最佳数学扑克游戏

万精油

为了便于描述，把上期的题目再写一遍。

上期题目：

扑克传信：一副牌 52 张，没有大小王。一个观众从中随机抽出五张。你从其中选出一张藏起来，把剩下的四张放在桌上，让你的朋友根据桌上这四张牌的面值及顺序来推出藏起来的那张牌是什么。也就是说请你和你的朋友设计一套信号系统，使得不管抽出的是哪五张牌，你都可以用其中的四张牌来表示另一张牌。注意，你的朋友可以利用的信息只能是四张牌的面值与顺序。诸如把某张牌翻过来或是放斜一点，高一点，角上折一下之类的旁门左道都不能用。

上面的题做出来以后，请再考虑一下更进一步的情况——不是一副牌，而是一副麻将。筒条万各 36 张，中发白各四张，再加上春夏秋冬，总共 124 张牌。能不能设计一套信号系统，使得不管抽出的是哪五张牌，你都可以用其中的四张牌来表示另一张牌？注：我们假设每张牌都是不同的。比如四个八万，应该可以像春夏秋冬一样区分。八万春，八万夏，八万秋，八万冬，诸如此类。也就是说我们有 124 张不同的牌。

明眼的读者可以看出，这个题目其实就是一个编码解码问题。这个栏目以前有一期文章叫“有错必究”，那里面我们曾经介绍过汉明码（Hamming Code），它就是一个著名的编码解码方法。编码解码在现代生活中可以说是无所不在。广义说起来，我们看的电视都可以划到这里面来。更直接的例子就是大家现在看的这篇文章所用的国标码。大家知道，计算机是西方人搞起来的。在计算机上传递信息自然用他们的一套字母与符号。作为拼音文字，8 个比特 256 个码对他们来说就绰绰有余了。但要用这些码来表示中文就远远不够了。于是人们自然想到了双码。也就是用两个码来表示一个汉字。双码等于一维变两维，所能表示的数量就是原来的平方。这个双码如何表示，如何与原来的单码区分，搞中文码的先驱们如何从 ZW，HZ，GB 一步一步地走过来，里面的故事很有趣。我自己从前写过一个围棋软件，里面写了个中文编辑器，好让用户对棋局做评语。为了写那个中文编辑器，对中文编码有些了解。但说来话长，我们暂且不表。现在时兴的统一码又是在双码的基础上更进一步，包含了世界上主要的语言与符号，据说字库有十多万字。有兴趣的读者可以到网上去看一看，比如 http://zh.wikipedia.org/wiki/Unicode

现在回到我们的题目。从一副有 52 张的牌中随机抽出五张，怎样用其中的四张牌来表示第五张牌？

首先注意到我们可以给所有的牌定一个大小顺序。比如黑桃 A, 2, …, K, 接下去是红桃 A, 2, …, K，再接下去是方块，梅花（按桥牌的顺序）。这样一来这 52 张牌就相当于从 1 到 52 个数。 4 张牌横放在桌上，按照大小顺序不同可以有 4 的阶乘即 24 种放法。我们可以用这 24 种放法来表示 24 个不同的数（也就是 24 张不同的牌）。但是，从 52 张牌中抽出 4 张以后，还剩 48 张。24 只是它的一半，远远不够。怎样解决另一半呢？

注意到我们原题目说你可以从抽出来的五张牌中选择一张藏起来。选哪一张牌就很有讲究了。四的阶乘等于 24，没有什么文章好做，这另一半就得靠这选牌来解决。这个问题有不只一种解法，也就是说有多种方法来表示第五张牌。我们这里选择一个简单清楚的办法来讲。52 张牌有四种花色。根据抽屉原理，五张牌中一定有两张以上的牌是属于同一花色，比如有两张黑桃。我们就把其中一张黑桃藏起来，把另一张黑桃放在桌面第一张。朋友看见第一张是黑桃，就知道藏的那张是黑桃。这一下把搜索空间缩小到四分之一。但这还不够，因为除掉一张牌以后，我们只剩下三张牌可以用。而三张牌只能有 6 种放法（3 的阶乘）。除了放在桌面的黑桃以外，还有 12 张黑桃，6 种放法只能表示出其中的一半。我们还需要再动脑筋来想怎样解决另外一半。与前面相同，3 的阶乘等于 6，没有什么文章好做。只好从选择的藏牌中来找出路。我们前面说把两张黑桃中的一张藏起来，藏哪张呢？用抽屉原理我们已经去除了四分之三的牌。现在我们要从这两张牌的选择中来去掉另一半牌。

