$$\frac{d\text{米}}{1\text{米}}=d\approx\frac{\sqrt[n]{N}}{nN}.$$

在费马大定理的情形，$N = x^n + y^n$，因此 $x^n + y^n$ 为完全 n 次方的概率为

$$\frac{\sqrt[n]{x^n+y^n}}{n(x^n+y^n)}.$$

当然，这个概率是对特定的 x 和 y 而言的。因此，若我们要考虑任意的 $x^n + y^n$，计算全概率，我们要对所有的 $x>x_0$，$y>y_0$ 进行求和。费曼选择做积分而非求和。我想，费曼选择做积分而非求和是因为通常积分比求和更简单，而且最终结果没有多大影响。

费曼还假设 $x_0 = y_0$。他计算所得概率如下：

$$\int_{x_0}^{\infty}\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{n}(x^n+y^n)^{-1+\frac{1}{n}}dx\,dy=\frac{1}{nx_0^{n-3}}c_n,$$

其中[3]

$$c_n=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(u^n+v^n)^{-1+\frac{1}{n}}du\,dv.$$

为得到 c_n，费曼做了两次变量替换。首先令 $\theta=\frac{x-x_0}{x_0}$，$\phi=\frac{y-x_0}{x_0}$，作第一次变量代换：

$$\begin{aligned}&\int_{\theta(x_0)}^{\infty}\int_{\phi(x_0)}^{\infty}f(x(\theta,\phi),y(\theta,\phi))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)}\right|d\theta\,d\phi\\&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{n}x_0^{1-n}((\theta+1)^n+(\phi+1)^n)^{-1+\frac{1}{n}}x_0^2d\theta\,d\phi\\&=\frac{1}{nx_0^{n-3}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}((\theta+1)^n+(\phi+1)^n)^{-1+\frac{1}{n}}d\theta\,d\phi,\end{aligned}$$

其中

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)}\right|=\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\phi}-\frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial y}{\partial\theta}=x_0^2$$

是雅可比，而且用到

$$\theta(x_0)=\frac{x_0-x_0}{x_0}=0,\quad \phi(x_0)=\frac{x_0-x_0}{x_0}=0.$$

最后令 $u = \theta + 1$，$v = \phi + 1$，作第二次变量代换：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{nx_0^{n-3}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}((\theta+1)^n+(\phi+1)^n)^{-1+\frac{1}{n}}d\theta\,d\phi\\&=\frac{1}{nx_0^{n-3}}\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}(u^n+v^n)^{-1+\frac{1}{n}}du\,dv.\end{aligned}$$

[3] 这里的常数 c_n 的双重积分表达是费曼给出的，后文说明表达式中的积分下限都应为 1，而不是 0。