



这个世界可以由音乐的音符组成，也可以由数学的公式组成。

——（瑞/美）阿尔伯特·爱因斯坦

难道不可以把音乐描述为感觉的数学，而把数学描述为理智的音乐吗？

——（英）詹姆斯·西尔维斯特

在世界主要文明中，唯有德意志民族的起源不祥，他们确切的史料起始于公元前半个世纪罗马人的征讨。其时日耳曼各部落已在莱茵河以西定居，并已南达多瑙河地区。罗马人长驱直入，轻松地将他们赶往莱茵河东岸。即便到了16世纪，日耳曼人仍是一盘散沙，整个民族处于分裂和混乱之中。后来，由于普鲁士的崛起，日耳曼民族才变得强大起来。1871年，德意志联邦正式成立，并定都柏林。但是，南部最大的邦国奥地利和瑞士的大部分地区以及卢森堡仍在联邦之外。

与此同时，莱布尼兹的出现开启了近代德国的科学和哲学，他在文理两大领域所取得的伟大成就和巨大的影响力赋予大器晚成的德意志民族智力上的自信。自那以后，又接连诞生了康德、费希特、黑格尔、谢林、叔本华等大哲学家，德意志思想界可谓群星璀璨。而在科学方面，德意志的兴盛要略迟一些，不过在“数学王子”高斯、黎曼，尤其是哥廷根学派出现以后，世界数学中心也从法国转移到了德国，从巴黎转移到了哥廷根。

说起来，数学和哲学分别是自然科学和人文科学中最抽象的两门分支学科，这可能与德国人有着较强的思维能力有关，他们生活在欧洲北部内陆，在没有供暖设备的年代，一年中有许多时光待在自己的屋子里，养成了沉思默想的习惯。而在艺术领域，最抽象的无疑要数音乐了，这也是德意志人擅长的一门技艺，从“音乐之父”巴赫以降，包括“维也纳古典乐派”的三大作曲家——海顿、莫扎特、贝多芬在内，均是德意志人。

有趣的是，本文两位主人翁——高斯和巴赫的出生和成长，恰好围绕着德



哈茨山风景画（1852）

国中部同一座低矮的名山——哈茨山。而在他们之后，德意志民族分别产生了令世人艳羡的哥廷根数学学派和维也纳古典乐派。

## 1 大学城哥廷根

哥廷根又译格廷根，是德国下萨克森州的大学城。哥廷根位于哈茨山西麓，小巧的莱讷河（Leine）流经此城。这条河流与欧洲鼎鼎大名的莱茵河（Rhine）发音是有些像，可是搜索“哥廷根”说是莱茵河的支流莱讷河流经此城就有些荒唐了。事实上，莱讷河流过哥廷根和汉诺威之后，向北注入阿勒尔河，阿勒尔河再向西北，在德国第二大港不莱梅东南注入威悉河。因此，莱讷河是威悉河支流的支流，却与莱茵河毫不相干。威悉河与莱茵河一样，是德国运输的大动脉，它们各自流入大西洋，前者入海处在德国境内，而后者是一条发源于瑞士的国际河流，入海处在荷兰境内。

哈茨山（Harz）是德国中部名山，分开了易北河和威悉河，最高峰布罗肯峰海拔 1142 米，是德国北部最高峰，仅次于南部的阿尔卑斯山。哥廷根东郊往哈茨山的方向有一片很大的草地叫席勒草坪，是大学城里的人周末郊游踏青



哥廷根的“肚脐”



哥廷根的标志——牧鹅少女塑像

的好去处，只是我不知道他与剧作家席勒有何关系？如果以校友诗人海涅或者另一位大诗人歌德的名字命名更合适，后者曾经作为换生从斯特拉斯堡来哥廷根度过一段时间。在18世纪中叶，哥廷根还有过名为“林苑诗派”（1740-1780）的文艺团体，林苑是哈茨山麓的一片森林，可见这座山给哥廷根人带来无数灵感。

虽然哈茨山的长约90公里，宽约30公里，方圆面积只有在中国华北平原拔地而起的泰山的四分之一，但却很有灵气和人文气息。西南方的大学城哥廷根无疑是其中的佼佼者，它为德国培养了不计其数的天才人物和栋梁之材。安徒生对哈茨山一见倾心，海涅写过《哈茨山游记》，歌德也写过《东游哈茨山》，他的名作《浮士德》更是描绘了哈茨山一年一度的魔鬼狂欢节。书中写道：四月的最后一个夜晚，各地的魔怪和女巫汇集此山，他们登上布罗肯峰，燃起盛大的焰火。在梅菲斯特的引领下，浮士德来到哈茨山，得以领略这一魔怪的盛会。今天，那里仍有女巫小径、女巫之城和女巫跳舞的广场等景点。

哈茨山的南边图林根州的小城爱森纳赫是音乐家、有着“音乐之父”美誉的约翰·萨巴斯蒂安·巴赫的诞生地。这座城市的人民酷爱音乐，据说古城门上刻着“音乐常在我们的市镇中照耀”的字样，中世纪时吟歌者经常手执竖琴，在此吟唱诗歌并举行歌唱比赛，瓦格纳据此写下了名歌剧《唐·豪塞》。而哈茨山的北边，与爱森纳赫地理上对称的不伦瑞克，则是“数学王子”高斯的出生地。他们两人刚好是本文要介绍的中心人物。一个被赞为“音乐家中的数学家”，另一个的数学发现和理论有着音乐之美。

