数学聊斋连载

（连载二）

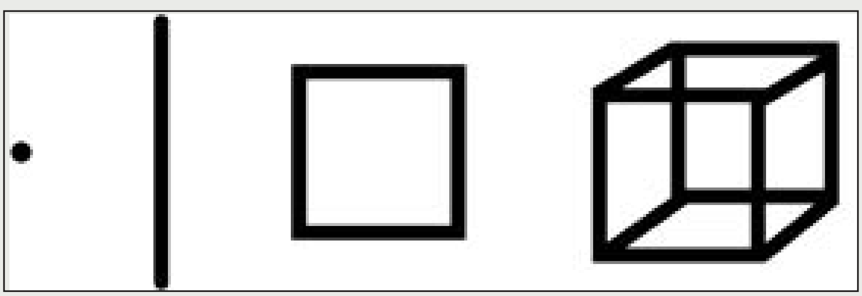
李尚志

人挤成照片之维数变化

有一次与几名中国学者和两名俄罗斯数学家一起吃饭。吃到后来照例问一个问题：吃什么主食？于是用英文问："Rice or noodle?"（米饭还是面条？）谁知这两位俄国人听不懂"noodle"(面条)这个词。几个中国人用手比划了好一会儿还是没能让他们搞懂。我急中生智地说："Rice is zero-dimensional, but noodle is one-dimensional."（米饭是零维的，面条是一维的。）不愧是数学家，两位马上就懂了。维数是数学上常用的概念，点的维数是 0，线的维数是 1，面的维数是 2，立体的维数是 3。说米饭是"零维的"，就是说它可以看成一个一个孤立的"点"组成的，说面条是"一维的"，就是说它是一条一条的线。依此类推，"飞饼"很薄，厚度可以忽略不计，可以认为是二维的；馒头自然就是三维的了。当然，严格说起来，米饭、面条、飞饼都是三维的。

说起维数，还有一件有趣的事：1969 年我第一次路过重庆，那时的公共汽车非常拥挤。有人形容这是"把人挤成照片了"。人是三维的物体，被挤成二维的照片，虽然太夸张了一些，但将拥挤的程度形容得活灵活现。

人是三维的物体，体积不为 0。挤成二维的照片，体积就变成了 0。行列式也是这样：三阶行列式表示平行六面体的有向体积，如果其中有某两行相等，就是说平行六面体的三条相邻的棱中有两条重合，平行六面体退化成平面图形，也就是被"挤成照片"了，体积变成 0。类似地，二阶行列式表示平行四边形的有向面积，如果两行相等，"平行四边形"的相邻两边重合，平行四边形退化为一条线段，面积为 0。一般地，n 阶行列式可以想象成一个 n 维立体的 n 维体积，如果它有某两行相等，"n 维立体"退化为 n-1 维或者更低维数的图形，"n 维体积"当然就等于 0。



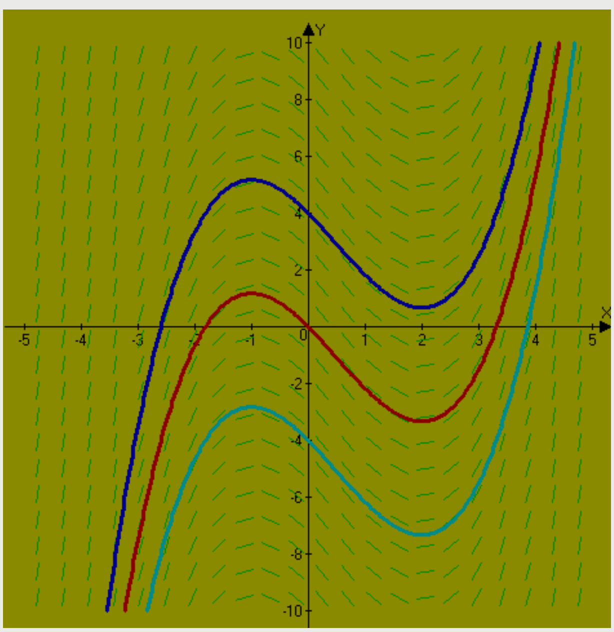
从左至右：0 维是一点，1 维是线，2 维是一个长和宽(或曲面)，3 维是 2 维加上高度形成体积面

飞檐走壁之电影实现

——微积分基本定理

小时候看电影，看见电影中的人物轻轻一跳就上了房顶，觉得演这些人物的演员真是了不起。世界跳高记录也只有 2 米多一点，还不如这些演员跳得高。于是就想：如果这些演员到国际上参加跳高比赛，不就可以打破世界跳高纪录并且拿到世界冠军了吗？

后来知道了这些演员并不能从地上跳到房顶上，电影镜头可以通过特技来实现。比如说可以让演员从房顶往下跳到地面，将往下跳的过程用电影胶片拍下来，将拍得的胶片颠倒顺序由后往前放映，看到的效果就是从地面往上跳到房顶了，甚至可以从水中往上跳到跳板上。数学中像这样“倒过来放映”的事情也不少。



函数 $F(x)=x^3/3-x^2/2+c$ 的梯度场。虽然三条曲线相差常数，但它们在同一个 x 处的导数是一样的。

比如，如果已知运动物体的路程对时间的函数关系 $S=S(t)$，求导数就可以得到速度函数 $V=S'(t)$，这比较容易。反过来，要由速度 $V=S'(t)$，求路程 $S=S(t)$，就要做定积分，也就是要将所经过的时间划分成许许多多很短的时间间隔，在每一小段时间内将物体的运动近似地看成匀速运动求得一小段路程，将各段路程相加得到总路程的近似值，再让各时间间隔长度趋于 0，求极限得到总路程的准确值。但是，这样太困难，就好像从地面跳到房顶那样困难。我们也可以化难为易，采用“从房顶往下跳”、再“倒过来放映”的方法，找到一个函数 $F(t)$ 使得由它（通过求导数）得到的速度函数 $V=F'(t)$ 正好等于预先已知的 $V=f(t)$，这样就可以比较容易得到所需的 $S=F(t)$。这样的 $F(t)$ 称为 $f(t)$ 的原函数。通过这样“倒过来放映”的方法求定积分，这就是微积分基本定理。

另一个例子是由数列的通项公式 $a(n)$ 求前 n 项之和 $S(n)$。比如，已知 $a(n)=n^2$ 求 $S(n)$，也就是求前 n 个正整数平方和公式。中学数学中将这个公式作为数学归纳法的证明的例子来讲。但这个公式很难想出来，就好像从地面跳到房顶上那么难。反过来，如果已知数列的前 n 项和的公式 $S(n)$ 反过来求通项公式 $a(n)$，就很容易：

$$a(1)=S(1),\ a(n)=S(n)-S(n-1),\ n=2,3,\cdots$$

比从房顶跳到地面还容易。能不能用“倒过来放映”的方法，设法找一个 $S(n)$ 使它求出的通项

$$a(n)=S(n)-S(n-1)$$

正好等于已知的 n^2？容易发现，当 $S(n)$ 是 K 次多项式时，$S(n)-S(n-1)$ 是 $K-1$ 次多项式。因此考虑三次多项式 $S(n)=an^3+bn^2+cn$ 很容易通过解方程求得待定系数 a,b,c，使得

$$S(n)-S(n-1)=n^2$$

问题就迎刃而解了。