

# 关于广义相对论的 数学理论

## 爱因斯坦的引力场方程与黑洞

ukim

本文的目的是介绍广义相对论的数学背景  
以及关于数学家们对黑洞形成机制研究的历史

从上至下：爱因斯坦，闵可夫斯基，希尔伯特

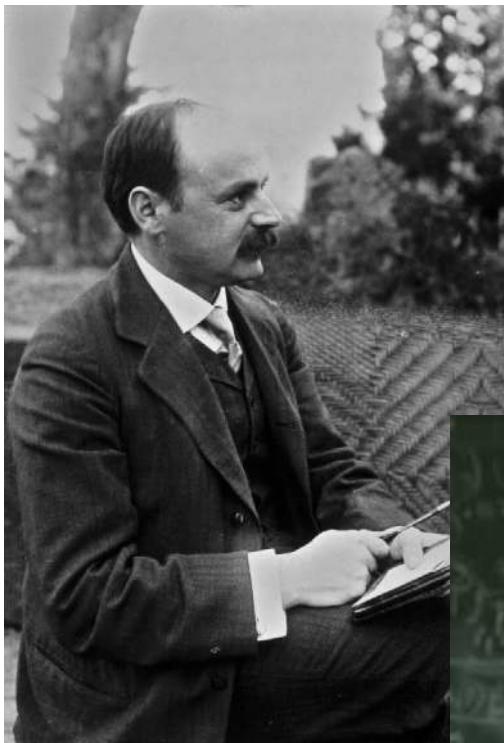
1915年11月25日，爱因斯坦向普鲁士科学院提交了广义相对论的论文。而在五天前，希尔伯特也向普鲁士科学院递上了一份关于引力学的手稿。长久以来，人们总是热衷于讨论究竟谁才是第一个提出广义相对论的人。然而这却并不是我们想要讨论的问题，我们关心的是这两份手稿里共同包含的一个方程，这个方程现在普遍被称为爱因斯坦引力场方程。

首先让我们尝试在不写下精确的表达式的情况下粗略地理解引力场方程。爱因斯坦认为，引力场或者物质的存在导致了时空的弯曲，而时空的弯曲恰恰体现了引力本身。引力场方程本身诠释这个想法。方程的右边是能量-动量张量，这个张量描述了时空中物质的分布；方程的左边可以被认为是对时空本身的 Ricci 曲率张量，恰如其名，这个张量描述了时空本身的弯曲。

从数学上来看，这个方程本身包含了10个变量和10个相互独立的子方程，并且是一个非线性的二阶双曲型非线性方程，仅仅写下这个方程就需要莫大的勇气和智能，更不要说是找到它的解了。实际上，关于爱因斯坦和希尔伯特对于

广义相对论的优先权之争就是围绕着谁先写下了这个方程。据说，1915年初期爱因斯坦对于如何把引力数学化的想法已经相当的成熟，唯一的缺憾就是未找到描述引力分布的场方程。是年七月，他应希尔伯特的邀请去哥廷根大学作了一系列毫无保留的演讲。恰如这个众所周知的调侃之言，“哥廷根马路上一个孩子，都可以比爱因斯坦更懂得四维几何”，希尔伯特由于比哥廷根马路上一个孩子懂得更多的四维几何，很快地得到了引力场方程的表达式，当然这丝毫不影响爱因斯坦的伟大，因为希尔伯特本人都说过，“发现相对论的，是作为物理学家的爱因斯坦，而不是数学家”。

言归正传，让我们致力于了解引力场方程的解。需要澄清的一点是，这个方程的解，不仅仅是一些经典意义上的场，除却这些描述物质分布的场以外，解方程还意味着来构造时空本身。换句话说，每一个解都对应着一个可能存在的宇宙。在这个方程刚刚诞生的时刻，关于爱因斯坦本人到底知道多少个解我们很难知道，但是无论如何，我们都可以断言他至少知道一个解，也就是现在被称为闵可夫斯基空间的解。



