



计算所三室上世纪六十年代初合影。二排左起第十二人为张克明，左十三为冯康。

# 冯康

## ——一位杰出数学家的故事（连载二）

汤涛 姚楠 / 文

那是一个英雄辈出的年代，  
也是一段激情燃烧的岁月，  
锋芒初现，再到带领团队奋力攻坚，  
他开始为中国的计算数学踏开先河，  
也开始为计算数学的未来运筹帷幄，  
他习惯昼夜奋战，  
也沉醉热火朝天，  
他用澎湃的心赋予了时代最美的颜色……

### 第三章 火红年代

1945年抗战胜利后，一直在国外负责采购工作的大哥冯焕回到了重庆，冯康一家人终于再次聚到了一起。

这时的冯康虽然可以重新站立，但由于卧床久了，身体还处于虚弱的恢复期。尽管家人团聚让冯康的内心充满了欢喜，然而欢喜之外也平添了些许

不安。敏感而细心的冯康察觉到由于家中人口增多，经济负担也随之加重。他并不想因为自己身体还没有完全恢复，需要照顾，而继续成为家人的负担。于是，他开始尝试寻找一些工作。他觉得自己必须工作。

1945年9月，经过中央大学介绍，冯康被在抗战中西迁至重庆北碚的复旦大学数理系聘为助教。1946年8月，随着西迁的众多高校纷纷迁回原址，冯康也随复旦大学迁回上海。不久后，他又经人推荐到北京担任清华大学物理系助教。一年半后，冯康转入清华大学数学系担任助教。

由此，冯康开始走上了深入钻研数学之路。



### 恩师喜相逢

“西山苍苍，东海茫茫”。1947年初，冯康来到了中国著名的高等学府——清华大学任教。美丽优雅的清华园既是冯康神往已久的地方，也是冯康成就数学家梦想开始的地方。

在清华浓郁的学术氛围中，冯康结束了孤身一人的自学阶段。他不断地参加数学讨论班，拓展视野，更有幸师从陈省身、华罗庚等中国当代知名数学家，近距离聆听名家的亲身教诲。

1947年到1948年，陈省身先生担任当时在南京的中央研究院数学研究所

长期间，曾经去北京清华大学主持过数学讲习班。热爱数学的冯康慕名参加了陈先生的讲习班。后来，中央研究院数学研究所迁往台湾，陈省身就转到美国芝加哥大学任教。

1948年12月，地处北京西郊的清华大学已经先期解放。不久，整个北京城也和平解放。北京到处是花团锦簇与歌声笑语，而此时的冯康却静静地沉浸在数学研究的王国里。这是他期待已久的祥和与稳定，这种气氛可以让他全心地投入到数学领域的研究中。

冯康开始从基础数学的研究做起，他最初研究工作集中在殆周期拓扑群理论。他以其坚实的基础理论知识和良好的研究素养解决了极小殆周期群的表征问题，初步展露他的数学才能。

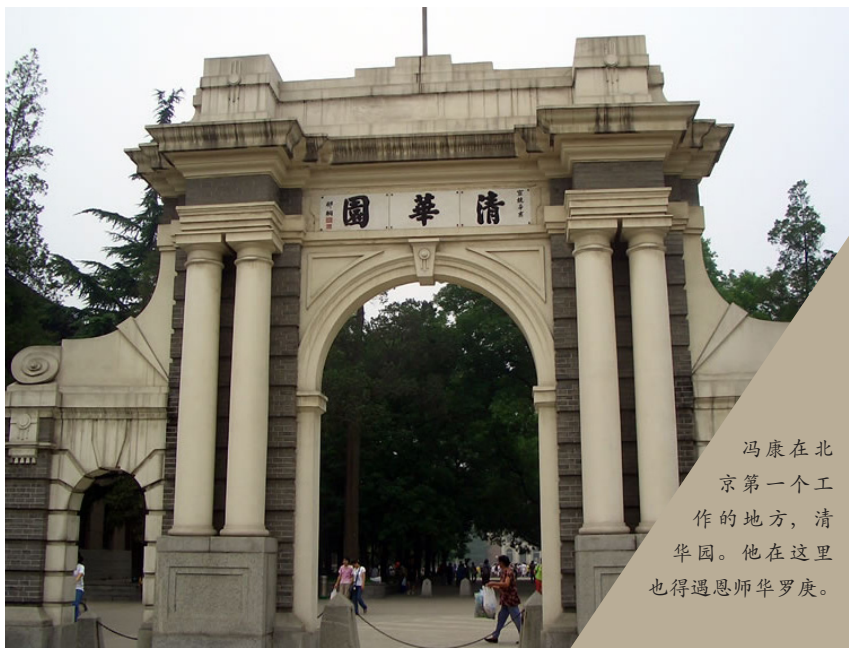
那段时间里，潜心研究拓扑群理论的冯康对外面世界似乎并没有太多的关心，然而1950年3月16日《人民日报》一篇“数学家华罗庚回国”

的消息却令他激动不已。

华罗庚，中国解析数论、矩阵几何学、典型群、自守函数论等多方面研究的创始人和开拓者，世界著名数学家。他的许多数学科研成果，如“华氏定理”、“怀依—华不等式”、“华氏不等式”、“普劳威尔—一加当—华定理”、“华氏算子”、“华—王方法”等在国际上均得以华氏命名。美国著名数学家贝特曼著文称华罗庚为“中国的爱因斯坦”、“足够成为全世界所有著名科学院院士”。芝加哥科学技术博物馆把华罗庚列为当今世界88位数学伟人之一。

早在1946年，华罗庚与两位鼎鼎大名的科学家吴大猷、曾昭抡一起被国民政府选派赴美考察。1946年9月，华罗庚离开上海前往美国，先在普林斯顿高等研究所担任访问教授，后又被伊利诺大学聘为终身教授。

新中国成立后的鞭炮锣鼓，敲响了华罗庚教授的爱国赤子之心。1950年3月



冯康在北京第一个工作的地方，清华园。他在这里也得遇恩师华罗庚。





冯康曾于上世纪五十年代留学莫斯科斯捷克洛夫数学研究所

16日，华罗庚留下一封慷慨激昂的万言长信，毅然带领家人回到祖国。“梁园虽好，非久居之乡……为了国家民族，我们应当回去。”至今，这些铿锵的话语仍回响在许多爱国学子的耳旁。

归去来兮！华罗庚归国的壮举不仅对冯康是个很大的鼓舞，更令他兴奋不已的是，华罗庚不但回到祖国，更回到美丽的清华园，担任清华大学数学系的主任。天涯咫尺，在冯康看来，他不仅有机会与崇敬的数学大师共同探讨数学难题，更可以面对面与数学大师交流共事。

事实证明，在接下来的几年间，华罗庚对冯康在数学领域的研究产生了巨大的影响。华罗庚成为引领冯康走进数学梦花园的重要师长。

华罗庚回到清华大学不久，受中国科学院院长郭沫若的邀请开始筹建数学

研究所。直至1952年7月中国科学院数学研究所成立时，华罗庚出任中科院数学研究所第一任所长。

1951年3月，数学研究所正在组建之时，在数学领域已经初显才华的冯康就被选调到研究所任助理研究员。

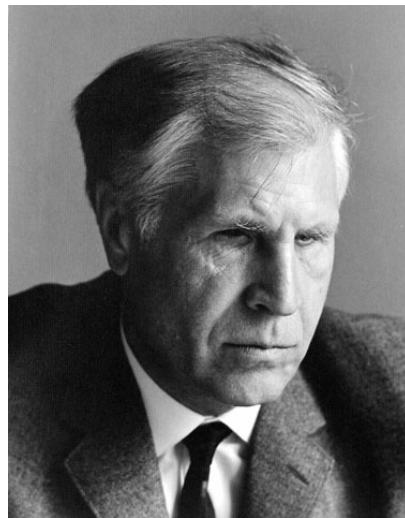
不久，作为新中国成立后第一批被选派到苏联留学的研究生，冯康又前往苏联莫斯科斯捷克洛夫（Steklov）数学研究所进修。斯捷克洛夫（1864-1926）是前俄国数学物理学派的创始人，主要从事热传导、旋转物理的平衡和静电问题的研究。他于1921年在圣彼得堡大学创立了物理数学研究所。斯捷克洛夫去世之后，研究所就以他的名字命名。八年后，数学部分从该所中分离出来，形成了现在的斯捷克洛夫数学所，并全面开展纯粹数学与应用数学各方面的研究工作。数学研究所的主要部分于1940年移到莫斯

科，但圣彼得堡的分部依然存在。该所集中了前苏联最好的数学家，其中有许多具有国际声望。最近证明了庞加莱猜想的数学怪杰佩雷尔曼脱离数学界之前一直在位于圣彼得堡的斯捷克洛夫研究所工作。

苏联，这是一个可以勾起无数中国人复杂情感的国家。尽管今天，苏联作为国家的名字已经不复存在，然而停留在许多中国人心中那段中苏友谊的记忆却依然无法抹去。五十年代，中苏关系正处于“蜜月期”，作为第一个承认并与新中国建交的国家，苏联代表了中国美好的前进方向。高喊着“向苏联老大哥”学习的口号，中国在政治、经济、科技、文化和教育各方面都全力追赶着苏联的步伐。

1951年，冯康来到了托尔斯泰的故乡。冯康深知这次留苏，并不能沉醉于他的文学梦想，而是追求他的数学理想。

到苏联后，冯康师从苏联著名的盲人数学家彭特亚金（Pontryagin）。



彭特亚金（1908 - 1988），  
冯康留学时的老师。

彭特亚金 13 岁那年，因一次汽炉的意外爆炸而双目失明，后来母亲帮助他树立起坚强的人生信念，他靠母亲在旁边读书给他听坚持学习数学，每次听完课后，立刻集中复习并加以熟记。他 21 岁毕业于莫斯科大学，28 岁便成为莫斯科大学教授，31 岁

