卢丁和他的《数学分析原理》

—— 谨以本文纪念赵慈庚教授百年诞辰

蒋迅

卢丁(Walter Rudin)1921年5月2日出生在维也纳的一个犹太家庭里。早年的卢丁有些不幸。1938年德奥合并时全家逃到法国，1940年法国投降时，卢丁又逃到了英国。在英国，他加入了皇家海军，直到二战结束。战后，他到了美国。1945年秋季到杜克大学攻读博士学位，1949年6月获得了博士学位(本书背面的介绍说1953年是不对的)。然后他在麻省理工学院、罗切斯特大学任教数年，这本《数学分析原理》就是他在麻省理工学院教书时写的。当时他获得博士学位才两年。以后他转到威斯康辛大学的迈迪森分校任教授，直至退休。在杜克，他与另一位数学家玛丽•艾伦(Mary Ellen Estill)相遇，1953年结婚，晚年一起居住在威斯康星州的迈迪森。卢丁于2010年5月20日去世。

卢丁(Walter Rudin)，著名数学教育家

卢丁一共写过七本书：著名的分析学三部曲《数学分析原理》、《实分析与复分析》、《泛函分析》以及《群上的傅里叶分析》、《多圆盘上函数论》、《单位球C^n上的函数论》和自传《我记忆中的路》(The Way I Remember It)。其中,《数学分析原理》和《实分析和复分析》常常分别被数学学生们称作“小卢丁”(Baby Rudin)和“大卢丁”(Big Rudin)。而被称为“小卢丁”的那本就是我要介绍的《数学分析原理》(Principles of Mathematical Analysis)。

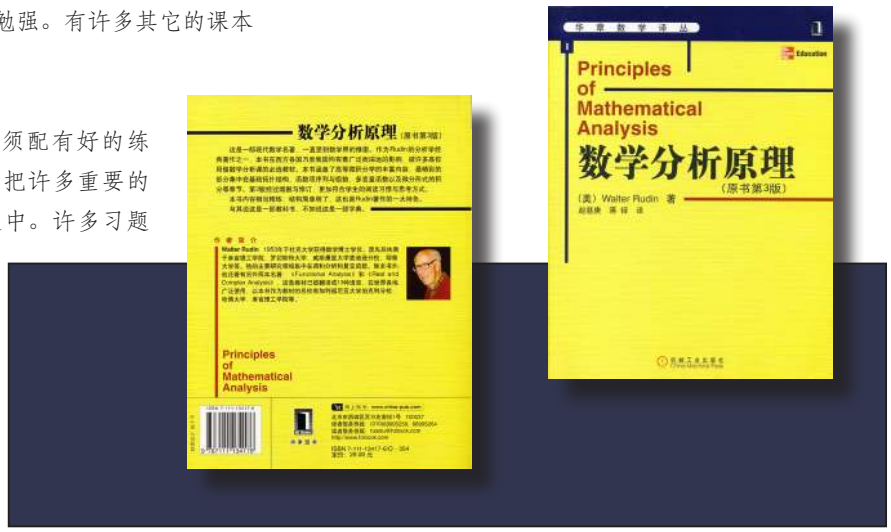
卢丁的《数学分析原理》是古典分析的经典教科书，在美国很受欢迎。即使象陶哲轩(Terence Tao)那样的著名教授，已经写了自己的《陶哲轩实分析》，也仍然使用这本书作为教材。它恐怕是数学教材中被引用最多的教材了。美国的数学系教程设计与中国有些不同。美国的理工科大学生在入学后不管是哪个系的都统统学微积分课。这样做对数学系学生的好处是：第一，数学系学生可以更多地接触到应该得到的感性认识和大量的广泛的应用；第二,万一发现自己不适合留在数学系的话，可以立即转系而不会有什么不适应(同样，其他系的学生转到数学系也相对容易)。当一个数学系学生决定自己要学这门课时，他应该已经学完了基本的微积分课，也通过线性代数、离散数学等课程得到了严格推理的基本训练。卢丁的书正是基于这个背景写的。因此，它的起点比较高，特别是字里行间有些有意识的“遗漏”。这对学生也许是一个挑战，但如果你真的喜爱数学的话，不正是因为数学富有挑战吗？所以，当你读这本书的时候，一定不能跳跃，而是要扎扎实实地读懂每一行，每一段,补上证明中“遗漏”的步子。笔者看到有些人表示对此书的失望，很可能就是因为他们没有真正地做好了准备就匆忙开始阅读了。

