



从哥德巴赫说开去

贾朝华

很多中国人是从徐迟的一篇报告文学中知道哥德巴赫这个名字的。在这篇文章里，徐迟讲述了数学家陈景润刻苦钻研，终于在哥德巴赫猜想研究上取得重大突破的真实故事。文章最初刊登在《人民文学》杂志1978年第1期上，标题就是“哥德巴赫猜想”，《人民日报》和《光明日报》随即转载，一时间传遍全国。

从那以后，人们对于陈景润的故事津津乐道，也常用“哥德巴赫猜想”来形容极其困难的问题或难以企及的目标。然而，大家对于哥德巴赫本人却了解甚少。本文我们就来说说哥德巴赫和他那个时代的一些事情。

小城故事

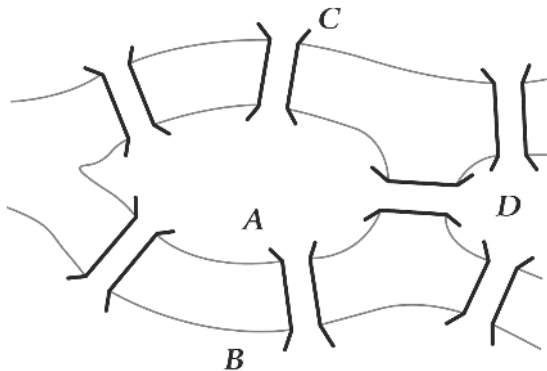
哥德巴赫 (Christian Goldbach), 1690 年 3 月 18 日出生于普鲁士的哥尼斯堡, 生长在一个官员家庭。

普鲁士是德意志的一个邦国。当时的德意志虽然称为“德意志神圣罗马帝国”, 但诸侯争霸, 邦国林立, 皇帝的控制力有限。而且皇帝不是世袭的, 是由一些诸侯选举出德意志国王, 经罗马教皇加冕后才成为皇帝, 那些有资格选举国王的诸侯称为“选帝侯”。

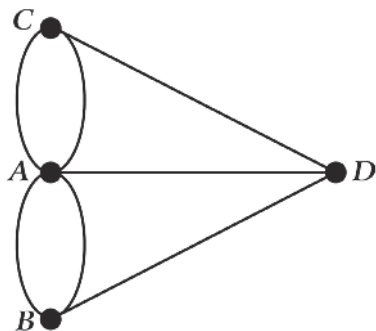
勃兰登堡选帝侯兼普鲁士公爵腓特烈三世因积极支持皇帝对法国宣战, 被授予普鲁士国王称号。1701 年, 他在哥尼斯堡加冕为王, 开启了普鲁士王国的基业。此后, 普鲁士迅速崛起, 通过战争和政治手段, 终于在 1871 年, 由国王威廉一世和“铁血宰相”俾斯麦完成了德意志的统一。

哥尼斯堡 (Königsberg) 是一座历史名城, 德国的很多重要历史事件在这里发生。第二次世界大战德国战败后, 根据“波茨坦协定”, 哥尼斯堡划归苏联, 改名为加里宁格勒。加里宁去世前是苏联名义上的国家首脑, 也是一位教育家, 他曾说过: “很多教师常常忘记他们应该是教育家, 而教育家也就是人类灵魂的工程师”, 后来人们就经常说“教师是人类灵魂的工程师”。

在秀丽的小城哥尼斯堡, 普雷格尔河贯穿全城, 给城市带来了灵气。这条河有两条支流, 它们环绕着一个小岛, 在这两条支流上有七座桥, 见下图。城里的居民常到这里散步, 久而久之, 人们就有了这样一个问题: 能不能既不重复又不遗漏地一次走遍这七座桥? 这就是有名的“哥尼斯堡七桥问题”。



哥尼斯堡七桥



哥尼斯堡七桥的抽象图

在俄国圣彼得堡的大数学家欧拉知道这个问题之后, 就进行了研究。他将陆地和小岛用点表示, 而将七座桥用线表示, 得到了一个用七条线组成的图形, 见上图。于是, 七桥问题就变成了能否一笔画出这个图形的问题。1736 年, 欧拉用严格的数学方法证明了这种画法是看不存在的, 就是说不可能既不重复又不遗漏地一次走遍这七座桥。对于类似的更一般的图形, 欧拉也找到了一个简便的原则, 可以判定它能否一笔画出, 这就是“一笔画定理”。欧拉关于哥尼斯堡七桥问题的研究, 推动了一个重要的数学分支的产生, 这个分支叫做拓扑学。