当选为苏联科学院的

通讯院士。彭特亚金专

攻拓扑群与拓扑几何

学，他在数学上的最大

贡献是拓扑学和最优

控制理论。彭特亚金因

其杰出的数学成就，曾

获得罗巴切夫斯基奖，

曾三次被授予列宁勋

章，更获得社会主义

劳动英雄金星奖章。在人们的眼中，

彭特亚金出身社会下层，又双目失

明，却传奇般地成了一代数学名家，

简直就是一个奇迹。而他个人勤奋

的励志故事更成为激励许多数学学

子奋斗的榜样。

在去苏联留学之前，冯康对彭特亚金

的数学研究工作有过一些了解。当他

了解到彭特亚金作为盲人数学家的传

奇经历后，或许是同样饱尝过身体残

疾与疾病的折磨，冯康对彭特亚金更

是崇拜有加。在他的心中，彭特亚金

是一个数学上的英雄。

能够得到心目中数学英雄大师的亲自

指点，冯康觉得确实是极其难得的机

会。与彭特亚金在一起学习数学的日

子更是冯康记忆中最美丽的一段时光。

然而，这种美好的时光延续得并不长

久，不到一年，冯康的脊椎结核病又

复发了。于是冯康只好住进莫斯科第

一结核病院。

住院期间，他坚持通过大量阅读来广

泛地涉猎了解苏联数学家的研究成

果。他接触了彭特亚金的老师——苏

联数学家、苏联科学院院士亚历山德

罗夫 (Aleksandrov) 一些关于数论的

著作，同时他也毫不隐讳地阐明自己

对大师著作的一些观点。冯康说，真

正让他钦佩的苏联数学

家是被誉为“苏联数学

大神”的柯尔莫哥洛夫

(Kolmogorov)。实现了

将概率论公理化的柯尔

莫哥洛夫，在算法复杂

性、随机数学、动力系

统乃至湍流理论等方

面也取得了很大成功。

柯尔莫哥洛夫因其工作

的广泛性，不仅对数学学科，而且对

物理学科也作出了重大贡献，这恐怕

在二十世纪的科学家中也是不多见的。

不但他本人获得了沃尔夫奖，他的学

生阿诺德 (V. Arnold)、盖尔范德 (I.

Gelfand)、辛赖 (Y. G. Sinai) 也都先后

获得了沃尔夫奖。

病榻上，冯康除了获得了数学知识的



柯尔莫哥洛夫 (1903 - 1987)，二十世纪最伟大的数学家之一，也是冯康最佩服的数学家。

**尽管冯康留苏的大部分时光都是在病榻上度过的，然而对数学有着敏锐嗅觉的他却很快地捕捉到苏联数学研究领域最活跃的分支——广义函数。**

增长，俄语也取得了突飞猛进的进步。

据他后来说，这得益于他每天和俄罗斯

女护士们的交谈。

1953 年，在苏联先进的医疗条件和精

心的护理下，经过一年多的治疗，冯

康的脊椎结核病终于痊愈了。然而，

他也不得不结束在苏联的学习，提前

回国。

若干年后，冯康再次听到彭特亚金的

消息是得知他卷入苏联科学界反犹太

人的风暴，至此他觉得与当年的“恩

师”走上了一条南辕北辙的道路，他

大呼一声：“我爱我师，我更爱真理”，

英雄的神话破灭了，绽放在心中的红

梅花儿也凋谢了。

## 锋芒初显露

尽管冯康留苏的大部分时光都是在病

榻上度过的，然而对数学有着敏锐嗅

觉的他却很快地捕捉到苏联数学研究

领域最活跃的分支——广义函数。广

义函数是和物理有着密切联系的数学，

在他看来，也是具有生命力的数学。

历史上第一个广义函数是由英国物理

学家保罗·狄拉克引进的，他为了陈

述量子力学中某些量的关系引入了德

尔塔函数，而按 20 世纪前所形成的经

典数学概念是无法理解这样奇怪的函

数的。然而物理学上一切点量，如点

质量、点电荷、偶极子、瞬时打击力、

瞬时源等物理量用它来描述不仅方便、

物理含义清楚，而且当它被当做普通

函数参加运算，如对它进行微分和傅

里叶变换，将它参与微分方程求解等

所得到的数学结论和物理结论是吻合

的。这个函数虽然行之有效，但缺乏



巩固的数学基础。后来法国数学家劳伦·席瓦兹 (Laurent Schwartz) 用泛函分析观点为德尔塔函数建立了一整套严格的理论, 即广义函数论, 恰恰弥补了这一缺陷。

冯康留苏期间, 正是苏联广义函数理论盛行并异常活跃的时期, 其领军人物便是盖尔范德, 他也是那位冯康最钦佩的数学大师柯尔莫哥洛夫的弟子。盖尔范德是一位出生在乌克兰的苏联著名数学家, 他在数学、数学物理及生物

学等方面都取得了重要的成就, 特别是在泛函分析上更有自己的独到专长, 曾获 1978 年的沃尔夫奖。当时在莫斯科大学担任教授的盖尔范德经常会在莫斯科大学举办广义函数的研讨班, 这种学术的思想碰撞给冯康带来了很大的启发与影响。

从苏联回国后, 冯康继续在数学研究所担任助理研究员。此时他的工作兴趣全部集中在广义函数的研究上。

1955 年, 冯康将盖尔范德关于广义函数的文章翻译发表在刚刚创刊的《数学进展》上, 题为“广义函数论”。这篇文章被公认为是国内介绍广义函数方面最具影响力的文章。文章发表后, 引起了《数学进展》的创办人、也是时任《数学进展》主编的华罗庚的注意, 华罗庚也由此对广义函数产生了极大的兴趣。

作为冯康心中敬佩的恩师, 华罗庚对冯康在广义函数方面的研究大加赞赏。那个时候, 人们经常会听到华罗庚在

数学所举办的全国性广义函数讨论班上称赞冯康, 他不但会引述一些冯康关于广义函数的说法, 也会表扬冯康每次都能把他布置的问题做得很好。

### 中国计算机事业的发展, 最初孕育就是在冯康所工作的中国科学院数学研究所。而对于中国计算机事业初始发展作出重要贡献的也正是与冯康结下深厚师缘的华罗庚。

熟悉华罗庚的人都知道他性格有些“专横霸道”, 对待学生非常严厉, 他很少去表扬别人, 但对冯康却是例外。此时, 冯康在学术上和工作中也尽显锋芒。

1956 年冯康在数学研究所期间也曾给新分配的大学生们办讨论班, 教习题课。那个时候冯康对学生要求也很严厉, 批评学生不留情面, 学生们都很敬畏他。

在华罗庚的启发引导下, 冯康继续在梅林 (Mellin) 变换方面深入广义函数

的研究。1957 年, 冯康在《数学进展》上发表了题为“广义函数的泛函对偶关系”的论文。同年, 他还在《数学学报》上发表了另一篇题为“广义梅林变换”的论文。关于广义函数论文的发表标志着冯康的数学研究工作经过牛刀小试, 已经初见成果。他所建立的广义函数空间的对偶定理和广义梅林变换, 对于微分方程和解析函数论都有很大的应用, 后来更加被广为流传。

冯康在广义函数方面的研究体现出一个数学家敏锐的嗅觉、非凡的眼光和极高的鉴赏能力, 冯康也由此开始逐步走向成熟。

新中国成立以后, 随着经济的逐步恢复, 中国开始着手制定宏伟的经济建设发展目标。国家深知经济建设离不开科学技术的发展, 于是针对中国科技工作发展薄弱的现状, 1956 年, 在



刚刚建立中科院数学研究所时的华罗庚和他的学生们



计算所三室首任主任徐献瑜教授，  
去年刚过百年华诞。

国务院总理周恩来的亲自领导下制定了《十二年科技规划》。这是建国以来国家制定的第一个科技规划，规划中将计算技术、半导体、电子学和自动化列为四项紧急措施重点发展，并提出立即筹建研究机构。

中国计算机事业的发展，最初孕育就是在冯康所工作的中国科学院数学研究所。而对于中国计算机事业初始发展作出重要贡献的也正是与冯康结下深厚师缘的华罗庚。

1946年的情人节，当世界上第一台电子计算机 ENIAC 在美国宾夕法尼亚大学宣布问世，震撼全球，引起了全球科学工作者的极大关注。科学家们关注的焦点不仅在于 ENIAC 未来将如何改变世界，而在于那位被称为具有“天才大脑”的美国数学家冯·诺依曼的参与设计。不出所料，在接下来的几年，这位“电子计算机之父”在开发计算机的设计与制造的同时，也开创了现代科学计算的一片新天地。

当时正在美国学习考察的华罗庚亲历了这种科技的变革，也敏锐地发现数学发展的新方向，这段经历为他回国后开创中国的计算机事业奠定了重要基础。

1952年，华罗庚筹建了数学研究所。1956年，他又领衔担任国家《十二年科技规划》中计算技术和数学规划组的专家。同年6月，他牵头从中国科学院、第二机械工业部十局（后来的四机部）、军委总参三部、国防部五院（后来的七机部）和高等院校几个方面抽调干练的科技力量，从事计算技术研究所的筹备工作。1956年8月25日，国务院正式批准成立中国科学院计算技术研究所筹备委员会，华罗庚出任主任委员，从此，中科院计算技术研究所诞生。

计算技术研究所成立初期，国内懂计算机专业的人员还很少，因此培训中国第一批计算技术的专业队伍迫在眉睫。计算所通过与清华、北大合作，抽调数学系四年级的学生及一部分刚刚大学毕业的大学生，办了计算机与计算数学两个训练班。这个训练班一共办了四期，共培养出600多人，不但充实了计算所自身的力量，也为很多大学培养了教学和科研的骨干。

当时，冯康虽然还没有调到计算所工作，但他已经到计算所在北大办的培训班讲课。冯康讲课用的教材是苏联数学家米赫林写的《数学物理中的直接方法》。与冯康同在培训班讲课的教师还有清华大学的孙念增讲程序设计，北京大学的胡祖炽讲数值分析，张世龙讲无线电原理，何国伟讲微分方程