本书由实数和复数的简单讨论开始(第一章)，但这一章的最大亮点是在它的附录里：戴德金分割。它告诉你如何通过有理数来构造无理数。第二章是基本的拓扑知识，这些都是后面要用的。所以它们看似简单，但不能忽略。注意作者在这里讲的仅仅是拓扑空间的一个特例：距离空间。更广义的拓扑学需要专门的课程。这样的处理与中国不同。其原因还是因为它已经假定了微积分的基础了。第三章中的数列和极限也是后面要用到的基本知识，这些对于中国的学生也许是不太难的。作者把极限的正式引入推迟到数列的收敛之后(第四章)显然符合循序渐进的原则，也是国内大多数教材的思路。注意作者这时候已经不是在普通的实数空间里，而是一

般的距离空间讨论了。这样的高起点将在后面发挥作用。假如你已经学过初等微积分的话，第五章讲微分可能没有太多的挑战，读者应该注意罗毕塔法则的重要性。(其实这个法则本应属于贝努利兄弟的，见本刊第一期万精油的文章。)积分部分(第六章)关于黎曼-斯蒂尔吉斯积分的一章是作者在第三版花了较大工夫的部分。这是在初等微积分的基础上对(实值、复值和向量值)积分概念的严格化。注意有些定理是基于黎曼积分进行讨论的。其中的微积分基本定理、分部积分是极为重要的。函数序列与函数项级数(第七章)是第三章中数列与级数的讨论的延伸。这可以说是本书最重要的部分了。本章要解决的是两个极限交换的问题，魏尔斯特拉斯一致逼近定理起了关键作用。有了第七章的准备，作者在下面的一章里讨论了一些特殊函数。指数函数是作为一个特殊的幂函数定义的，对数函数和三角函数则从指数函数导出。傅立叶(Fourier)级数的内容很重要。注意正如作者指出的，对傅立叶级数的许多讨论需要后面第十一章里的勒贝格积分。关于Γ函数的一段可能不太重要，不过，如果你将来想往概率统计方向发展，还是不应该放过的。第九章转到多元函数。作者首先介绍了线性代数的基本性质。但是线性代数不能仅仅被看成是学习多元微积分的工具。本章里的线性算子就是泛函分析中的更为抽象的巴拿赫(Banach)空间中的重要概念。反函数定理是另一个重要的内容。第十章是微分几何导引。主要是斯托克斯(Stokes)定理。笔者所在学校当年是单独作为一门课“流形上的微积分”来讲授的。坦率地说，它有一定的难度。不过，对于想向微分几何或偏微分方程的同学们是不能放弃的一章。第十一章讲的是勒贝格积分，这一章对于本书来说似乎有些超出了范围。笔者认为读者不必过于勉强。有许多其它的课本是专门讲这个课题的。

不用说，一本好的教材必须配有好的练习题，这本书也不例外。作者把许多重要的结果和重要的反例放在了习题中。许多习题有提示。读者应该认真地尝试本书中的所有练习题(注意，习题的难易不一定是从易到难的)。除非你是象陶哲轩那样聪明，很有可能有些题会难倒你。但是，你会发现受益匪浅。

如果你有更多的精力，或者你的老师推荐的话，不妨将本书和王昆扬教授翻译的《陶哲轩实分析》一起阅读。笔者还建议同学们可以结合西尔维亚(Evelyn M. Silvia)教授写的辅助材料一起阅读，这样可能会相对容易一些。当然这要求读者有一定的英文阅读能力。笔者曾经与西尔维亚教授在加州大学戴维斯分校共事。她是一位极其敬业又充满精力的好老师，长期致力于中小学数学教育。可惜她在2006年1月因癌症去世，终年才57岁。

作者在前言中提到，本书“说到了美国数学月刊或数学杂志上出现的作品，以期学生逐步养成阅读期刊文献的习惯”。笔者认为这是一个很好的尝试。原书最后有一个“重要符号表”，在译本中放在了最前面。这样做很有意义。否则放在最后的话，同学们可能在读了许多章之后都不知道有这个表的存在。原书还有一个索引，可惜在译本里没有收入进去，在重新印刷时最好能补上。作者在一些叙述上有一点小的错误，比如实数和广义实数、实数和复数的陈述上缺乏一点精确性，读者可能需要留心一点。

《数学分析原理》(原书第3版)由北京师范大学的赵慈庚教授和蒋铎教授翻译，先由人民教育出版社出版，后由机械工业出版社重新出版。两位先生都已经作古，所以本书是他们献给同学们的最后礼物。今年是译者赵慈庚教授诞辰一百周年。我们介绍他和蒋铎教授的译著作为对他们的纪念。这本书的中英文版本在网上有电子版，但是作为一本数学分析的经典书，它是所有数学工作者的必备图书之一，很难想象会有人不舍得花二十几元人民币而让书架上缺少它。我相信，读过本书的人都会同意的。