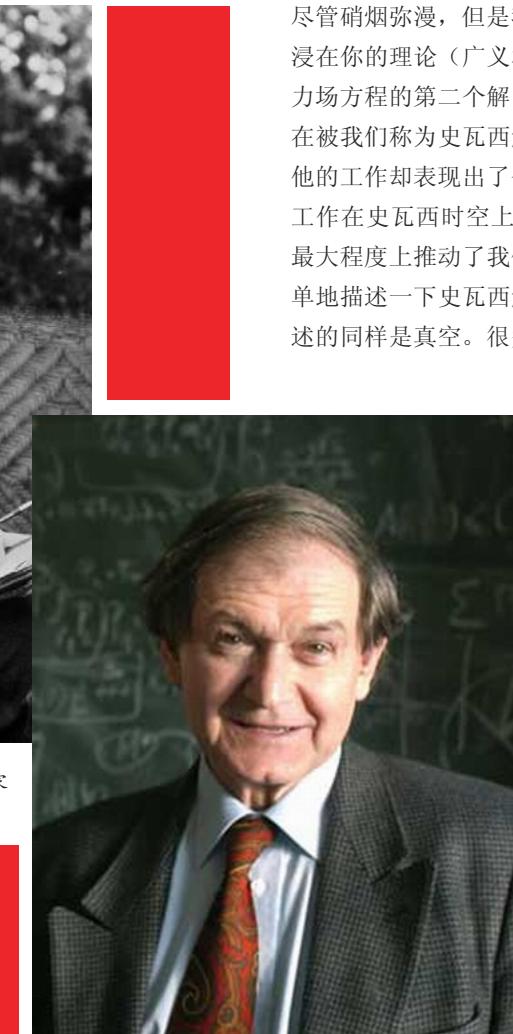
卡尔·史瓦西 (1873-1916), 德国天文物理学家

这个断言的逻辑不是基于闵可夫斯基曾经是爱因斯坦在大学时期的数学教授这一个事实, 而是因为闵可夫斯基空间是平坦而无弯曲的, 它的曲率是零。这是一个最最简单的例子, 在每一本关于四维几何的书上, 这个例子一定是第一个出现的。而且整套的广

义相对论在这个特殊的时空上退化为狭义相对论。我们提到过, 场方程的左边被 Ricci 曲率所决定。按照定义, Ricci 曲率是时空的曲率的某一些特殊的分量, 所以对于闵可夫斯基空间而言, 场方程的左边是零。毋庸置疑, 右边也必须消失。而我们知道, 方程的右边描述了物质的分布, 所以对于闵可夫斯基空间而言, 是没有任何物质的, 也就是说这是场方程的一个真空解。

我们能不能找到其它的解呢?

同样是在 1915 年, 这一年的圣诞节之前的一天, 四十二岁的德国人卡尔·史瓦西 (Karl Schwarzschild) 从德军在俄国方面的前线给爱因斯坦写了一封与战争毫无瓜葛的信, 他提到: “就像你读到的一样, 这场战争对我还算不错,



罗杰·彭罗斯爵士, 牛津大学教授, 1988 年沃尔夫奖获得者

尽管硝烟弥漫, 但是我还是能甩掉他们而随心所欲地沉浸在你的理论 (广义相对论) 之中”。随后, 他附上重力场方程的第二个解, 这个在一战战壕中诞生的宇宙现在被我们称为史瓦西解。史瓦西在第二年的三月去世, 他的工作却表现出了令人惊讶的活力, 越来越多的研究工作在史瓦西时空上展开, 尤其是 Kruskal 后来的工作最大程度上推动了我们对史瓦西时空的理解。让我们简单地描述一下史瓦西解, 它是一个球对称的精确解, 描述的同样是真空。很多物理模型都可以构架在这个时空之上, 比如说一个球状星球以外的时空。在这个模型下, 通过计算, 我们可以容易地检验光在引力作用下的弯曲, 近星点的进动和引力红移等现象。然而, 这些都不是重点, 史瓦西解最让人振奋让人激动的一面是: 它预言了黑洞。

黑洞, 现在已是妇孺皆知的名词, 用妇孺皆知的说法, 是说一个星体的密度大到一定的程度, 其引力使得附近的光都无法逃逸, 那么既然我们看不到有光线从这个星体发出, “黑”的由来也就理所当然了。我们并不关心黑洞的精确定义而把精力放在史瓦西时空 (在 Kruskal 工作的意义下) 的一个特定的区域上。在这个区域

里, 我们通过计算类光的测地线, 可以发现光线永无逃逸的可能性, 也就是说, 这真的是黑洞的内部 (在正确的定义下, 这也是黑洞)。

自从黑洞被史瓦西解所预言的那一刻开始, 它就成为了广义相对论的核心论题。专家们对它既爱且恨, 直到今日, 尽管我们对黑洞的理解有了长足的进步, 但是诸如黑洞的基本性质和黑洞的形成等很多基本问题仍然需要进一步的理解。在史瓦西时空里面, 如果一个勇敢的观测者生活在黑洞的内部, 那么他会发现对于一个二维的球面而言, 如果我们由里向外沿着光线传播的方向将它撑大一点点的话, 它的面积非但没有像我们想象的那样理所当然的增加, 反而减少。牛津大学的数学物理学家罗杰·彭罗斯 (Roger Penrose) 是