数值解。其中胡祖炽在1950年末出版的《计算方法》是中国最早的一本计算方法教材，使得中国早期的计算数学和计算科学研究者受益匪浅。

在北大的课堂中，有许多聆听冯康讲课的学子日后都成为与冯康共事的骨干。黄鸿慈，也是有限元方法早期的研究者之一，后来与冯康一起共事了三十多年，成为冯康重要的助手。黄鸿慈从香港培正中学毕业后，和很多爱国青年一样，回到了新中国念大学。培正中学是当时香港以中文为主的中学，曾任培正中学校长的林子丰先生后来创办了香港浸会学院（1990年代改名为香港浸会大学）和香港浸会医院。由培正中学走出的学生后来成就了众多著名的专家学者，包括诺贝尔

奖获得者，菲尔兹奖获得者和多位香港大学校长，这在两岸三地的中学里也算一个奇迹。

黄鸿慈回忆当年在北大听冯康讲课的情景，他说虽然冯康的课只讲了一个学期，但是让大家受益匪浅。通过这门课程，冯康引导大家利用变分方法解决数学物理的方程，这其中就包括了有限元概念的雏形。冯康的重要影响力在于他带领大家认识到了变分原理是一个方向。

而就在这一时期，冯康的数学研究领域也从纯数学转移到应用数学。数学领域一向有纯数学与应用数学之分。前者以研究数学自身的规律为目标，从精美的数学抽象中深化人们对客观世界的认识，努力攀登数学金字塔的最高峰。后者则致力于生产实践中大

**冯康他自身通晓物理和工程，而纯数学的素养又使他不同于别的应用数学家。计算数学犹如一片全新的天空，可以让他没有任何阻碍，不受任何限制地任意驰骋。**



量实际问题的解决，旨在通过建模、计算、运筹、优化、统计等数学工具寻找解决问题的办法。作为应用数学分支之一的计算数学，是随着电子计算机出现而兴起的一门应用性极强的学科，需要懂得实际应用背景及掌握交叉学科的知识。

当时的计算技术研究所非常需要具备数学、物理和工程方面的坚实基础又了解实际应用背景的学术带头人。冯康的大学学习经历，留苏的纯数学研究经历，以及多年的教学和研究

工作，都使他成为最佳人选。对于冯康来说，计算数学是一个全新领域的工作。他自身通晓物理和工程，而纯数学的素养又使他不同于别的应用数学家。计算数学犹如一片全新的天空，可以让他没有任何阻碍，不受任何限制地任意驰骋。

计算技术研究所成立初期主要肩负两项任务：一是尽快研制出电子计算机，二是利用电子计算机解决国防与经济建设中的重大计算任务。计算所下设三个研究室，一室和二室分别负责整机与元件的研究，主要肩负研制计算机的重任，而三室则是从事计算数学与科学与工程计算研究，承担解决国防与经济建设中的重大问题的任务。

二十世纪五十年代中国开始筹划电子计算机的研制。当时世界上的计算机数量尚少，

其作用主要是科学与工程计算。国外能用计算机的人，大多从数学专业转过来。刚于去年度过百年华诞的徐献瑜教授是中国计算数学的老一辈开拓者，他毕业于东吴大学，早年留美获华盛顿大学博士学位。回国后在燕京大学担任教授，1952年大学院系调整

后转到北京大学。50年代，为了适应国家的需要，徐献瑜毅然从纯数学转到计算数学领域。1956年2月，由徐献瑜、胡世华、闵乃大、吴几康、张效祥、林建祥参加了在莫斯科主办的“计算技术发展之路”的国际会议，在苏期间，与会者参观了苏联科学院的精密机械与计算技术研究所，计算中心以及莫斯科大学数学系计算中心，看到了苏联当时最先进的计算机，拜访了苏联科学院计算所所长列别杰夫院士、计算中心主任妥罗德尼称院士、莫斯科大学计算数学专

业主任索波列夫院士，并从此开始了中国计算技术工作者的国际交往。从苏联回国后，徐献瑜即参加了周恩来总理领导制定的“中国科学发展12年规划”中“计算技术建立”的规划工作。他所在的计算技术和数学规划组，由26名有名望的数学家、计算机专家和电子技术专家组成，华罗庚领衔。

1957年初，冯康被调到中国科学院计算技术研究所三室工作。学术优秀的冯康很快就成了三室学术的掌舵人。

### “三室”日与夜

“三室”，对于冯康来说，是一个让他激情燃烧的地方，也是一个让他施展才华的地方。

冯康调到三室的时候，只有37岁，正是年富力强的好年华。此时的冯康，无论在人生阅历还是学术研究方面都已经步入成熟。经过了数年的积累，冯康需要一片土壤，让他亲手浇种的计算数学可以开花；冯康也需要一个战场，让他可以统领三军，运用韬略，一展风华。事实上，三室正是这片土壤，这个战场。三室不但让冯康有了施展将才的空间，通过大量实践，也让冯康的学术研究得以升华。

计算所筹备和成立之初，临时的办公地点和实验室都设在中关村附近的西苑大旅社三号楼，当时的数学所也从清华园迁出至此。今天，这个作为中国计算数学最早发

**据三室的同事回忆说，冯康和张克明的关系非常好，两个人的配合也相得益彰。关键时刻，张更会挺身而出，担当冯康的“政治保护伞”。**



上世纪五十年代冯康与母亲和冯端夫妇摄于北京



计算所三室一组 1961 年合影。第一排左五为冯康，左六为张克明。

源地的地方几经翻修，已成为一座现代化的五星级的酒店——北京西苑饭店。

1958年2月，一幢全新的科研楼在中关村落成。计算所与数学所由临时办公的西苑大旅社迁往这里，这幢后来被称为“北楼”的灰色办公楼成为计算所与数学所真正的“家”。冯康所在三室的办公地点就位于这幢“北楼”的三楼。

冯康调到计算所三室时担任三室主任的是徐献瑜，副主任是张克明。出生于安徽峰山乡前窑村的张克明，1934年入清华大学数学系，得熊庆来教授

指导。毕业后，他有着奔赴延安、担任华东野战军宣教干部的红色经历，解放后在中科院顾问办公室任主任。

徐献瑜与张克明早年都是计算所筹备委员会的委员，因此计算所成立后，都被委以重任。徐献瑜教授一直钟情教学，因此担任三室主任也只是兼职，他的主要工作仍在北大教书育人。张克明则由中科院的顾问办公室直接调入计算所担任三室副主任，主持工作并兼任三室的党支部书记。冯康调入三室后，负责三室业务的全面指导。

据三室的同事回忆说，冯康和张克明的关系非常好，两个人的配合也相得益彰。

如同刘备与诸葛亮一般，开明的张克明十分欣赏冯康的学识才干，全力支持冯康在三室开展工作；冯康也需要张克明这样的权力保护，使得他的一些思路和做法畅通无阻。关键时刻，张克明更会挺身而出，担当冯康的“政治保护伞”。

三室成立之初根据不同的研究方向分为六个小组：其中一组负责初值问题、天气预报。初值问题一般是动态问题，物理状态随时间而变，其解依据“初始条件”。二组负责边值问题（以水坝计算为主）及大规模的矩阵计算（如大地测量）。边值问题一般是静态或平衡问题。其解由所关心的区域边界决





计算所三室二组摄于1961年。后排左七为张克明，左八为冯康。

定。三组负责与国防相关的计算问题，包括航空航天中遇到的激波计算等。四组负责程序设计自动化，这里也成为中国计算软件最早的发源地。五组负责一些微分方程以外的计算问题，包括公路设计、光学镜头设计等。六组则负责常微分方程和统计计算。常微分方程自变量只有一个，当时主要对象是卫星轨道的计算，对中国早期发射人造卫星提供重要的理论和计算支持。而统计计算是对一些不能用数学方程描述的物理现象进行模拟，或对有很多自变量的问题进行计算。其中最有代表性的方法是蒙特卡罗方法，至今仍在物理和金融预测中起着重要的作用。

今天中国计算数学和工程计算很多领域的优秀科学家、中科院院士当年都是和冯康在三室并肩战斗的同事。

石钟慈，1955年复旦大学数学系毕业后被分配到中科院数学所。1956年计算所筹备成立时，他被调到计算所，并派往苏联学习计算数学。1961年，三室迎来了最早一批留苏的大学生，毕业于莫斯科大学的张关泉、秦孟兆和马延文，他们为三室带来了新鲜的朝气与活力。次年，石钟慈也从苏联读研归来，分配到三室二组。与他同时来到三室的还有与张关泉等人在莫斯科大学就读时的同学邬华谟。张关泉1965年又被派到法国留学。

黄鸿慈，1957年北大毕业后被分配到计算所，1958年初在计算所三室正式开始工作，当时他在二组，主要进行水坝问题的相关计算。

黄兰洁，洋名 Nancy，在美国长大和接受的教育，毕业于哥伦比亚大学，1957年回到北京，也来到了计算所三室。黄兰洁的丈夫吴承康先生与她同期回国，并长期在中科院力学所工作。吴承康先生1991年当选为中科院院士，是著名的高温气体动力学专家。