把所有的黑桃按顺时针方向摆成一圆环（想象时钟上有十三点，它们是 A, 2,…, K）。这是一个有十三节的圆环。从这个圆环中任取两张，这圆环被分为两段。因为总长度为十三，两段中必有一段长度小于或等于六。我们选择短的那一段的结尾那张牌藏起来，把另一张牌放在桌面第一张。这一张牌不但告诉我们的朋友所藏那张牌的花色，而且还告诉他我们的起始点。因为所藏的牌离这第一张牌不超过六，我们可以用三张牌的顺序表示出来。至于三张牌的顺序如何表示 1, 2, 3, 4, 5, 6 则完全由你与你的朋友决定。最简单的办法是按照自然数的大小决定。我们前面已经说过，可以为 52 张牌定一个顺序。这样一来，随便哪三张牌都有一个大小顺序。我们不妨把它们叫做 1, 2, 3。于是，这三张牌可以有六种组合，按照自然数大小，这六种组合可以排成：123, 132, 213, 231,

312, 321。我们可以用它们来表示 1, 2, 3, 4, 5, 6。

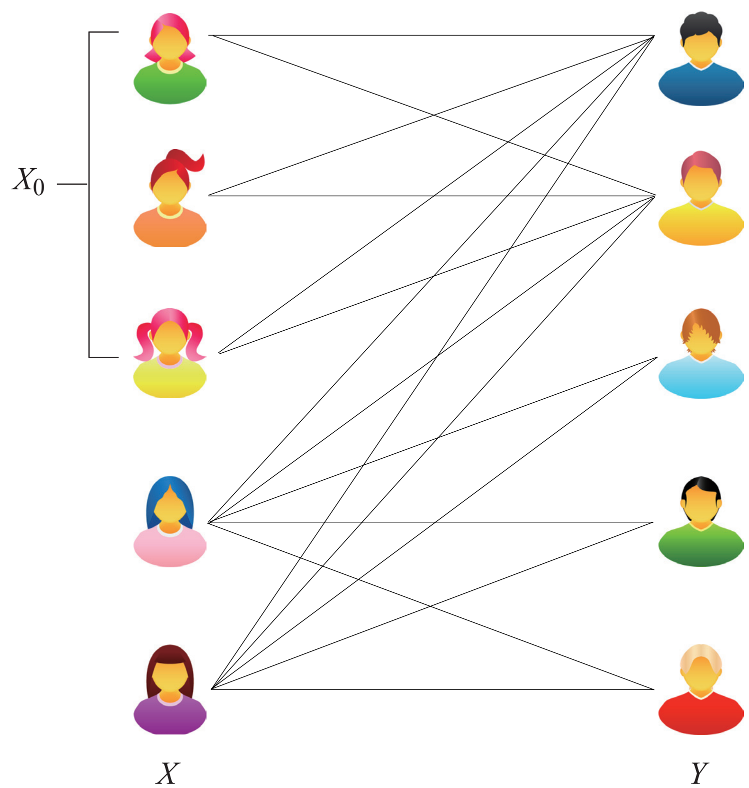
现在我们给一个例子：如果我们抽到的五张牌是：♠3, ♥7, ♦2, ♦J, ♣K, 因为方块有两张，所以我们决定藏方块。在方块 2 与方块 J 中，2 离 J 按顺时针方向比较远，距离为九。而 J 离 2 比较近（中间有 Q, K, A, 2），距离为四。于是我们要在桌面上用剩下的三张牌表示出四来。剩下的三张牌按大小顺序是♠3, ♥7, ♣K。按照我们上面的顺序，要摆出四，就是要摆出 231。于是，我们把方块 2 藏起来，把剩下的四张牌摆成：♦J, ♥7, ♣K, ♠3。

