

# 我读《数学恩仇录》

## 深刻领略了数学理性与感性的丰富乐章

蔡炳坤

我从小就喜欢数学。并不是对数学特别有天分，也不是碰到特别好的数学老师，而是因为只要上课听懂了（这句话很重要，数学的学习重在理解），就可以在大大小小的考试中得高分，不必像其他科目必须背诵许多东西，记得当年参加高中联考的时候，几乎考满分。印象中，从小学到国中，每次作文题目“我最喜欢的科目”，我都毫不犹豫地写“数学”。后来进了师专以后，注意力转移到了音乐方面，也就慢慢与数学疏远了。直到四年前，我的孩子高中毕业选择“数学系”当第一志愿，我才又开始接触与数学相关的议题或书籍。我的学校——建中，又是台湾高中数学学科中心学校，有机会经常与杰出的大学数学教授、优秀的高中数学老师们讨论相关课题，多少也熏染了一些数学的专业氛围。

日前接到五南图书编辑部门邀我撰写《数学恩仇录》导读的讯息，的确有所犹豫，我主修的领域是教育，并非数学，如何能够胜任这项专业的工作？但当开始试着阅读时，竟然流畅地停不下来，爱不释手于每个事件的情节中。总的来说，从本书颇具吸引力的译名开始，就注定了她的“成功”。主标题《数学恩仇录》(Great Feuds in mathematics)使人不由得联想到著名作家大仲马所著的



《基度山恩仇记》(Le Comte De Monte-Cristo，一部脍炙人口，描写善有善报、正义伸张的小说)；副标题《数学史上的十大争端》(Ten of the Liveliest Disputes Ever)则点名了本书描述的其实就是十个深富哲理与人情世故的有趣故事(篇篇读来淋漓痛快，让人废寝忘食)，虽然当中有诸多难解的数学公式、深奥的解题方法和艰涩的专有名词，但并不影响故事情节高潮迭起的巧妙铺陈。书中内容更多的是对人性好恶的探索、对学术伦理与价值观冲突的描述以及激情过后的深刻省思等等，趣味中带着泪水，科学中蕴含人文哲理。我虽自不量力，但非常乐意地带领年轻的莘莘学子们，一起领略这篇充满数学理性与感性的华彩乐章。

作者哈尔·赫尔曼选择十六世纪中叶作为本书选材的起点，首先登场的便是赫尔塔利亚(Niccolo Tartaglia)和吉罗拉莫·卡尔达诺(Gerolamo Cardano)，这两位意大利数学家谁才是求解三次和四次代数方程的原创者？又究竟卡尔达诺曾经对赫尔塔利亚做出什么样的承诺，自此一再遭受“背信弃义”的严重指控？凡此种种都在1545年《大技术》一书出版后引爆开来，这本书，直到现在，仍被众多学者认为是文艺复兴时期的科学杰作之一，可与维萨里的《人体构造》、哥白尼的《天体运行论》相提并论。

令人惊讶的是，直到 1576 年，两人相继去世后的三十多年间，“授权”与“剽窃”之争从未间断，公说公有理，婆说婆有理，虽未对簿公堂，但在数学界所掀起的轩然大波，果真是“罄竹难书”，对这两位数学家而言，或有“既生瑜，何生亮”的遗憾情结，但就整个数学界的发展来说，也未必全然的负面，作者写下了这样的脚注：“当赫尔塔利亚和卡尔达诺两人鹬蚌相争时，毫无疑问地，数学是那个得利的渔翁。”读过精采的原创之争，想必您心有戚戚，在知识产权尚未充分彰显的那个年代，数学家不得不对自己的创见有所保留，在展现某些问题的解法时，却对所用的方法保密，以免被他人据为己有。有人可以终其一生为捍卫原创而战斗，姑且不论真相如何（似已成为罗生门），但其维护自身权益，不计毁誉、奋战到底的意志，倒是值得仍多少存在抄袭现象的今之学界，引以为鉴。

接下来的这个故事更精采了（第二章）。众所周知“我思，故我在”出自法国哲学家勒内·笛卡儿的名言，他在 1637 年所发表的《方法论》中以“一种系统化的怀疑”的哲学思考方式写道：“不能确知是对的事，不要接受。这就是说，在判断时谨慎地避免仓促和偏见，只接受那些截然清晰地印在脑中不容置疑的东西。”这本书是好几个学科领域的里程碑论著，涉及哲学、科学史以及数学思想。有人把她与牛顿的