崔俊芝，1962年从西北工业大学数学力学系计算数学专业毕业，同年10月到计算所三室的二组工作。



上个世纪五十年代中国的首台计算机

朱幼兰、李子才，1963年毕业于清华大学工程力学系，毕业后分到计算所三室。朱幼兰、黄兰洁还有从苏联回来的邬华谟等主要从事计算流体力学的研究。

负责三室业务指导工作的还有董铁宝教授。董铁宝1917年生于江苏省武进县，1939年毕业于上海交通大学土木工程系。毕业后即奔赴抗日的大后方，参加抢修滇缅公路桥梁。他于二战结束那年赴美国留学，后来在伊利诺伊大学学习、参加研究工作，并于1949年获得博士学位。他在和纽克曼等著名学者一起工作时，有机会参与了第一代电子计算机伊利亚克机（ENIAC）的设计、编程和使用。1956年，当中国开始大规模向科学进军的时候，他放弃了已有的良好工作条件和优厚的生活待遇，携夫人梅镇安和三个年幼的孩子回到祖国，到北京大学任教授，同时兼职于计算所三室。由于董铁宝教授熟悉力学和计算，特别是结构工程与抗震，例如板壳和水坝的数学模型与应力分析，都能给予指导。董铁宝还在计算所指导研究生，周天孝、孙家昶都是他名下的研究生。

当时担任三室二组组长的是魏道政、副组长是林宗楷。先后担任四组组长的是1952年毕业于清华大学的许孔时，1956年毕业于吉林大学的董韫美，组员有张绮霞、仲萃豪、曹东启、李开德等。魏道政、许孔时等和冯康一样，也是从数学所调到计算所的。

冯康主要工作就是指导一、二组进行科学计算。与此同时，他还着手组建和培训计算数学队伍，除了与北大合作办培训班之外，在计算所内也办培训班积极培养年轻的计算数学人才。1957年9月至12月，苏联专家什梅格列夫斯基被邀请来讲课。

在对年轻人培养期间，冯康邂逅了他

人生的第一个红颜知己——李开德。李开德和冯康一样，都是从数学所转到计算所，她被分配到三室四组工作。和三室所有的年轻人一样，她经常要请教冯康补习数学知识。据三室的老

同事回忆，那时的李开德年轻、有活力，长得很漂亮。李开德曾经和三室的一位同事发生过短暂的感情，但在当时极左的环境下却被误解为“不正常的男女关系”，给予严厉的处分，甚至要她调离单位。情急之中，她想到一直很敬仰

的冯康，她认为以冯康的地位与影响可以帮她躲过一劫。

1959年，冯康与李开德结婚。那一年，刚好是中国历史上疯狂的大跃进时代。但这段婚姻维持了一段不长的时间。

**冯康在三室倾注了大量的心血，三室的实践也滋润了冯康的学术思想。在三室拼搏的日与夜，让冯康和他的同事们创造了事业的第一个巅峰。**



见证了中国最早的计算机诞生和计算数学发展的计算所北楼，在一片拆迁的风声中也未能幸免。它已于2009年正式消失了。



1958年5月，中共八大二次会议正式制定了“鼓足干劲、力争上游、多快好省地建设社会主义”的总路线。随后中国进入了历时三年之久的“大跃进”、“人民公社”时期。“大炼钢铁”、“大放卫星”的口号在全国铺天盖地的蔓延，中国的工业与农业出现了严重的浮夸风。

在当时的形势下，中科院数学所与计算所的领军人物华罗庚教授也在科学界大搞高指标的活动中违心地提出了12项数学指标，要在10年内赶上美国，并且提出要把计算技术、人造卫星、大型水坝等各方面的一切数学问题都承担下来的目标。尽管如此，华罗庚仍难逃厄运。不久在知识界兴起的“拔白旗运动”中，华罗庚被树为“白旗”的典型受到攻击，说他倡导研究哥德巴赫猜想是提倡搞“古人、洋人、死人”，毒害青年。

计算所中，当时盛行的风气也是人人



华罗庚给科大本科生上课

不敢读书，读书即是图名图利的思想。于是大家只能专注实际的数学计算，动手算题目。在没有机器的情况下，大家只能靠手算。尽管条件艰苦，当时三室人员的工作热情却很高。人们经常看到“北楼”的灯光通宵点亮。

1958年8月1日，中国第一台电子计算机103机终于试制成功。新华社在人民日报上发表了标题为“我国计算技术不再是空白学科，第一架通用数字电子计算机制成”的消息。虽然

103机的内存容量很小，仅有1024个存储单元，但在冯康的带领下，三室利用自己编写的程序在这台机器上，进行了多项计算。

1959年9月国庆十周年前夕，104大型通用计算机研制成功，104机在科学计算中发挥了重要作用，许多三室的同事对于运用104机进行计算还记忆犹新。到1959年底，三室利用这两台计算机完成了八十多项计算任务。



郭沫若（前排左二）、陈毅（左三）、聂荣臻（左四）和第一届中科大毕业生

值得一提的是，在三室担任兼职主任的徐献瑜教授也为三室的发展和成就付出了辛勤的汗水。他曾带领70多名计算数学培训班的学员为超音速飞机的设计作出了贡献。当时正值1958年科技跃进之际，国防部门设计超音速飞机时遇到小展弦比宽机身组合的翼身干扰问题，当时还没有建成跨音速风洞，所以要估算超音速飞机气动力只能借助数值计算。军事工程学院罗时钧教授提出计算方案，从苏联留学归国的北大青年教师黄敦教授画出了翼身图形，徐献瑜据此图形做出了数学公式。然后指导学员们用电动计算机算了一个月，得出了小展弦比宽机身机翼组合体的超音速干扰气动力，交出了一份出色的答卷。

1960年代初,三室已经发展成为具有200多人的计算数学队伍(包括各地的进修人员)。在冯康的全面指导下,三室完成了国防与国民经济建设中亟待解决的数百个重大计算课题,其中包括数值天气预报、大型水坝应力分析、大地测量计算、核武器内爆分析与计算、火箭、导弹、卫星的高速空气动力学计算、卫星轨道计算、全国铁路布线及站点设立的最优化方案计算等等。与此同时,三室还为全国各地代培了近百名科学计算人才,其中不少人回去后当了本单位的业务领导工作。

冯康在三室倾注了大量的心血,三室的实践也滋润了冯康的学术思想。在三室拼搏的日与夜,让冯康和他的同事们创造了事业的第一个巅峰。

今天,当我们再次来到位于中关村的中国科学院基础园区,已经看不到当年计算所三室所在的那幢灰色的六层楼房。如今那里变成了一片拆迁后的平地,据说不久会有一幢现代化的商务大楼在那里拔地而起。如今,在昔日三室“北楼”的对面,是一间装潢时尚,飘逸着海派菜香的苏浙汇餐馆;偶尔,我们还会在那里邂逅鹤发耄耋的院士,四十年多前,咫尺之遥,那曾是他们激情澎湃、热火朝天奋战的地方……

## 第七研究组

正当中国的“大跃进”在全国各地进行得如火如荼的时候,中国教育史和



1963年,中科大58届计算数学专业学生在计算所北楼前与实习指导老师合影。前排中为计算教研室主任冯康。

科学史上也发生了一项重大事件:中国科学技术大学在北京宣布成立。1958年9月,在聂荣臻等老一辈领导人的积极倡导下,隶属于中科院的中国科技大学宣布成立,旨在为中国培养急需的高新科技人才。由科学院院长郭沫若兼创校校长,钱学森等一批颇有名望的科学家也纷纷到科大执教鞭。此时,经历了“拔白旗运动”在数学所遭受排挤的华罗庚将主要精力集中在科大数学系,担任中国科技大学副校长兼数学系主任。数学系的副主任则由冯康担任。从此,华罗庚虽然长期地在中国科学院数学所工作,在科大兼职,但却再也没有过问计算所的事情。

60年代初,为了在科大搭建一个完整的教学平台,在冯康的倡导下,科大成立了计算数学教研室。冯康担任教研室主任。冯康除了选派三室富有经验的业务骨干如石钟慈、黄鸿慈等到

科大任教之外,他还在三室专门成立科大教材编写组,为科大编写教材。当时在教材编写组的有黄鸿慈、李家楷、张关泉、秦孟兆等人。作为计算数学专业课程的设计师,冯康除了亲自撰写教学大纲、组织编写教材之外,有时还会亲自到科大作演讲、报告。冯康带领团队为科大编写的那些油印教材虽然最终没能出版,但却成为中国计算数学专业教学的宝贵资料。在同一时期,

石钟慈正式调入中国科大工作。他逐渐由教研室主任,后来接替冯康升至数学系主任,在科大工作了二十余年。中国科技大学于1970年搬迁至安徽合肥市,他也随学校来到了合肥,直至八十年代中期又回到了北京,回到了科学院。

**冯康一方面深入到七个研究组进行业务指导,一方面又带动大家在完成实际任务中开展理论研究。到文化大革命前夕,三室不仅完成了一批国家急需的重大任务,还写出了多篇高水平的学术论文。**

1961年,在广东省汕头召开了第二届全国计算技术经验交流会,冯康与三室副主任张克明等人参加了会议。会议后,冯康建议三室在解决实际任务的同时,要开展理论研究。他疾呼,形势逼人,开展理论研究已是刻不容缓。

在当时的条件下冯康提出这样的建议是顶着很大阻力的,因为当时普遍的观点认为,搞理论研究就是从文章到文章,是一种争名逐利的思想,因此受到很多人的批判。这时,与冯康搭档默契的张克明主动帮他解围,1963年在张克明的支持下,三室成立了第





1962年春，石钟慈（左一）与科大1958届计算数学专业师生在颐和园合影。

七研究组，进行理论方面的研究。黄鸿慈获任第七研究组的组长，张关泉担任副组长，组员大部分是冯康在60年代初期带的一批研究生，其中包括王烈衡等，李子才后期也调入第七研究组。

第七研究组的成立标志着三室在计算数学研究方面由理论到实践的框架已经搭建完成。今天看来，不得不令人钦佩冯康的远见卓识与高瞻远瞩。由此，冯康作为计算数学大家的风范逐步显露，他也在自己搭建的平台上施展才华。

冯康一方面深入到七个研究组进行业务指导，一方面又带动大家在完成实际任务中开展理论研究工作。到文化大革命前夕，三室不仅完成了一批国家急需的重大任务，还写出了多篇高水平的学术论文。无粘超音绕流数值计算和初边值问题差分方法研究工作在理论和实践上已经有所突破，获得了初阶段的成果，为国防部门计算出了大量有关数据，为中国早期的航空、航天事业作出了贡献，这一领域的数值计算问题是当时国际上公认的难题。原子能反应堆的物理计算，要求解