你的朋友看见第一张是方块 J，就知道藏起来的那张牌是方块。看见剩下的三张牌摆的是第四个顺序，就知道藏的那张牌离 J 的距离为四。于是一个个数过去，Q, K, A, 2。就推出藏起来的那张牌是方块 2。

这个趣味题可以用来表演。一般人在短时间内是不会看出其中的名堂的。为避免用高矮、正斜之类的手段做假，可以由别人来放，只不过必须按你规定的顺序。我在两百多人的聚会上玩过两次，效果很不错。

这个题目做出来以后，最自然的想法就是：如果牌张数再多一点会有什么结果？当然，不管用什么手段，几张牌能表示的牌张数总有个上限。这上限是多少？我们就来算一算。我们不只是考虑 5 张牌的问题，而是考虑更一般的情况，M 张牌能表示的牌的数目上限是多少。

假设总共有 N 张牌，抽 M 张牌。选一张藏起来，剩 $M-1$ 张。N 张牌中的 $M-1$ 张牌总共能表示 $N\times(N-1)\times\cdots\times(N-M+2)$ 个不同的信息。从 N 张牌中抽 M 张牌，



霍尔婚姻定理

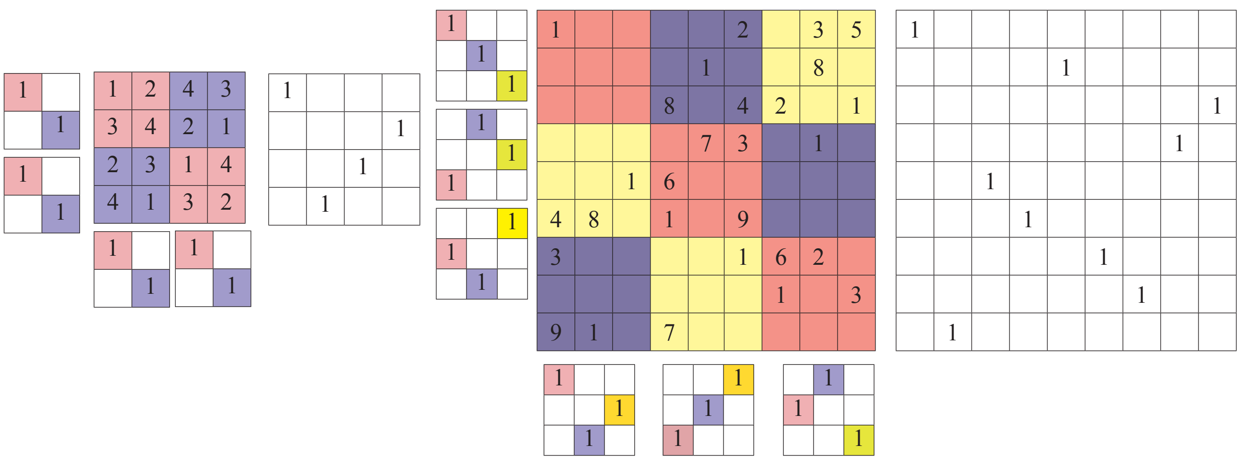
总共有有 $C(N, M)$ 种抽法。要想这个游戏能成功，也就是说唯一确定另一张牌，N 张牌中的 $M-1$ 张牌总共能表示的不同信息数必须大于等于 $C(N, M)$。也就是说 $C(N, M) \leq N\times(N-1)\times\cdots\times(N-M+2)$。推算一下，我们有

$$N \leq M!+M-1$$

对于 $M=5$ 的情况，我们最多可以有 124 张牌，这就是我们原题的推广题的情况。

接下来的问题是，当 $N=M!+M-1$ 时，$M-1$ 张牌能够表现的状况数正好等于 N 张里抽 M 张的组合数，数量是够了，但是不是就存在那么一个 1−1 对应使得我们任意抽 M 张牌都可以用其中 $M-1$ 张表示出另外一张呢？奇妙的是，数学上恰好有几个定理组合起来说这个映射是存在的。

