



雨果·迪米尼 - 科潘 与菲尔兹奖

肖边卫

Hugo Duminil-Copin

编者按：本刊编辑部整理了此文，旨在向读者介绍 2022 年菲尔兹奖得主雨果·迪米尼 - 科潘（Hugo Duminil-Copin）以及他的学术贡献。本文综合了三篇译自《量子杂志》的文章：“数学在于运动”¹“物理学中的相变魔法已被数学证明”²以及“伊辛模型百年小史”³。数学部分的内容主要来自北京大学的丁剑教授、清华大学的姜建平教授和湘潭大学的向开南教授。本文的图片来自网络。在此一并致谢。

2022 年的国际数学家大会在芬兰首都赫尔辛基召开，迪米尼 - 科潘在这次大会上被授予了菲尔兹奖。菲尔兹奖每四年颁发一次，只颁发给 40 岁以下的数学家，被誉为数学界的最高荣誉之一。迪米尼 - 科潘因为改变了统计物理学中与相变有关的数学理论而获此殊荣。他的工作开辟了几个新的研究方向。

¹ Jordana Cepelewicz, For His Sporting Approach to Math, a Fields Meda, 20220705, Quanta Magazine, zllrr 小乐译.

² Alison Whitten, Mathematicians Prove Symmetry of Phase Transitions, 20210708, Quanta Magazine.

³ Charlie Wood, The Cartoon Picture of Magnets That Has Transformed Science, 20200624, Quanta Magazine, 刘培源, 刘华林, 梁金译.



迪米尼 - 科潘的工作聚焦统计物理学的数学分支。他利用概率论的思想来研究各种网络模型的临界行为，例如伊辛模型、自回避行走模型。这些数学对象通过随机轨迹、集合或图形对一些物理现象进行重构，从而描述这些物理现象，例如磁化、聚合物、材料孔隙率等。

概率论曾经并不属于菲尔兹奖所青睐的“主流数学”。这种观念的转变，要归功于一位英年早逝的数学家施拉姆（Oded Schramm），他 1998 年发现的施拉姆 - 勒夫纳演变（Schramm-Loewner evolution, SLE, 相关论文发表于 1999 年），变革了概率论和统计物理、共形场论。SLE 有一个正参数 κ ，不同的 κ 对应不同的随机过程。比如 $\kappa = 0$ 对应勒夫纳演化， $\kappa = 3$ 对应伊辛模型，也是迪米尼 - 科潘研究的一个重要模型。施拉姆在一系列工作中，建立了 SLE 丰富的数学理论。比如他和合作者劳勒（Greg Lawler, 沃尔夫奖得主）和维尔



施拉姆（1961–2008）、劳勒（1955–）、维尔纳（1968–）

纳 (Wendelin Werner, 菲尔兹奖得主) 在 2000 年证明, 二维布朗运动的边界具有分形维数 $4/3$, 这是分形几何的创始人曼德勃罗在 1982 年提出的一个猜想。

和数学中的其他传统学科, 如数论、偏微分方程、微分几何等相比, 概率论发展得比较晚, 其公理化基础是二十世纪三十年代才由柯尔莫哥洛夫建立起来的。因此概率论在数学、物理、化学、生物和信息科学等领域的重要性在近三四十年间才得以逐渐显现。以菲尔兹奖为例, 2006 年, 维尔纳因为 SLE 等方面的工作成为获得菲尔兹奖的首位概率论学者; 2010 年, 斯米尔诺夫 (Stanislav Smirnov) 因为渗流和伊辛模型共形不变性工作获得菲尔兹奖; 2014 年, 海雷尔 (Martin Hairer) 因为具有高度奇异噪声的随机偏微分方程等方面的工作获得菲尔兹奖; 然后就是本文的主角迪米尼 - 科潘获得了 2022 年的菲尔兹奖。

成长历程

Hugo Duminil-Copin

迪米尼 - 科潘曾就读于路易大帝中学、巴黎第十一大学、巴黎高等师范学院等校, 2008 年赴瑞士日内瓦大学攻读博士学位, 师从菲尔兹奖得主斯坦尼斯拉夫·斯米尔诺夫。毕业后于 2013 年任日内瓦大学助理教授, 后升任教授。2016 年赴法国高等科学研究所任教。

迪米尼 - 科潘在距离巴黎一小时火车车程的郊区长大, 他把时间花在弹吉他、和朋友一起旅游、和父母和弟弟一起露营、远足和越野滑雪。他是一个运动型的人。他徒步旅行、骑自行车、游泳和爬山, 而且经常在这些短途旅行中获得阵阵数学灵感。

运动让他精力充沛。他的父亲是一名中学体育老师, 他的母亲在成为小学老师之前是一名舞蹈演员。中学时, 他的数学很好, 但不够出类拔萃, 难以让其他人注意到。他打手球 (一项在欧洲很受欢迎的运动), 在考虑他将参加哪所专业高中时他说: “我在打手球和实际做更多科学研究之间犹豫不决。当时,