哥德巴赫在家乡的哥尼斯堡大学学习数学和医学。因为数学这种理论学科, 工作机会相对少, 所以要学一门像医学这样的实用学科。当时的一些数学家, 如约翰·伯努利和丹尼尔·伯努利都获得过医学博士学位, 这有点像今天有些人同时学习数学和计算机科学一样。

哥德巴赫 20 岁大学毕业, 和大多数这个年龄的青年人一样, 渴望出去看看外面的世界。加上家庭状况不错, 于是, 1710 年之后, 哥德巴赫就云游欧洲, 结识了不少当时欧洲的数学名家。

外面的世界

哥德巴赫首先去莱比锡, 拜访了大数学家莱布尼茨。当时莱比锡在萨克森选帝侯腓特烈·奥古斯特一世的治下, 不属于普鲁士王国, 因此, 从哥尼斯堡到莱比锡就算是出国了。

莱布尼茨 (G. W. Leibniz, 1646-1716) 对于数学的最大贡献是发明了微积分, 微积分在自然科学、社会科学和日常生活中都有广泛的应用, 它的发明也给数学的发展带来了繁荣的



莱布尼茨 (1646-1716) 与牛顿相互独立地发明了微积分

局面，意义之大无法估量。由于莱布尼茨与牛顿对于微积分发明的优先权问题，导致了欧洲大陆数学家与英国数学家一个多世纪的争论，最终人们公认，莱布尼茨与牛顿相互独立地发明了微积分。

莱布尼茨还发明了二进位制，就是用 0 和 1 来表出所有的正整数，这和我们平常用的十进位制不同。电子计算机都是用二进位制的，这是因为电流的状态只有两种——断电和通电，它们分别对应于 0 和 1。莱布尼茨对于中国北宋时期邵雍的“伏羲六十四卦图”很感兴趣，他用二进位制合理地解释了“六十四卦图”。此后，在世界范围内兴起了对于易学的研究，人们对于中国的这门古老学问兴趣日增。邵雍是我国北宋时期的哲学家，一代易学大师，他对于天地运化、阴阳消长有着独到的见解。虽然现在很少有人知道邵雍了，但他说过的“一年之计在于春，一天之计在于晨，一生之计在于勤”成了很多人的座右铭。

作为一位哲学家，莱布尼茨在哲学史上享有崇高的地位，他的科学思想与哲学思想往往是相互联系和促进的。莱布尼茨开创了德国的自然哲学，他的学说和其弟子沃尔夫的理论相

结合，形成了莱布尼茨-沃尔夫理论体系，极大地影响了德国哲学的发展，尤其是影响了康德、黑格尔等人的哲学思想。

此外，莱布尼茨在数理逻辑、物理、化学、光学、地质学和生物学等诸多方面都有杰出贡献，无疑是他那个时代最为博学的人。英国哲学家、数学家和逻辑学家罗素在他的《西方哲学史》一书中，称莱布尼茨是“一个千古绝伦的大智者”。

在现实生活中，莱布尼茨是积极入世的。他大力推动柏林科学院的建立，并于 1700 年出任首任院长。1711 年至 1716 年期间，俄国的彼得大帝几次听取莱布尼茨关于建立科学院的建议，并授予他带薪的数学和科学宫廷顾问头衔。据说莱布尼茨还写信给中国清朝的康熙皇帝，建议成立北京科学院，可惜未被采纳。

莱布尼茨晚年主要效力于汉诺威王室，然而新上台的选帝侯乔治·路德维希对他不太感兴趣，使得莱布尼茨感到政治上有些失意。另外，莱布尼茨终生未婚，不教书，也不进教堂，行为举止和当时上流社会的规范不太合拍，因而门庭有些冷落。