波尔兹曼方程，这个问题的难度也很大。冯康提出从积分守恒原理出发建立差分方程，并指导任务组推导出解决波尔兹曼方程的一系列守恒格式，在实际计算中获得了成功，并且在理论分析方面也做了一些研究，为我国早期的原子弹试制和第一艘核潜艇上核反应堆的设计提供了可靠数据。冯康还直接负责一项国防部门提出的解不定常

冲击波问题计算方法研究课题，他指导课题组通过实际计算研究总结出各类方法的特点和适应的情况，以及如何选取各种参数，从实践和理论两个方面初步探索出了解决此类问题的途径和方法，对国防部门的有关试制研究工作起到了参考与指导作用。

第七研究组在计算数学理论方面取得的丰硕成果，也催生了中国第一本计算数学杂志《应用数学与计算数学》的诞生。

《应用数学与计算数学》最早萌芽于《计算机动态》中的计算数学专刊。《计算机动态》是由计算所主办的一本杂志，每月一期，以刊登一些介绍国外先进机器的文章为主。随着国内计算数学研究的兴起，《计算机动态》每年出版四期计算数学专刊，刊登计算数学方面的翻译文章及少量国内原创论文。这本期刊在1960年代初刊登过一篇北大的胡祖炽翻译的三位应用数学大家，库朗（纽约大学库朗研究所的创始人）、Friedrichs（拉克斯的博士导师）、Lewy（1984年的沃尔夫奖获得者）于1920年代用德文写的经典文章，题

目是《差分方程和数学物理》。此文提出了经典的用三位作者第一个字母组成的CFL稳定性条件，至今仍是计算数学必知的条件。这篇三十年后的译文，仍对三室的研究起到很大的推动作用。由此也可看到当时参考文献水平的落后。

七组成立后，计算数学理论研究的文章多了起来。1964年，在冯康的主持下，《应用数学与计算数学》创刊，每季一期。从此计算数学有了自己的一片研究天地，第七研究组发表的文章占了这一期刊文章的一半左右。

在当今资讯爆炸的年代，期刊的种类已经多得数不胜数，甚至成为研究者的负担。在美国《数学评论》注册的数学期刊就有上千种，在中国和数学有关的中英文期刊也有上千种。庞大的数目之后是水平的严重参差不齐。但在1960年代，数学期刊种类只有二、三十份，计算数学的刊物只有几个。当时有一个交流的平台是非常重要的。冯康在这方面的远见卓识和身体力行对中国计算数学的研究是有重要影响的。

好景不长，当文化大革命袭来时，随着七组解散，这个仅仅诞生了两年半的杂志也被迫停刊。直至1978年《应用数学与计算数学》复刊，更名为《计算数学》。《计算数学》目前是中国计算数学最权威的杂志。

尽管在整个中国计算数学的发展史上，第七研究组以及《应用数学与计算数学》都如同昙花一现，然而他们却是中国计算数学研究的一个良好的开端。

花儿谢了，美丽犹存。

曾经，  
在神奇的数学王国中，  
有一个并未被许多人认知的“美丽花园”，  
人们称它为“有限元”。  
遇上有限元，  
有人说是他的一种偶然，  
也有人说是时代的一种必然；  
开发有限元，  
让他有足够的自信与世界数学大师平等对话，  
更让他成就了数学骄子的梦想……

1966年3月19日，中共中央总书记邓小平等抵刘家峡水电站建设工地视察。



## 第四章 数学骄子

在人的一生中，机遇与际遇如同两个孪生兄弟，如影相随。有时候，一个偶然的机遇会让人生的际遇改变；有时候，人生的际遇又会让失去的机遇重生。

也许，一个人曾经无数次地与机遇擦肩而过，无数次地与机遇失之交臂，但只要有一次握住了机遇的手，整个人生际遇就会从此改变。

有限元对于冯康来说就是改变了他人人生际遇的一次机遇。

没有有限元，冯康的名字在今天就不会被人们一次次地提起。

没有有限元，冯康也就不会傲然地站在世界级数学大师之列。

尽管有限元的发现蕴含了一个又一个曲折的故事，尽管有限元的开发凝结了太多太多科学工作者的心血与智慧，尽管有限元的发展引发了学术界的争议与个人的恩怨，然而，当我们逐步抽丝剥茧，试图还原有限元发现前后的真实故事，我们发现，原来所有的一切都无法遮挡冯康的光芒。

冯康以他独有的数学高度与思想，不但发现并找到了这片数学王国的“美丽花园”，并且还给出了关于有限元方法充足的理论根据。冯康的高度与深度是同时代的许多研究者所无法超越的，他也因此赢得了国际声望与多位世界级数学大师的尊敬。

重拾有限元的故事，我们依旧要回到那令冯康激情燃烧的火红年代……

### 刘家峡被“困”

“黄河的水哗啦啦地流，流过一个美丽的地方，流过一道神奇的峡谷……”大多数人对于刘家峡的记忆都始于小学语文课本。2008年，一首迅速唱红的歌曲《美丽的刘家峡》再度勾起人们对于这颗“黄河明珠”的向往与回忆。

今天，当我们乘船沿着黄河溯流而上，行至甘肃省永靖县内，豁然见到两岸奇峰对峙、壁立千仞、风景奇伟壮观。九曲黄河水陡然在这里转了一个九十度的急弯，向西奔流入峡。这里就是著名的刘家峡。

人们记住刘家峡不仅仅是因为它阳刚





从空中俯瞰刘家峡水电站的景色

与阴柔兼备的奇特景观，更因为它包含了让许多中国人倍感自豪与骄傲的火红记忆。

刘家峡水电站是中国第一座超过百万千瓦级的大型水电站，也是中国第一个自己设计、施工、建造的超过百米的大型混凝土坝。从1958年9月27日刘家峡大坝红红火火地破土动工，到1966年10月刘家峡大坝顺利实现截流成功。1968年10月水库正式蓄水，1969年4月1日第一台机组发电……这一连串令人骄傲的事件曾经许久地激荡在人们的心中。

然而，人们也许还并不知道，这个令人骄傲的宏伟工程在建设中也并非一帆风顺的。50年代末至60年代初，刘家峡大坝遇到了一系列设计计算和建设方面的难题，造成大坝工程进展缓慢。

在中科院计算所，三室二组的主要任务之一就是承担水坝工程的计算问题。

三室二组最早进行水坝计算的是李旺尧。1958年李旺尧下放劳动，未完成的计算由黄鸿慈接手。在刘家峡大坝工程计算之前，黄鸿慈已经进行过广东河源新丰江水坝、云南威信扎西坝等水坝工程的计算。他运用以往的计算经验与蔡中雄、詹重禧（在计算所进修）一起编写了两个计算标准程序。其数学模型主要是重调和方程。据崔俊芝介绍，黄鸿慈等人编写的十三点差分格式应力函数计算程序质量非常高，已经达到了指令级程序的最优化。这两个程序为其后二组其他同事进行水坝计算奠定了良好的基础。

1963年，中科院对各科研单位提出了系统研究的要求，即以完成国家重大需求任务为目标，开展系统研究，解决国家发展中困难的科学问题。中科院提出的口号是“以任务带学科”。在当时的三室中，黄鸿慈应当说是既有超强的理论能力又有实战经验的骨干，深得冯康的欣赏，他也因此受命担当

由冯康倡导成立的第七研究组的组长。黄鸿慈调任七组之后，二组接替他进行水坝计算任务的就是刚刚由西北工业大学分配来的年轻人崔俊芝。

1963年2月，刚刚过了农历新年，刘家峡大坝设计组的副组长朱昭钧工程师找到了计算所三室，请求帮助解决刘家峡大坝的应力分析问题。研究室把这项计算任务交给了崔俊芝。

朱工首先向崔俊芝介绍了他们采用的弓冠量分配计算方法，崔俊芝很快发现用这种方法形成的系数矩阵是病态的，于是他转而使用主元素消去法去求解弓冠量方法导出的病态线性方程组。病态问题虽然解决了，但是对计算结果进行应力校核，发现局部应力总是不平衡。于是，崔俊芝对弓冠量计算方法产生了怀疑。接着，崔俊芝在蔡中熊的帮助下利用黄鸿慈等人编写的应力函数法标准程序进行了计算，但算出来的结果仍然不能做到局部区域应力平衡。

崔俊芝今天回忆起来仍然认为，当时之所以计算的结果不理想，是因为采用十三点差分格式的应力函数计算程序来进行水坝应力分析。得不到满意的结果的主要原因是全部采用了正方形网格，水坝的边界不可能与网格线重合。黄鸿慈回忆说，内节点用差分逼近，边界节点不得不使用外推插值处理，这种不统一、不协调的处理方式也是造成计算结果不理想的原因。

除了计算方法之外，计算机储存量的限制也是造成计算难题的重要原因，当时的计算机全部数据与程序加起来不能超过2048个内存单元。崔俊芝称那是一个很艰苦的程序设计年代，因为当时编

程序都用机器原码,输入都用纸带穿孔。

1950年代编写程序相当地辛苦。没有汇编,没有C,也没有C++。当时的那种编程并不是今天这样的“写”程序,也不是在自己家里或是办公桌上就可以做的,而是要用机器语言来编,要到保安极强的机房里换上白大褂去工作的!也就是说,编出程序除了写在纸上,更重要的是穿成纸带,即在纸带上打出一系列的小孔(修改程序就是给纸孔打补丁)。程序员需要先将计算机的指令换算成二进制数字,然后把二进制数字组成这些小孔,每个小孔代表一个信号;数十个小孔构成一条指令,驱使计算机做一个动作!这个方法一直延续到1980年初,笔者之一曾于1983年在北京大学的机房里穿过几个月的孔,在庞大的机房里体验过那时编程的艰辛。