我认为我的运动成绩并不比数学差。”

但最终，迪米尼 - 科潘决定去巴黎的一所注重数学和科学的高中。他回忆起他从一名最差的学生开始，逐渐上升到班级的前列。第二年他被安排进一个强化班，在那里他的成绩垫底，但很快他再一次名列前茅。尽管如此，当他参加国际数学奥林匹克的资格考试时⁴，他表现欠佳。“我没有这种惊人的解决问题的能力，”他说。相反，对他来说，这促使他去努力和锻炼创造性。

他说：“我从不气馁，总是很乐观，至少我会享受正在做的事情。”

这种态度也帮助了他在高中刚毕业时，他就读了“预备班”，这是一个为期两年的强化课程，旨在让学生为参加专业大学的全国入学考试做好准备。大多数人的压力都很大，竞争也很激烈，但心态很好的迪米尼 - 科潘当时很轻松。

所有这些加起来就是“一个非常正常的童年”，迪米尼 - 科潘说，“我认为这对接下来的事情非常重要。许多人没有接受太多训练，因为事实上，研究对大脑来说是一件非常困难的事情。你需要非常平衡才能在数学上取得成功。至少，我是这么觉得的。”

迪米尼 - 科潘最终通过了这些入学考试，进入了法国顶尖大学之一的巴黎高等师范学院。

研究生时期的重要成果

Hugo Duminil-Copin

迪米尼 - 科潘的研究兴趣跨越了数学和物理学的界限。他一开始就对渗流理论（percolation theory）产生了兴趣。渗流理论是数学和统计物理领域中研究随机图上簇的性质的一套理论。举例来说，假设有一多孔材料，求问液体能否从顶端贯穿该材料直至到达底部。渗流理论将此抽象成以下数学问题：建立一有 $n \times n \times n$ 个顶点的三维网格模型，相邻顶点的边有 p 的概率是连接的，或者说有 $(1-p)$ 的概率是不连接的，每条边连接与否相互独立。渗流理论的基本问题是，当 n 很大以至于体系可以近似为无限网格时，求问至少存在一条贯穿整个网格的路径（称为渗流）对应的 p 的范围。这一 p 的下界， p_c ，称为渗流阈值。模型在渗流阈值附近的行为可视作一种相变，模型在渗流阈值的性质可以用一系列临界指数描述。这些模型涉及在随机网络中形成连接的集群，也可以代表疾病的传播、谣言的传播或森林火灾的进展。

从他还是研究生的时候起，迪米尼 - 科潘就对一些复杂的模型做了深入的研究，并在此过程中发展了一种更普遍的渗流理论。

数学家想要了解系统在低于、处于和高于该临界点时的表现。但直到2008年左右，渗流理论主要局限于确定伯努利渗流模型的细节。

作为日内瓦大学的博士生，迪米尼 - 科潘花了几个月试图解决一个关于渗流的问题，但每次都是无功而返。但是，当他在思考这个问题时，他不习惯于

⁴ 在法国这是一项针对高中生的数学竞赛，许多法国的菲尔兹奖得主都有佳绩。

在办公桌前冥思苦想，而是去散步、去公园或者花园逛逛，或者只是看电视，以这样的方式找灵感。

迪米尼 - 科潘在接受采访的时候回忆说：“有一天，我在海里游泳，在大约 10 分钟的游泳时间里，我完全证明了其中一个问题。”

具体来说，迪米尼 - 科潘在考虑一个六边形格子，一种类似于蜂窝的边和顶点的图形。他们想计算自回避行走 (self-avoiding walk) 的路径数——同一个顶点从不访问两次的边的路径。诺贝尔奖得主保罗·弗洛里 (Paul Flory)⁵ 和皮埃尔 - 吉勒·德热纳 (Pierre-Gilles de Gennes)⁶ 对此模型都做出了重要的贡献，尽管从数学角度他们的研究并不严格。迪米尼 - 科潘在自回避游走方向也做出了一些非常杰出的工作，其中最著名的就是他和导师斯米尔诺夫合作证明了六边形格点上步长为 n 的自回避游走大概有 $[\sqrt{2+\sqrt{2}}]^n$ 条，从而证明了尼恩惠斯 (Bernard Nienhuis) 在 1982 年提出的著名猜想⁷：六边形格点的连通常数是 $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 。

科潘 - 斯米尔诺夫的证明非常漂亮、简短且容易理解。证明的思路是构造一个仲费米子观测量，并证明该观测量沿着离散等高线 (discrete contours)



⁵ P. J. Flory. Principles of polymer chemistry. Cornell University Press, 1953.

⁶ P.-G. de Gennes and P.-G. Gennes. Scaling concepts in polymer physics. Cornell University Press, 1979.

⁷ B. Nienhuis (1982), Exact critical point and critical exponents of $O(n)$ models in two dimensions. Phys. Rev. Lett., 49:1062–1065.