《原理》一书相媲美，并认为她为十七世纪数学的伟大复兴做出了卓越贡献。人们多半因为这本书，普遍地把统一代数和几何，甚至是创立解析几何的荣誉归于笛卡儿。的确，“笛卡儿坐标系统”就是以他的名字命名的。然而，笛卡儿在《方法论》三篇文章中的两篇（折射光学与几何），却成了与同是法国人的业余数学家皮埃尔·费马争论的焦点。说到“费马最后定理”（Fermat's Last Theorem），也是无人不知、无人不晓的重大发现。著名的数学史学家贝尔（E.T. Bell）在二十世纪初所撰写的著作中，称费马为“业余数学家之王”（他具有法官和议员的全职工作）。贝尔深信，费马比他同时代的大多数专业数学家更有成就。十七世纪是杰出数学家活跃的世纪，而贝尔认为费马是十七世纪数学家中最多产的明星。在近二十年的数学争端中，贝尔如此形容：“让脾气有些暴躁的笛卡儿和沉稳内敛的‘Gascon’费马并驾齐驱，看来极不自然。在关于费马切线理论的争议中，这个好战的家伙（笛卡儿）经常烦躁易怒，出语刻薄，而这位不动声色的法官却表现得真诚、

谦恭。”读过笛卡儿和费马在数学理论上的争辩，颇令人有文人相轻之慨，但话说回来，所谓的“真理”愈辩愈明，未到最后关头，胜负难分，亦随着时间的变化而被凸显出来，作者对此写下令人玩味的脚注：“一场旷日持久的争斗诞生了一个明显的胜利者和失败者。但具讽刺意味的是，胜利者（指笛卡儿）从争斗中受益微薄，而失败者（指费马）却被争斗激发，提出了科学上一个重要的原理，为微积分的发展打下了重要的基础。”的确是如此，笛卡儿渐渐远离了数学，专注在哲学和形而上学的研究，在尊敬和赞誉声中结束了荣耀的一生。而费马则继续钻研数学，默默耕耘，并做出好几项重大贡献。

相较于前述两位意大利数学家“原创”之争、两位法国数学家“理论”之争，接下来要登场的是英德“微

积分发明”之争，主角分别是伊萨克·牛顿与威廉·莱布尼茨（第三章），两人从未谋面，但因为这两人的追随者富有侵略性的行为，使得这场争端狂热地持续了一个多世纪，难怪科学史家丹尼尔·布尔斯丁将他们的争端命名为“世纪景观”。牛顿的主要兴趣在于用数学方法解决自然科学问题，“万有引力理论”的提出就是明证，但莱布尼茨则像笛卡儿一样，希望在哲学上有重大创建，认为数学可以为他开路。前者在英国被奉为偶像，并受封为爵士，1703 年被推举为皇家学会的主席，并连年当选，直到 1727 年去世为止，且被授予国葬尊荣；后者的声望在欧陆也是快速增长，1699 年法国科学院制作的外籍院士名单中，牛顿排名第七位，而莱布尼茨则排在第一位，他在符号逻辑和微积分，还有其他诸多领域，特别是宇宙论和地质学，都做了很重要的早期研究，只是到了晚年，微积分的争议事件给他蒙上了巨大的阴影，凡事皆不顺利，1716 年在汉诺威去世时，只有生前的一位助手参加葬礼，令人不胜唏嘘！究竟这两位杰出的天才，谁才是微积分的首创者呢？总的来说，在微积分发展上，牛顿约在 1665-1666 年，而莱布尼茨则在 1673 年以后，是由牛顿领先；至于微积分的发表上，莱布尼茨在 1684-1686 年，而牛顿则在 1704 年以后，却是由莱布尼茨领先。简单地说，牛顿先发展了微积分，但没有公诸于世，莱布尼茨先发表了微积分，而且他的方法更好用，也确实先投入运用。这项首创的荣誉应该归谁呢？他们各自的国家都诉说着完全不同的故事。这场争论并没有因为两人的去世而停歇，