正当崔俊芝对于水坝计算问题一筹莫展的时候,冯康在计算所的一次学术报告上重点讲述了一篇文章,这篇文章让崔俊芝茅塞顿开。经过了漫长的黑暗摸索,崔俊芝终于看到了光亮与希望。

### 破题刘家峡

作为三室全面的业务指导,冯康经常要在三室或者全所范围内作学术报告,分享一些他近期研究以及读书的心得。在一次报告中,冯康提到的是Synge的一篇文章,并提出把微分方程写成变分形式,用变分的原理来推导差分格式。

冯康提到的那篇文章是Prager和Synge于1947年发表在美国《应用

数学季刊》上的一篇文章。Synge在应用数学和力学方面作过很多杰出的工作,也是钱伟长院士在多伦多大学读博士时的导师。他本人后来当选为英国皇家协会院士。他的二女儿Cathleen Morawetz是柯朗数学研究所的著名教授,曾任美国数学学会会长,并当选为美国科学院院士。他的叔父约翰·辛格(John M. Synge)是爱尔兰著名诗人,也是英国皇家协会院士,代表作品包括《西方世界的花花公子》和《骑马下海的人》。他的另外一个远亲曾获1952年诺贝尔化学奖。所以这也是一个传奇的文化世家。

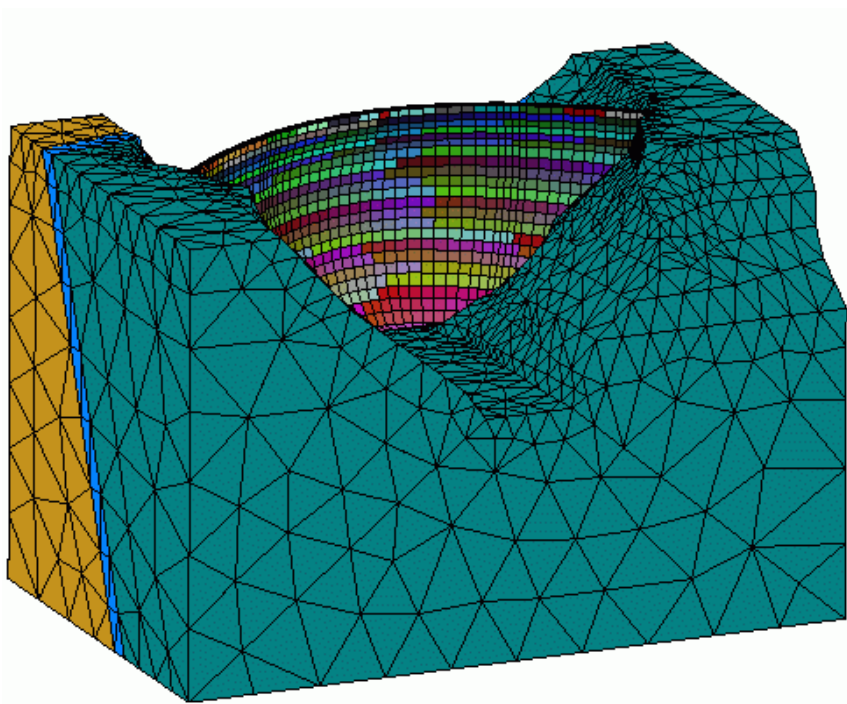
冯康的这次报告给了黄鸿慈和崔俊芝等人很大的启发,他提出的用变分原理进行差分计算的思想为许多年轻学者提供了新的研究方向。

1963年夏天,在冯康的带领下,三室的同事们掀起了钻研与探讨差分方法的热潮。他们从中科院的图书馆借来美国的Forsythe和Warsow二人于1960年写的一本书,叫做《偏微分方程的差分方法》。书中有两个关于椭圆方程计算的章节,讲到了变差分格式。三室的同事们如饥似渴地争相阅读这本书,由于当时没有复印机,他们就自己抄公式、刻钢板,进行油印。

1963年水坝问题的计算已经由二组上升成为三室亟待解决的攻坚难题。

在冯康的筹划部署下,二组的水坝计算组分成三个小组,从三个不同方向对水坝计算进行系统研究。

三个小组的划分如下:二组副组长林



有限元计算大坝的三维网格。1960年代的网格仅仅是二维的。



忠楷带领一个小组，把大坝的基础砍掉，用应力函数的方法进行计算；二组组长魏道政带领一个小组，从平衡方程出发，把应力——应变关系代入拉梅方程进行计算，崔俊芝在这个小组。剩下的一个小组由蔡中熊带领，王荃贤在这个小组，从变分原理出发，直接用位移差商代替位移导数进行计算。三个小组要定期交流，并将结果向冯康汇报。

1963年10月，魏道政突发急性肝炎，住进了北京郊区潭柘寺医院。崔俊芝只好带着由魏道政指导毕业设计的科大64届毕业生魏学玲继续进行计算。为了尽可能地保证在坝体内部任意局部区域上的应力平衡性，崔俊芝与魏学玲采用了基于拉梅方程的积分守恒的差分格式，内部采取不等距矩形网格，边上采用三角形网格，使所有计算节点都落在坝体内部或边界上。二人分工合作，终于在1964年春天来临的时候算出了一组新的

结果——利用积分守恒格式的计算结果。经过细致地应力校核，其结果不仅在边界节点附近应力是基本平衡的，且在坝体内部任意局部区域上的应力也是基本平衡的。

当崔俊芝把这样的计算结果交给刘家峡水坝工程设计组的人员时，他们露出了满意的微笑。

在获得用户满意的计算结果之后，崔俊芝对原来由他和魏学玲合作编制的程序进行了重大的修改，采用标准化的信息格式，编制出了第一个平面应

力分析标准程序（104 计算机版本）；同年，崔俊芝还编制了平面应力分析标准程序（119 计算机版本）。利用这两个程序，崔俊芝为刘家峡工程计算了多个（不少于十个）设计方案。

与此同时，崔俊芝和王荃贤一起，把基于积分守恒格式的差分格式和基于变分原理的差分格式一一进行了对比，发现在边界节点上其差分格式是一致的；它们正是后来“有限元法”得到的边界节点上的差分格式；对于内部节点的差分格式也进行了组合优化，形成了当时认为是最好的差分格式。以这些差分格式为基础，崔俊芝、王荃贤、赵静芳三人合作编制了另一个

平面应力分析标准程序（109-乙 计算机版本）。利用这个程序，他们为多个不同类型的结构工程进行了平面应力分析。

1964年“五·一”节，对于三室的同事来说心里是暖洋洋的，经过多年的刻苦攻关、废寝忘食，水坝计算的系统研究终于有了结果，刘家峡大坝的应力分析已经使用户满意。“五·一”过后不久，在计算所302房间，冯康、黄鸿慈、崔俊芝等人激动地向刘家峡大坝工程设计组的负责人员进行了汇报。

破解刘家峡大坝应力分析的计算难题是计算所三室对社会主义经济建设的一大贡献。1966年10月刘家峡大坝截流成功时，三室有关人员曾收到一份落款为“中共中央、国务院、中央军委、中央文革小组”的明码电报，祝贺和表彰计算所三室在刘家峡水电工程建设中的突出贡献。

1964年10月，为迎接即将在哈尔滨举行的全国计算机会议，三室先召开了一个预备会议。会上，黄鸿慈和崔俊芝分别作了关于理论和计算方面的报告。黄鸿慈的报告主要讲了拉普拉斯（Laplace）方程和平面弹性问题的离散方法的误差估计，但是在较强的解的光滑性条件下完成的。黄对这个

## 发现有限元

人们原本以为，破解了刘家峡水坝的计算难题，事情就应该画上了一个圆满的句号。谁知，时隔不久，由刘家峡大坝的计算更引发了另一个美丽的结局。

冯康在指导与总结刘家峡水坝计算的过程中，发现了一整套求解偏微分方程边值问题的计算方法，一个用变分原理进行差分计算的方法。即通过剖分插值，构建分片多项式的函数空间，来求解偏微分方程。这就是著名的有限元方法。虽然冯康当时把它叫做基于变分原理的差分方法。这一方法的发现在计算数学领域中引起了强烈的震动。

早在1962年2月，黄鸿慈在《计算机动态》的《计算数学》专刊中发表了一篇题为“求解重调和方程最小特征值问题的一种差分方法”的论文，文中提出一种求解四阶微分方程的C1-元（即导数连续的分片多项式空间）方法。这篇文章被称为“具有早期有限元的思想”，后来也成为有限元方法报奖的四篇文章之一。当时，冯康对黄鸿慈的这篇文章大加赞赏，黄还因此被提升为助理研究员，获得了晋升两级工资的嘉奖。

1964年10月，为迎接即将在哈尔滨举行的全国计算机会议，三室先召开了一个预备会议。会上，黄鸿慈和崔俊芝分别作了关于理论和计算方面的报告。黄鸿慈的报告主要讲了拉普拉斯（Laplace）方程和平面弹性问题的离散方法的误差估计，但是在较强的解的光滑性条件下完成的。黄对这个

结果很满意，还专门向冯康单独汇报了这个结果并征求他的意见。令黄费解的是，冯康听后表现得很冷淡，并没有象两年前给他提工资那次那样热情。一年后，黄鸿慈了解到，其实冯康当时正有一个从广义函数出发的收敛性证明，也是他那篇伟大的开创性文章中讲述的工作。只不过这一次冯康并没有和黄交流。

1965年5月，全国计算机会议在哈尔滨召开。由于当时黄鸿慈已经去河南信阳“四清”劳动，他没有机会听到冯康那篇精彩的报告。后来冯康的报告又以论文的形式发表在1965年第4期《应用数学与计算数学》期刊上，题为“基于变分原理的差分格式”。

而根据张克明等三室领导决定，黄和崔俊芝两人需要把1964年10月在三室作的报告删改合并，发表于1966年第1期的同一个期刊上，题为“求解平面弹性问题的差分方法”，论文的合作者还有王荃贤、赵静芳、林宗楷。