哥德巴赫的到来，使莱布尼茨感到很高兴，对于这位朝气蓬勃的晚辈，莱布尼茨少不了给予指点和教诲。莱布尼茨广博的学识和高屋建瓴的观点，也使哥德巴赫终身受益。

接着，哥德巴赫又到伦敦访问棣莫弗。棣莫弗 (De Moivre, 1667-1754) 是法国人，因躲避宗教迫害移居英国，以后就一直生活在英国。

棣莫弗最擅长的研究领域是概率论，并对此做出了很大的贡献。牛顿对棣莫弗的著作《机会的学说》很欣赏，当学生向他请教概率论问题时，牛顿常常介绍他们去找棣莫弗，他认为棣莫弗在这方面比他强得多。

概率论是研究偶然性（或者随机现象）的数学分支，它的起源与掷骰子赌博的输赢问题有关。16 世纪意大利文艺复兴时期的学者卡尔达诺对此就有研究，并著有《论赌博游戏》一书。17 世纪中叶，法国宫廷贵族中盛行掷骰子游戏，他们常就一些输赢概率的问题请教数学家帕斯卡尔。帕斯卡尔

哥德巴赫的到来，使莱布尼茨感到很高兴，对于这位朝气蓬勃的晚辈，莱布尼茨少不了给予指点和教诲。莱布尼茨广博的学识和高屋建瓴的观点，也使哥德巴赫终身受益。



闻名于世的伯努利家族在风景如画的瑞士繁衍生息

在与费尔马的通信里，常常讨论这类问题。当时旅居巴黎的荷兰数学家惠更斯，知道这些问题后也很感兴趣，还为此写了专著。后人认为，帕斯卡尔、费尔马和惠更斯是概率论的创始人。

第一个对概率论做出重大理论贡献的是雅各布·伯努利，他证明了“大数定律”，棣莫弗将它精细化为“中心极限定理”。这类定理的大致意思是说：如果只做一次试验，某种现象的出现会是偶然的；但如果是做大量重复试验的话，那么这种现象出现的次数在总试验次数中所占的比例相当稳定，呈现出一种必然性。正如棣莫弗在《机会的学说》一书中所指出的那样：尽管机会具有不规则性，但由于机会无限多，随着时间的推移，不规则性与秩序相比将显得微不足道。

棣莫弗积极推动概率论在社会科学中的应用，他还参与研究保险业中的实际问题并写有专著，为保险业合理处理有关问题提供了依据，书中的一些内容被后人奉为经典。

复数理论中有棣莫弗定理，它的表述是这样的：

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ ， n 是正整数。这个定理的一般形式和完整证明，后来由欧拉给出。我们取 $n = 2$ ，得到

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta, \\ = \cos 2\theta + i \sin 2\theta, \end{aligned}$$

比较等式两边的实数部分和虚数部分，可得

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

这是三角学中关于余弦函数和正弦函数的倍角公式。如果取 $n = 3, 4, \dots$ ，可以得到更复杂的倍角公式。有了棣莫弗公式，只要通过简单的推导，我们就可以得到这些倍角公式，而不必去死记硬背它们。

在那个时代，数学的分科远没有现在这样细，数学家的兴趣和知识面都比较广泛。哥德巴赫对于理论研究和实际问题都很有兴趣，据记载，他还和炮兵司令一起研究过弹道学的问题，因而，哥德巴赫会和棣莫弗谈得来。



后来，哥德巴赫去了欧洲其它一些城市，分别见到伯努利家族的几位成员，其中丹尼尔·伯努利和哥德巴赫关系密切，他们之间比较频繁的通信，一直持续到了1730年。

16世纪末，伯努利家族的祖辈为躲避宗教迫害，从比利时的安特卫普辗转来到瑞士的巴塞尔，在那里繁衍生息。这个家族以经商为传统，也有个别人行医，似乎都和数学沾不上边。但在一个世纪之后，却在三代人中出现了八位数学家，其中几位有相当大的成就。提起伯努利家族，人们在谈论他们的数学的同时，还会讨论关于天才与遗传之类的话题，这些话题往往比数学更吸引人。