**笛卡儿渐渐远离了数学，专注在哲学和形而上学的研究，在尊敬和赞誉声中结束了荣耀的一生。而费马则继续钻研数学，默默耕耘，并做出好几项重大贡献。**

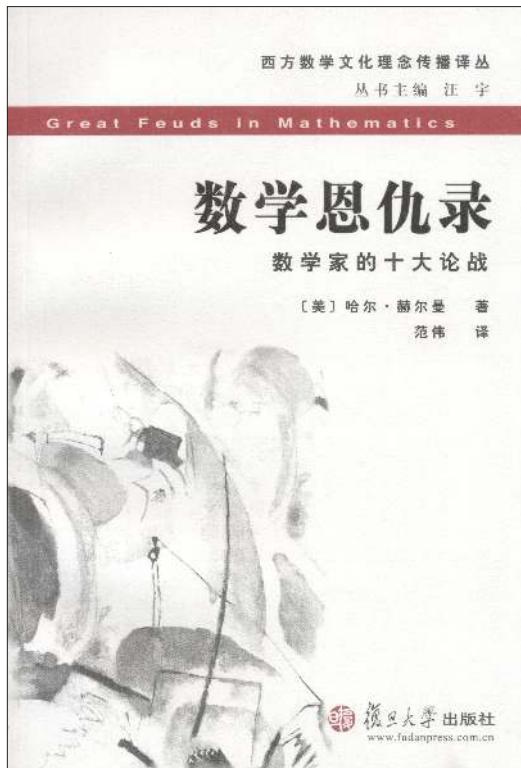
并导致了两个重要的结果：一是两派数学家之间的关系破裂了，一直持续到十九世纪；二是在莱布尼兹微积分的基础上，欧陆的数学家在十八世纪取得了飞速的进步，大大超越英国的数学家。是以，作者写下了如此简短而有力的脚注：莱布尼兹输了那场战役，却赢得了整场战争。您说，不是吗？

哇！连着三大争端读下来，过瘾极了！在接下来的故事中，有兄弟阋墙者（第四章）、有观点不同者（第五章），前者便是瑞士的伯努利兄弟，哥哥雅各布透过自学钻研数学，33岁已经成为巴塞尔大学的教授，莱布尼兹对他有相当高的评价。弟弟约翰原本学医，但与雅各布一样，心在数学，所以私底下跟着哥哥学习数学。他们两位是首先认识到微积分的重要性，并将其投入运用、向世界宣传它的意义的数学家。然而，他们之间却也为了谁的地位更崇高而发生了激烈的论争，最后爆发成一场彼此之间公开的数学挑战。而后者

便是英国的托马斯·赫胥黎和詹姆斯·西尔维斯特，赫胥黎是一位有着崇高威望的科学家，在动物学、地质学和人类学领域都作出了重要的贡献，他对当时新提出并广为人所憎恨的“进化论”的捍卫，为他赢得了“达尔文的斗牛犬”的称号，他喜爱科学，在他的脑中，科学是生命的一部分，对于数学，他却敬而远之，他把数学看成一种游戏，但与科学无关，所以他说“数学对观察、实验、归纳和因果律一无所知”做工作。简言之，“它对实现科学的目的无用”。这话可把西尔维斯特给惹恼了，他是犹太人，是个桀骜不驯、饱经磨难的人，是一位才华洋溢的数学家，也是一位斗士、一位出色的演说家。1869年，时为英国协会（也称英国科学促进协会）数学和物理学分会主席的西尔维斯特，在主席讲话中，回应指出“数学分析不断地援引新原则、新观念和新方法，它不能用任何言语来定义，

但它促使我们大脑里内在的能量和活力爆发出来，透过持续地审视内心世界，不断地激发我们观察和比较的能力。它最主要的手段是归纳，它需要经常求助于试验和确认，它给我们最大程度地发挥想象力和创造力，提供了无尽广阔的空间。”当斗牛犬遇上斗士，各自迥异的观点令人窒息，“但对于英国教育和美国教育系统来说，

他们能够并肩作战，实是我们的幸运。”作者如是说。



一个欧几里得广为人知的“普遍观念”是：整体大于它的部分。这个观念在1870年代早期，被一位不知名的数学家质疑，主张：就对数和数论来说，整体不一定大于它的部分。他就是创造了集合论，并将集合论和无穷这两个观念结合起来，提出了无穷集，为数学世界开创了一个广阔新领域的格奥尔格·康托尔。他大胆寻求突破的行动，对利奥波德·克罗内克这位保守的知名数学教授、曾经友好地支持过他的老师来说，就像是“数学的疯狂”，克罗内克毫不客气地批评康托尔是一个科学骗子、叛徒、青年的败坏者。对于这场长达数十年的康托尔与克罗内克争端

（第六章），两位社会学家柯林斯和瑞斯提沃提出了一个有趣的观点：“克罗内克和康托尔之间的斗争，不是传统和创新的数学形式之间的冲突，而是新典范的竞争。克罗内克不是数学上的传统主义者，为了反对当时的无穷和无理数、超越数和超限数等观念，他被迫在一个激进的新基础上重建一门新数学，他的成果预示着二十世纪直觉学派的诞生；正如康托尔成为形式主义运动的先驱一样。两个派别都希望数学变得更严密，但在如何达到这个要求上，他们有很深的分歧。”

延续上一章的话题，竭力想创建新数学理论的康托尔，其理论相继受到严峻的挑战，1900年第二届国际数学家大会在巴黎召开，著名的德国数学家戴维·希尔伯特指出：康托尔的连续统假设还没有找到证据。1904年