哥廷根最早见诸史册是在公元 953 年,1210 年建市。13 世纪逐渐形成的“汉萨同盟”曾在 14 世纪达到鼎盛时期,哥廷根是它的一个成员,一度十分繁荣。这个同盟以德意志北部为基地,先后有 160 多座欧洲城市加入其中,从伦敦到俄罗斯的诺夫哥罗德它都建立了商站,拥有武器和金库,几乎垄断了波罗的海地区的所有贸易。15 世纪,汉萨同盟开始衰落,到 1669 年最后解体。今天,德国最大、世界第四大的航空公司仍叫 Lufthansa,德文里的本意是“空中的汉萨”。

哥廷根虽说如今只是萨克森州的一个区,但在历史上却是汉诺威王国的组成部分,后者是德意志民族仅次于奥地利、普鲁士和巴伐利亚的第四大邦国。17 世纪末,汉诺威成为神圣罗马帝国的选侯国,其国王(诸侯)奥古斯特一世成为第九个也是最后一个有权选举罗马皇帝的选帝侯。汉诺威也曾长期与北海对岸的英国联姻,并因对方无子嗣,连续五位国王移驾伦敦,兼任英国国王,包括乔治二世,正是他(受牛津和剑桥启发)下令创建了哥廷根大学,那是在 1734 年。可以说,哥廷根大学是“一夫一妻制”催生的,原本这项制度是王权和教权博弈的产物。

起初,哥廷根大学以国王名字命名,叫乔治·奥古斯塔大学。建校 40 年以后,哥廷根学者云集,成了德意志学术、科学和文化的中心。而在高斯担任数学教授和天文台台长以后,哥廷根变成全世界数学家心目中的“麦加”。量子力学之父、物理学家普朗克(Max Planck,1858-1947)也曾长期执教哥廷根,直到逝世。他在德国科学界德高望重,被选为威廉皇帝协会会长。战后,为了纪念普朗克,威廉皇帝协会改名为马克斯·普朗克科学促进协会,中文简称“马普协会”,相当于其他国家的国家科学院,下辖 50 多个研究所。

## 2 数学王子



高斯肖像(1840)

1777 年 4 月 30 日,卡尔·弗里德里希·高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)出生在下萨克森州不伦瑞克市郊外,如今那里已是市区。他的家庭世代务农,父亲是位普通劳动者,做过石匠、纤夫和花农。与牛顿一样,高斯家族里没有出过一个出类拔萃的人。高斯的母亲 34 岁出嫁,是她丈夫的第二个妻子,做过女仆,没受过教育。她甚至把独生儿子的生日都给忘了,只记得是礼拜三,在耶稣升天节(复活节 40 天以后的第一个星期四)前八天,高斯的生日是他后来自个儿算出来的。

与牛顿一样,高斯也有一个懂事

理的舅舅，他是个技艺娴熟的纺织工人，能织出最好的锦缎。他最早认识到外甥的优异天赋，高斯的母亲也因此对儿子抱有很大的期望。高斯两岁时，便发现了父亲账簿上的一处差错。九岁那年的一个故事尽人皆知，小学老师为了让班上的孩子有事做，让他们从1加到100，高斯几乎立刻得到了正确答案：5050，却没有验算过程，因为他在头脑里把头和尾的数依次组对相加，得到50对和为101的数。高斯在晚年甚至宣称，他在学会说话之前，就学会计算了，还说他问了大人如何发音，就能自己学着看书了。

高斯的早熟引起了不伦瑞克公爵费迪南的注意，这位公爵的名字也叫卡尔，高斯14岁时第一次见到了他，高斯的朴实和羞怯赢得了公爵的心，他决定资助这个孩子。第二年年年初，高斯进了卡洛琳学院（现不伦瑞克技术大学），三年后，18岁的高斯进了哥廷根大学，开始了他极其辉煌的一生。就在上大学的那年，高斯发明了最小二乘法，这是一种简便的计算法，可以快速求得未知的数据，使它们与实际数值之间误差的平方和最小。高斯后来把这一方法用于大地测量学，并帮助找到人们普遍关心的第一颗小行星，后一项工作使得高斯的声望超出学术圈，成为公众人物。这项工作是高斯对观察误差理论感兴趣的开始，如今，高斯正态分布和它钟形的曲线是被广泛应用的统计学的标志性成果。

1796年3月30日，当高斯差一个月满19岁的时候，他对正多边形的欧几里得作图理论（只用圆规和直尺）作出了惊人的贡献，发现了它与费尔马素数之间的秘密关系。特别地，他给出了作正17边形的方法，从而解决了有着两千多年历史的数学悬案。仅仅九天以后，高斯便发展了同余理论，首次证明了二次互反律，即对于任何不同的奇素数 $p$ 和 $q$ ，均有

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

此处 $(-)$ 是勒让德符号，这个具有对称之美的计算公式被高斯视为“算术的宝石”，这样一来，就彻底解决了二次同余式的可解性判断问题。一个月以后，高斯给出了被后人称为素数定理的猜测，设不超过 $x$ 的素数个数为 $\pi(x)$ ，则它的近似值是

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

这个猜想直到100年以后才被一位法国数学家和一位比利时数学家独立证明，轰动了世界，并被誉为“19世纪的数学成就”，正如费尔马大定理的证明被视作“20世纪的数学成就”。又过了50年，一位挪威数学家和一位匈牙利数学家用初等方法各自给出新的证明，他们分别获得了菲尔兹奖和沃尔夫奖。

1796年是高斯的奇迹年，从发现正17边形的作图方法那天开始，高斯用极其简单的方式记日记。那年7月10日，他的日记只有一行：

$$\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta \quad \text{Eureka!}$$