上面说到的雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli, 1654-1705）是这个家族的第一位数学家，他除了在概率论上做出重大贡献外，还在解析几何、无穷级数、微分方程和变分法等诸多方面均有杰出的工作，数论里重要的“伯努利数”和“伯努利多项式”是他的创造。解析几何中的“伯努利双纽线”是雅各布提出来的，但他更钟爱对数螺线，这种曲线经过多种几何变换，依旧还是它本身，性质非常奇妙。在雅各布的墓碑上，就刻有对数螺线，并有这样的铭文——“纵然变化，

依旧故我”，这也许寓意着来世还当数学家。

因为雅各布去世较早，所以哥德巴赫没有机会向他请教。但雅各布还有两个弟弟，尼古拉·伯努利一世（Nicolaus Bernoulli I, 1662-1716）和约翰·伯努利（Johann Bernoulli, 1667-1748），也都是出色的数学家，其中约翰比雅各布的研究范围更广泛且更加多产。

约翰不仅在数学上作了大量的工作，他还解释了力学中的虚位移原理，写了关于潮汐和航行以及行星轨道的数学原理的文章，提出了光学中的焦散面理论等。他的最流行的成果，当属大学微积分教程里总要讲到的“洛必塔法则”。当时，约翰的学生洛必塔编写了一本有影响的书《无穷小分析》，把约翰的这个结果收了进去，后世就误称为“洛必塔法则”。这里面还有一段故事，在《数学文化》创刊号中，万精油先生在“数学史上的一桩错案”一文里有详细的讲述，说起来都是银子惹的祸。

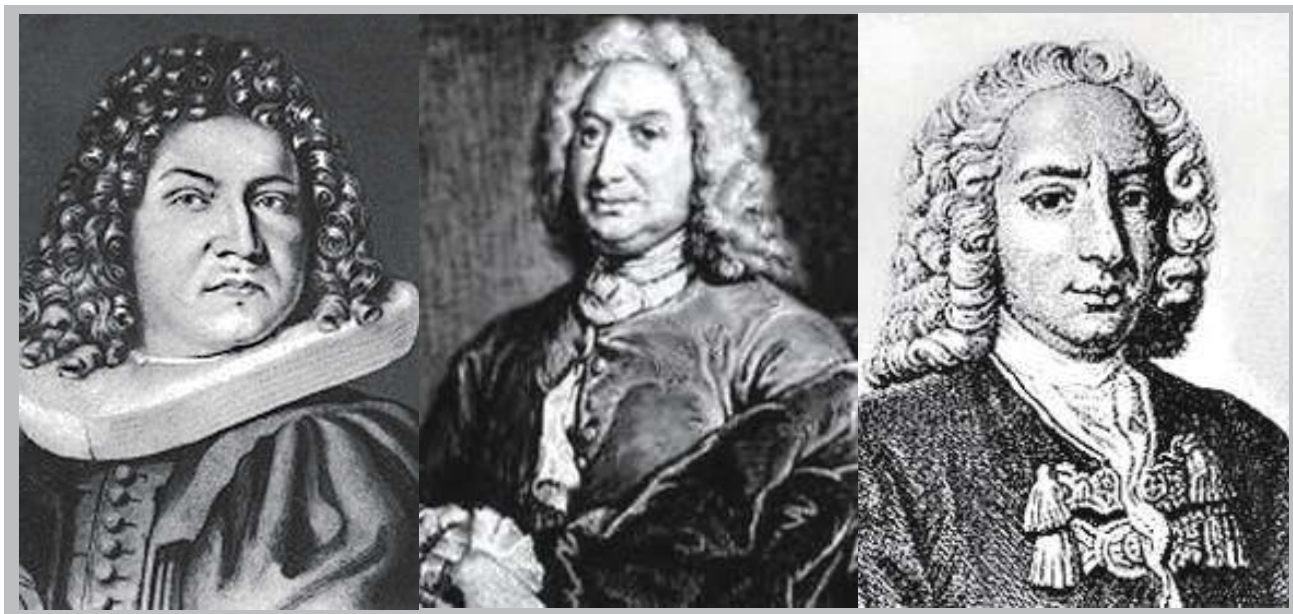
约翰有三个儿子，都是优秀的数学家，其中丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli, 1700-1782）被认为是伯努利家族中最杰出的。此外，约翰还培养出了一位非凡的学生欧拉，这是很值得他骄傲的。