如果我们构造一个巨大的矩阵，它的行是 N 张牌里抽 M 张的不同组合，它的列是 $M-1$ 张牌所能表示的所有信息。如果一个位置的行列有公共牌，其所对应的位置元素就是 1，否则就是零。对于这样一个每行每列的和都相等的矩阵，伯克霍夫 - 冯 • 诺依曼定理（Birkhoff-von Neumann theorem）说置换矩阵张成的凸集正好是所有双随机矩阵的集合。再结合霍尔婚姻定理（Hall's marriage theorem），我们可以在这些行列之间建立 1−1 对应。正好可以用来做我们所要找的传递信息策略。我们这里只是勾画了一下存在性的证明的大致思路，具体推导可以留给有兴趣的读者作家庭作业。



伯克霍夫 - 冯 • 诺依曼定理

但是，虽说这个 1 −1 对应也可以算是构造性的证明，但真正要构造这个 1 −1 对应就很不实际，矩阵太大（有 2 亿多行和列），不可能记住。有没有更好的、简单实用可记住甚至表演的办法呢？对这个东西感兴趣的人很多，比如埃尔温 • 伯利坎普（Elwyn Berlekamp）这样的数学家里的游戏高手，他们都独立找到了一个切实可行的办法。下面我们就来描述一下。

为简明起见，我们用 $M=5$ 做例子，其它情况完全可以类推。

124 张牌去掉 4 张还剩 120 张，正好是 5 的阶乘。但 4 张牌只能表示 4 的阶乘也就是 24 种情况，差 5 倍。要去掉这个 5 倍，最好的办法就是除以 5。120 张牌可以用 0 到 119 来表示。0 到 119 的数字都可以写成 $5\times k+d$ 的形式。k 从 0 到 23，正好是 4 张牌可以表示的数量。如果我们能够确定余数 d，我们的问题就解决了。这个 d 的决定

就是靠选择哪张牌被藏起来。具体做法如下：

假设抽出的 5 张牌是 p_0，p_1，p_2，p_3 和 p_4。算出 $\mathrm{mod}(p_0+p_1+p_2+p_3+p_4, 5)=i$, 那么我们就选第 i 张牌藏起来。

你的朋友看见桌上的 4 张牌，把它们加起来除以 5 余 q，他就知道你藏的那张牌应该是除以 5 余 $-q+i$。奇妙的是，如果我们去掉桌面上的 4 张牌，把剩下的牌重新编号（0 到 119），那个 i 就正好消失了。所以，你藏的那张牌在新编号下除以 5 正好余 $-q$。这一共有 24 个选择（就是前面提到的 k）。4 张牌可以摆出 24 个不同顺序，所以这 24 个选择正好可以由 4 张牌的顺序决定。大功告成！

这个方法简单，切实可行。如果要表演也应该没有问题。只是不好找 124 张不同的牌。也许可以用 3 副不同颜色的牌来做。我自己没有表演过，但是我能想象到，如果要做的话，必须要小心的事就是去掉桌面 4 张牌以后的重新排序。

这个游戏被公认为是最有趣的含数学原理的扑克牌游戏。

本期趣味题目：

高不可攀：假设下半平面（X 轴以及 X 轴以下）的所有整数格点上都布满了棋子。你可以像跳棋一样移动棋子。也就是说一个棋子可以用另一个棋子做桥跳到相邻的空格上。与跳棋不同的是，跳过以后，被当作桥的棋子要从平面上去掉（货真价实的过河拆桥）。第一步可以把坐标 $(0,-1)$ 的棋子以坐标为 $(0,0)$ 的棋子作桥跳到坐标为 $(0,1)$ 的点上，然后去掉 $(0,0)$ 上的棋子。第二步，可以把坐标为 $(2,0)$ 点棋子以坐标为 $(1,0)$ 点与坐标为 $(0,1)$ 点作桥，跳到 $(0,2)$ 点上。如果安排得好，我们可继续往前跳，跳到 Y 坐标为 3，为 4 的点上。我们的问题是，请你用数学方法证明，无论如何跳，哪怕用尽下半平面所有的棋子，都不可能有棋子能跳到 Y 坐标为 5 的点。

这个题可以推广到 3 维空间，甚至 N 维空间。假设下半空间的所有整数格点上都布满了棋子，请证明无论如何都不能有棋子跳到高度坐标为 $2N+1$ 的点。