第三届国际数学家大会在海德堡举行，来自布达佩斯的著名数学家朱尔斯·柯尼希宣称：康托尔连续统的势不是任何阿列夫数。对此，来自哥廷根大学的年轻数学家恩斯特·策梅洛跳出来维护了康托尔，策梅洛不仅指出了柯尼希的错误，并认为证明康托尔的良序原理是完善集合论的首要工作，且进一步提供了证明良序原理所需要的关键步骤，此步骤的假定被称为“声名远播的公理”（因为在很多国家、很多数学家之间激起回响），有赞成的，当然，也有反对的。最主要的反对者是法国的数学家埃来尔·波莱尔，根本上来说，波莱尔在直接挑战策梅洛“从每一个非空子集中，可以挑出或指定一个元素作为特殊元素，这样，我们就可以创建一个良序集合”的主张，也反对选择所谓的“公理”，因为它需要无穷次操作，这是难以想象的。波莱尔和策梅洛的“公理”之争（第七章），一直没有完全地解决，《数学中的现实主义》一书作者佩尼洛普·马迪倒是作出这样的诠释：“这整段历史插曲中最具讽刺意味的是：对这个公理最强烈的反对正是来自法国分析家小组——贝尔、波莱尔和勤贝格，而他们却在无意中非常频繁地用到它，他们的工作部分地说明了数学中不可缺少它。”

一九〇一年的春天，数学家们都面临着伯特兰·罗素“悖论”的挑战（第八章）。这位由哲学家转变而成的英国著名数学家，提出了一个乍看之下很简单的问题“他假定一个由所有不是自身元素的集合所组成的集合，称这个集合为  $R$ 。然后他问：集合  $R$  是它自身的一个元素吗？如果是，那么它不符合这个集合元素的定义；如果不是，那么它是这个集合的一个元素。”这个悖论有着深刻的寓意，早期的集合论考虑过包容一切事物的泛集合的可能性，现在看来，这是不可能的，不是每种事物都能形成集合。它居然动摇了集合论和它所支撑的广阔数学领域的基础。由于它没有答案，所以是一个悖论，或者说是个矛盾。当罗素提出他的悖论时，也已经开始致力于他在逻辑主义上的努力，他坚信纯粹数学可以建立在少数基本的、合乎逻辑的观念基础上，所有的命题都可以从一小部分基本的、合乎逻辑的原理推导出来，他也希望能够解决这个悖论，《数学原理》便是在这样的努力下问世。对此，备受推崇的法国数学家莱尔斯·庞加莱对罗素的逻辑主义发起了一个全面的批判。这位在数论、拓扑学、机率论和数学物理等诸多领域都有建树的数学

科学家，和罗素之间的一系列争论和反击从一九〇六年持续到一九一〇年，虽然两人彼此非常尊重，但攻击起对方来毫不犹豫。

就在罗素“逻辑主义”方兴未艾之际，数学界已经同时领会了戴维·希尔伯特的代表作《几何基础》，在他的观点中，有一个想让公理化体系更普遍的愿望，他想建立首尾一致的算术公理体系和从它们开始推导的步骤。他还认为，给罗素等人带来问题的悖论是由所用语言的语意内容造成的，也就是说，是由语句的模糊造成的。就这样，以希尔伯特为代表的形式主义学派诞生了。但是，就在这时，荷兰数学家伊兹·布劳威尔持有一个针锋相对的立场，他相信人类存在着根深蒂固的关于数学基础的思考模式，

大部分以数学方式提出来的的东西只不过是装饰而已，他成为了后来称之为直觉主义数学学派的旗手。在希尔伯特与布劳威尔的论战中（第九章），所有的分歧——包括参与者的国籍，都派上了用场。当论战扩大到欲拉拢彼此的支持者时，选择保持中立的爱因斯坦形容它就像是一场“青蛙和老鼠的战争”。

最后，作者回顾了一个很多年来令数学家们苦恼并着迷的问题：数学的进步是发明还是发现？虽然它本身相当有趣，但也引发了一场论战（第十章）。绝对主义或柏拉图主义的拥护者们，把数学看作是客观和精确的，他们运用数学非凡的能力来描述自然和技术中的运动和形态，并主张：真正的数学知识是完美和永恒的（所以说：数学的进步是发现）。持相反意见的是易误论者与建构主义者，他们把数学看成是一个不断进步的活动，甚至主张：某些数学进展被接受是建立在数学家们的权威基础上（所以说：数学的进步是发明）。您认为呢？全书到这里告一段落，您是否也有意犹未尽的感觉？作者留下了这样一段话“但我可以期待，或至少可以希望，每一次危机之后，数学界将会从以前所发生的事中学到某些东西，从而变得更大、更聪明”。作者是否为下一部著作预留了伏笔？值得进一步期待。

**但我可以期待，或至少可以希望，每一次危机之后，数学界将会从以前所发生的事中学到某些东西，从而变得更大、更聪明。**

本文作者为台北市立建国高级中学校长