丹尼尔从小受到家庭的熏陶，在研究风格上继承了约翰的传统。他一生著述丰富，还因天文学、地球引力、潮汐、磁学、船舶航行的稳定性以及振动理论等多方面的研究成果，先后十多次获得巴黎科学院的奖赏，他的获奖次数可以和欧拉相比，因而具有了广泛的知名度。

据记载，丹尼尔聪慧过人，富有想象力。现存画像上的丹尼尔，明目慧瞳，俊朗飘逸，一表人才。丹尼尔曾被人误认为是个公子哥儿，因而流传下来了一段故事。究其原因，大概是在公众的眼里，大学者都得像老树般的苍劲。

伯努利家族后面的成员在数学上不那么突出，这会让人以为这个家族的基因有所衰退。其实不然，有人根据家系查询过，这个家族后来至少有120多位成员，在神学、法学、医学、文学、艺术、管理和科学的其它门类中取得了成功，有的还卓有成就，伯努利家族的香火相当旺盛。

欧洲的旅行，使哥德巴赫不断开阔眼界，增长学识，还在



从左至右：雅各布·伯努利，约翰·伯努利，丹尼尔·伯努利

学术圈里交了不少朋友，收获颇丰。当然，他难免有一点思乡，想念故乡的亲人朋友和美景美食。

说起德国料理，我们能想到的无非是香肠和马铃薯（俗称土豆）之类，可称道的不多。但有一样东西还是值得推荐的，就是德国咸猪手。先将猪的前蹄用百里香、月桂叶、胡椒粉和精盐腌制，再用笼屉去蒸，然后经过炉火的长时间烘烤，出炉后的咸猪手，表皮金黄诱人、酥香可口，里面色泽枣红、清香弹牙。佐以德国特有的甘蓝泡菜，酸度适中，甜爽去腻。配酒最好是全麦啤酒，口味醇厚，麦香浓郁，与咸猪手十分相宜。餐后再来一块美味的黑森林蛋糕，浓郁的巧克力味道漫溢口中，很难用文字去描述了。

新奇的土地

1724年，哥德巴赫回到了故乡哥尼斯堡，又见到亲人和朋友，自然是十分的高兴。空闲时到普雷格尔河畔走走，呼吸清新的空气，看看熟悉的景色，很快就从旅途的疲惫中恢复过来了。

此时的哥德巴赫已经34岁，过了而立之年，该看的人都看了，该见的世面也见过了，是到好好规划一下未来的时候了。

事也凑巧，就在哥德巴赫回家后不久，正好有两位学者路过

哥尼斯堡，他们是去圣彼得堡参与圣彼得堡科学院筹建工作的。在与他们的言谈中，哥德巴赫了解到一些基本情况，感觉正对心思。再说他从未去过俄罗斯，那里对他来讲是一个新奇的地方。于是，哥德巴赫精心准备了一份学识证明人名单，在第二年圣彼得堡科学院正式成立之后，就将申请材料寄了过去。

彼得大帝几次听取莱布尼茨的建议之后，终于在1724年1月颁布谕旨，决定成立圣彼得堡科学院。彼得大帝拟定了科学院章程，其中强调，科学院的理论研究应对与国家实际利益密切相关的问题做出贡献。章程中的重要一条是，邀请国外的一些知名学者到科学院工作，以带动俄罗斯科学的发展。彼得大帝于1725年2月逝世，圣彼得堡科学院的正式建立是由他的妻子、继任沙皇叶卡捷琳娜一世完成的。