黄鸿慈、王荃贤、崔俊芝等人的文章给出了有限元方法的误差估计，这是文献可查的非常早的误差估计结果，但是在较强的解的光滑性假定下获得的。而冯康在其论文中，用高深的数学理论，在极其广泛的条件下证明了方法的收敛性和稳定性，建立起有限元方法严格的数学理论框架，为有限元方法的实际应用提供了可靠的理论基础。这篇论文被公认为是中国学者先于西方创造有限元方法理论的标志。

由于黄鸿慈的文章没有单独发表，他

也怀疑是冯康从中作梗，因此也为冯康与黄鸿慈多年后的恩怨埋下了伏笔。冯康的这篇文章与黄鸿慈等人的文章最终成为了有限元报奖的重要材料。

如同任何科学技术的创新都是社会和科技发展的必然结果一样，在那样一个令人激情燃烧的年代，在一个国家呼唤计算数学飞速发展的年代，冯康

团队与他们的有限元方法呼之欲出。冯康在许多场合都反复提到他的那篇文章是在水坝计算的基础上写出来的，有限元方法的提出是集体智慧的结晶。

是的，应当说，如果没有三室同事水坝计算的大量实践，冯康就不会

发展有限元方法的系统理论。然而，如果没有冯康的数学境界与思想高度，也不会有有限元方法的发现和理论化。冯康的贡献不仅仅是一个数学理论的

证明，而是一个方法从数学角度的重新发现，并且使得这个方法得以更广泛地应用。

许多国际著名科学家对冯康的这一成果都给予极高赞誉和充分的肯定，也把这一成果摆到了它应该占有的地位上。

正如我们在故事的开篇提到的，法国著名科学家、法国科学院院长里翁斯(J. L. Lions)院士赞扬冯康是在对外隔绝的环境下独立创始了有限元方法，位列世界最早。曾任美国总统科学顾问及美国数学会会长的彼得·拉克斯(P. Lax)院士后来在纪念冯康的文章中也写道：冯康独立于西方并行地创造了有限元方法的理论，在方法的实现及理论基础的创立两方面都做出了贡献。

中国的国家领导人在讲话中多次提到有限元的成就。

2002年5月28日，时任国家主席的江泽民在两院院士大会上发表了重要讲话，他说到：在当代世界科技发展的史册上，我国科技工作者也书写了光辉的篇章。在数学领域创立的多复变函数的调和函数，有限元方法和辛几何算法，示性类及示嵌类的研究和数学机械化与证明理论，关于哥德巴赫猜想的研究，在国际上都引起了强烈反响。

2008年12月15日，胡锦涛主席在纪念中国科协成立50周年大会上发表讲话也提到了有限元方法，并在新中国成立以后的众多科学成果中将其列在第一位。

有限元方法的发现和其数学理论让冯康攀上了数学研究的第一个巅峰。

### 如同任何科学技术的创新都是社会和科技发展的必然结果一样，在那样一个令人激情燃烧的年代，在一个国家呼唤计算数学飞速发展的年代，冯康团队与他们的有限元方法呼之欲出。

#### DIFFERENCE SCHEMES BASED ON VARIATIONAL PRINCIPLE<sup>②</sup>

#### 基于变分原理的差分格式

##### 1 Introduction

There are four stages in the process of solving equations of mathematical physics, from primitive formulations to numerical solutions.

1. Physical mechanisms, such as the conservation laws and kinematics. It also includes concrete data such as parameters, geometrical shapes and other original information.

2. Mathematical formulation, it is usually presented in continuum forms such as differential or integral equations and their initial or boundary conditions for determining the solutions.

3. Discrete models, they are usually algebraic equations such as difference equations.

4. Computational algorithms, this is the arithmetical steps in resolving discrete equations.

For convenience let us call the passage from the stage 1 to the stage 2 the mathematical formulation, the passage from 2 to 3 the discretization or algebraic formulation, the passage from 3 to 4 the algorithmization or arithmetical formulation. This paper is devoted mainly to discretization.

Criteria for a good discrete model are:

1. Preservation of mathematical and physical characteristics of the problem.

2. Reasoned accuracy.

3. Cost-effectiveness in computing time and computer storage.

4. Simplicity, universality, flexibility and easiness in apprehension.

Points 1 and 2 are always relevant in both qualitative and quantitative aspects. Points 3 and 4 are abstract feasibility, related in both material and human environments. Certainly, emphasis may vary with different situations. However, we could be able to solve our problems better if, we rather than in an isolated and formalistic way, we study them instead in an integrated way by considering all stages of our problems in their sequential order.

② 冯康《基于变分原理的差分格式》，Journal of Applied and Computational Mathematics, 5: 4, 401-416, 1966.

冯康1965年论文的英译版



## 有限元方法

提到二十世纪对人类具有重大影响的发明，人们自然会联想到飞机、电视、卫星、电子计算机、无线通讯技术等这些与人们近在咫尺、息息相关的发明创造，事实上，人们可能并不知道，在工程设计领域还有一个直接关系到国计民生的重大发明，那就是有限元方法。

有限元方法对于数学界、物理学界、工程界的人士来说是再熟悉不过的，而对于普通人来说却显得陌生而遥远。其实，人们可以不知道有限元，却一定知道今天的飞机可以造得庞大而又安全；人们可以不知道有限元，却一定知道今天的大坝可以造得坚固而又伟岸；人们可以不知道有限元，却一定知道今天的手机可以让沟通变得畅快而又简单……有限元间接地与人们的生活发生着千丝万缕的联系。

有限元方法的早期发展有着较漫长的历史。

结构力学家在对飞机结构应力分析的研究中，最早导致有限元方法及其技术的诞生。飞机在载荷变化很大的环境下工作，会经受复杂的应力变化。这时，结构的承载能力、断裂疲劳寿命、结构的可靠性和耐久性，都需要有合理的分析。这些分析，直接影响设计与制造的成本。在计算机出现之前，这些问题的解答主要依赖各种形式的结构实验。由于这些实验基本上是采用和飞机的

大小差不多尺寸的模拟，因此实验规模之大，花费之高是可想而知的。一架好端端的飞机在巨大的全机静力试验厂房内，通过液压传动的协调加载设备，在一声巨响之下，将其拉得支离破碎，真是非常可惜。

1950年代中，美国飞机设计工程师 M.J. Turner 与大学教授 R.J. Clough 合作在 1956 年的《航空科学杂志》上提出了飞机结构分析的直接刚度法，同时欧洲的 Argyris 教授创导了飞机结构分析矩阵分析方法，他们被认为是当代有限元法诞生的起点。但作为一种求解数学物理问题的近似方法，这一方法的原型甚至可以从大数学家柯朗 (R. Courant) 1940 年代发表的论文中找到。但是由于当时计算机尚未发明，柯朗的方法因计算量太大并未引起科技界的重视。

按力学应力平衡方法装配起来的有限元系统，被当作为复杂结构应力 - 应变分析的一个近似的数学模型，是有限元化繁为简指导思想的根本。由于几

何形状简单，受力变形单纯，每一单元的应力 - 应变关系可根据有限的几个节点位移直接地表达出来。这种按力平衡原理组合可等价于单元刚度矩阵的某种叠加，于是一个复杂的应力 - 应变问题能够归结为一个线性代数方程组问题。也正是这个原因，力学家们一开始把有限元方法叫做直接刚度法或矩阵方法。

这是结构力学家发明的有限元法的思维路线。而真正对有限元方法有所突破，并使得有限元方法得以大范围、广泛应用的却是计算数学家们的贡献。特别是中国数学家对于有限元方法的创导和发展具有不可磨灭的贡献。

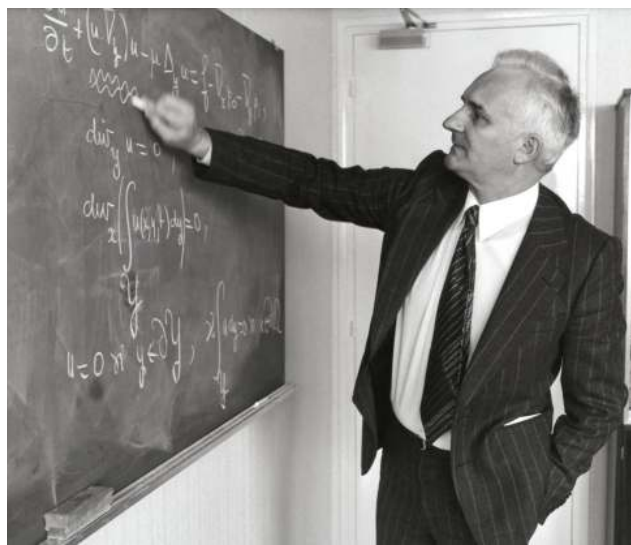
中科院计算所三室成立的主要任务是研究计算数学，计算数学作为数学的一个重要分支，研究的内容包括算法设计和算法分析。在三室，一组、二组和三组的主要研究工作是求解连续的偏微分方程问题，既把连续的偏微分方程转换为离散的数值代数问题。这样可以把极少可能找到解析解的连续

问题转化为离散的有限维问题，进而计算得到近似解。这个过程叫数值偏微分方程方法。

微分方程的定解问题就是在满足某些定解条件下求解微分方程的解。在空间区域的边界上要满足的条件称为边界条件。如果问题与时间有关，在初始时刻所要满足的条件，称为初值条件。不含时间而只带边界条件的定解问题，称为边值问题（比如水坝应力分析问题）。与时间有关而只带初值条件的定



2005 年，拉克斯从挪威王子手中接过约百万美元的数学大奖，阿贝尔奖。拉克斯对冯康的贡献非常赞赏。



法国科学院院长里翁斯对冯康的工作给予高度评价

解问题，称为初值问题。同时带有两种定解条件的问题，称为初边值混合问题（如天气预报问题、石油勘测问题等）。

大多数微分方程问题往往求不出解析解，或者其解析解不易找到。所以采用可行的数值解法。在1950年代以前，最主要的数值求解方法是有限差分方法，简称差分方法。它的基本思想是把问题的定义域进行矩形剖分，然后在网格点上以用网格节点上的函数值的差商替代控制方程中的导数进行离散，从而建立以网格节点上的值为未知数的代数方程组。该方法是一种直接将微分问题变为代数问题的近似数值方法，数学概念直观，表达简单。此外，还要研究差分格式的解的存在性和唯一性、求解方法、解的数值稳定性、差分格式的解与原问题的真解的误差估计，以及差分格式的解当网格尺寸充分小时是否趋于真解（即收敛性）等等。

在有限差分理论方面起到先驱作用的学者包括计算机之父冯·诺伊曼（von

Neumann），他给出了基于傅立叶级数的稳定性分析方法。沃尔夫奖获得者彼得·拉克斯（Peter Lax）提出了等价性定理，建立了差分方法稳定性和收敛性的内在联系。还有俄国数学家萨马斯基（A.A. Smarskii）院士系统地发展了有限差分理论。

另外，马尔丘克院士（G.I. Marchuk）提出了交替方法，使高维度空间的差分方程求解变得更有效，后者于1980年代曾任苏联部长会议副主席和苏联科学院院长。

有限差分方法直观、理论成熟，精度容易预测。但是对区域的规则性要求较高，对于不规则区域处理繁琐。这些缺点已被证明可以用有限元方法来弥补。对于有限元方法，其基本思路可用下面六点说明：第一、根据变分原理建立与微分方程初边值问题等价的积分表达式，这是有限元的出发点。第二、区域剖分。根据求解区域的形状及实际问题的物理特点，将区域剖分为若干个相互联接

但又不重叠的单元。第三，确定单元基函数。根据单元中节点数目及对近似解精度的要求，选择满足一定插值条件的函数作为单元基函数。第四，单元分析。将各个单元中待求解的函数用单元基函数的线性组合进行逼近；

再将近似函数带入积分表达式，并在单元上进行数值积分，可以获得含有待定函数节点近似值的代数方程组，称为单元有限元方程。第五，总体合成。将区域中所有单元的有限元方程进行累加，形成总体有限元方程。第六，求解有限元方程。由于最后得到的是代数方程组，采用适当的数值代数方法，可求得各节点的函数值。这个方法最重要的优点之一是上述的第二步，其单元可以不是矩形，这样就可以应付任意形状的多边形区域。在实际计算中，有限元方法可以应用于任何的求解区域。

这些有限元方法的叙述，是我们今天在计算方法的教科书中常见的内容。

## 数学家与有限元

计算所三室的数学家们当时面临解决大坝受力问题，从不同的角度也达到了有限元法的统一形式。冯康和他的团队考虑的是一组描写物理力学问题的连续的偏微分方程的近似解，将这

**冯康曾用简单形象的比喻形容有限元方法：求解微分方程的定解问题好象是大海捞针，但有限元离散后，寻求近似解就好像是碗里捞针。**

些偏微分方程用泛函分析的方法转化为求解能量极小的变分问题。再将所有可能的场变量局部近似，在场内每个简单的三角形或四边形区域上，假定场变量具有低阶多项式的近似表达式。这样，无穷自由

度的问题就可以近似成有限自由度的Ritz-Galerkin问题。如前面描述的，在实际计算过程中，冯康和同事们发现现有的计算方法对许多问题的求解并不适用，难以满足工程应用的实际需求。他注意到同一个物理问题可以有



多个数学表达形式，而这些数学形式在理论上是等价的。过去人们在求同思维的驱使下，往往只注意早已广为人知的微分方程形式，而不注意其它形式。计算数学家往往也只研究已有的计算方法，或从微分方程形式去构造一些新的差分格式。但冯康并不满足于此。

求异思维使冯康决心创建和发展新的计算方法。既然一个物理问题可以有多个等价的数学表达形式，为什么非从微分方程形式出发呢？他注意到了久被忽视的变分形式。为了克服传统计算方法难以处理几何形状与材料的复杂性，难以保持物理问题的主要特征，冯康开辟了椭圆型方程计算方法的系统研究。在大量计算经验的基础上，通过系统的理论分析及总结提高，把变分原理与剖分逼近有机结合，既保持了物理问题的主要特征，又以“分整为零、裁弯取直、以简驭繁，化难为易”的新思路，妥善解决了几何形状和材料的复杂性问题，创造了一整套从变分原理出发求解偏分方程问题的数值方法。



意大利数学家 Brezzi (左一) 是有限元理论的重要代表人物。1983 年，中法有限元会议在北京召开，这是冯康和黄鸿慈会议期间与 Brezzi 夫妇的合影。



美籍捷克裔数学家巴布什卡 (Babuska) (左三) 是有限元的大师之一。这是他上世纪八十年代初访问北京时和冯康 (中)，黄鸿慈 (右三)，林群 (右二) 等的合影。

冯康曾用简单形象的比喻形容有限元方法：求解微分方程的定解问题好像是大海捞针，成功的可能是微乎其微；但有限元离散后，寻求近似解就好像是碗里捞针，显而易见容易多了。

需要提出的是以冯康为首的中国科学院的研究集体在用计算机做水坝应力——应变分析的过程中，克服了传统方法的种种缺陷，创造性地提出基于变分原理的差分方法。当时中国和西方的交流几乎中断，这个方法和西方称为有限元的方法完全一样。他们不仅提出了方法，而且更重要的是在世界上最先给出了这一方法的可靠性理论，开辟了有限元数学的新篇章。冯康的论文是国际公认的最早有关有限元理论的奠基性工作；在对函数解析性质要求非

常一般的情形下，给出了方法的稳定性和收敛性证明。需要指出的是，很多介绍冯康工作的文章中都提出冯康 1965 年的经典性文章（后由李波翻译的英文版本 Difference Scheme Based on Variational Principle 全文可见 <http://lsec.cc.cn/fengkangprize/article.html>）给出了近似解的误差估计，但这不符合实际的。冯康的论文并没有给出误差估计，这方面的工作由捷克的 M. Zlamal 于 1968 年给出（On the Finite Element Method, 德国出版的《数值数学》，第 12 卷，394-409 页）。Zlamal (1924-1997) 时任捷克布尔诺 (Brno) 科技大学教授。Zlamal 的文章用到 J. Céa 于 1964 年用法文发表的一个重要不等式以及 P. G. Ciarlet 1966 年的博士论文。

由中国数学家冯康等开创的这一研究，在其后的数十年中，捷克 / 美国（代表人物 I. Babuska）、美国（代表人物 J. Douglas 和 J. Bramble）、法国（代表人物 P. Ciarlet 和 P. Raviart）、意大利（代表人物 F. Brezzi）等许多学者广泛参



法国科学院院士、中国科学院外籍院士、  
香港城市大学教授 P. G. Ciarlet

与，最终确定有限元的逼近性质、逼近精度、有限元尺寸和多项式阶次的关系，使有限元方法实现质的飞跃。在这些分析中，广义函数论、索波列夫空间理论、偏微分方程的希尔伯特空间方法等现代数学理论都起着重要的作用。顺便说一下，前面提到的法国人 P. Ciarlet 2003 年

以后一直在香港城市大学工作，他是法国科学院院士，今年更锦上添花地成为中国科学院外籍院士。他于 1970 年代末写的有限元专著，成了研究有限元理论的学者们必读的参考书。

时至半个世纪后的今天，有限元方法的理论不仅在应用数学领域被广为接受，即使在纯数学领域也得到认可。2002 年，在北京举行的世界数学家大会上，美国的 D. Arnold 作了一个小时的大会报告。在 2006 年西班牙马德里举行的世界数学家大会上，意大利的 A. Quarteroni 也作了一个小时的大会

报告。两个人都是有限元方面的专家。在纯数学统治下的数学家大会上，连续两届有两个一个小时的报告，足见有限元这一研究方向受到的重视程度。

由于数学家揭示了有限元的普遍性，由于其 Ritz-Galerkin 方法的理论基础，使得有限元方法和技术已经成为当今科学与工程计算的重要方法，其应用更是早已跨越出航空航天和土木建筑，进入石油化工、电机工程、国防、风电能源等与国民经济密切相关的重大行业，以及与民生密切相关的电子电器、汽车制造等行业领域。近些年，随着社会主义现代化脚步的加快，有限元也应用于解决包括生物计算、医学计算、电磁场计算、数值天气预报、数值海洋预报等很多重大的问题。有限元方法将很多成功的数学方程转化为近似的数字式图象。

### 毋庸置疑，有限元法的发现让冯康成就了数学骄子的梦想，让他得以自信地步入世界级数学大师的殿堂。

作用。在医学方面，医学图像诊疗向导在当今的医学界已经有广泛的应用。医师们可通过定量分析与仿真模拟技术来制定治疗计划和外科手术。这些仿真模拟往往和有限元的应用是分不开的。

值得一提的是，有限元的精度问题目前也越来越受重视。事缘 1991 年 8 月 23 日挪威的一个海上钻井台，仅仅是因为一个有限元的计算结果不够精确，应力计算低估了百分之四十七，导致海上平台倒塌，损失超过七亿美元。虽然这二十年货币已经贬值很多，但

即使是今天来看，七亿美元也是很惨重的损失。

毋庸置疑，有限元方法的发现对二十世纪乃至未来世界的经济都会产生重大的影响，有限元法的发现也让冯康成就了数学骄子的梦想，让他得以自信地步入世界级数学大师的殿堂。

尽管在有限元发现之初，冯康和他的团队并没有引起太多的重视与奖励，甚至还引来了不少的争议，但是经过历史时间的磨砺，经过科技进步的检验，有限元依然成为冯康最闪光的成就，而提到有限元我们自然会和冯康的名字连在一起。

未完待续



作者之一于 2010 年  
在北京采访崔俊芝院士