“沙皇”是俄国皇帝的称谓，俄语中的“沙”是拉丁语“凯撒”的转音，“沙皇”的中文译名是采取一半音译、一半意译的方式。

彼得一世（1672-1725）是俄国罗曼诺夫王朝的第四代沙皇，被公认为是俄国历史上最杰出的皇帝。他一生励精图治，锐意改革，把俄国从落后的封建国家变成了欧洲的一个

此时的哥德巴赫已经34岁，过了而立之年，该看的人都看了，该见的世面也见过了，是到好好规划一下未来的时候了。

强国。1721年，在俄国打败北方强国瑞典之后，俄国枢密院授予彼得一世“全俄罗斯皇帝”和“祖国之父”称号，后世尊称他为彼得大帝。

彼得大帝（Peter the Great，1682-1725在位）身高2.05米，仪表非凡，精力充沛。他除了在政治和军事方面极有天赋之外，还喜欢做木工、车工等手艺活儿，而且相当专业。但彼得更喜欢的是航海和造船，为此在1697-1698年间，他专门组织了一个约250人的大考察团，到荷兰和英国学习。彼得隐姓埋名，混在考察团中，对外身份是“炮手米哈伊洛夫”。在荷兰期间，彼得和同伴们在专家的指导下，成功制成一艘三桅巡洋舰。在彼得的毕业证书上有这样的评语：米哈伊洛夫聪明勤奋，已经学会了造船专家的各项业务。到了英国后，彼得除了学习造船外，还参观了牛津大学、格林威治天文台和造币厂等。彼得大帝的这次出行，对他日后制定各项政策有很大的影响。

俄国大诗人普希金这样评述彼得大帝：他“时而是学者，时而是英雄，时而是航海家，时而是木匠”。不仅如此，彼得

还身体力行，努力学习西欧的生活方式，革除俄罗斯的传统陋习。例如，他明文规定，要用德国或法国式服装，代替俄罗斯传统不灵便的服装；他亲手剪掉了一些贵族的胡须，并对蓄胡者课以重税；他经常举办法国式的大舞会，亲自做示范表演；他还指示编写《青年守则》，用以教导贵族子弟的行为规范。经过几十年的教化，俄国上流社会的礼仪风范就与西欧没什么差别了。

彼得大帝的改革，也遇到了很大的阻力，有时充满了血雨腥风。就在他随考察团出国期间，国内发生了近卫军兵变，彼得立即匆匆赶回，镇压了兵变。俄国著名画家苏里科夫，在他的历史画“近卫军临刑的早晨”里反映了这一事件。画中的背景是莫斯科克里姆林宫外墙和瓦西里大教堂的圆屋顶，近景挤满杂乱的人群，是悲哀的近卫军和痛哭的家属，远处身穿海蓝色军装的彼得大帝骑在马上，他的背后是森严的行刑队和一排绞刑架。画面的气氛相当凝重，充满悲剧色彩。

彼得大帝的儿子阿列克谢也反对改革，还企图举兵篡位，被彼得送进监狱，死在那里。另外，4岁的王储也早早夭折。



彼得大帝 (1682-1725)



叶卡捷琳娜一世 (1684-1727)



1733 年安娜女沙皇时期的 1 卢布银币

彼得因而忧郁成疾，于 1725 年 2 月去世，死时不到 53 岁。

继任女沙皇叶卡捷琳娜一世（1684-1727）和历史上的叶卡捷琳娜大帝不是一个人，她的本名叫玛尔塔。玛尔塔是农夫的女儿，嫁给了一个瑞典骑兵，在俄国与瑞典的战争中被抓，后来被送给了彼得的重臣缅希科夫。彼得在缅希科夫家里遇到玛尔塔，两人一见倾心，结下了不解之缘。玛尔塔相貌出众，妩媚动人，而且温柔有礼，因而俘获了彼得的心。

叶卡捷琳娜一世（1725-1727 在位）文化水平不高，执政能力有限，朝廷大事基本上交给她的老东家缅希科夫打理。虽然叶卡捷琳娜一世政绩平平，但她对于执行彼得大帝的遗愿确是全心全意的，圣彼得堡科学院的正式建立是她政治生涯中最光辉的一笔。圣彼得堡科学院是苏联科学院和俄罗斯科

学院的前身，它的建立开启了俄罗斯近 300 年的科学传统，意义非常深远。

哥德巴赫向圣彼得堡科学院递交申请之后，不久便被聘为科学院的数学教授和记录秘书。1725 年，哥德巴赫踏上俄罗斯这片新奇的土地，从此他的命运就和俄罗斯紧密地联系在一起了。

哥德巴赫向圣彼得堡科学院递交申请之后，小费了一点周折，不久便被聘为科学院的数学教授和记录秘书。1725 年，哥德巴赫踏上俄罗斯这片新奇的土地，从此他的命运就和俄罗斯紧密地联系在一起了。

哥德巴赫当时的年薪为 600 卢布，合月薪 50 卢布。上图是 1733 年安娜女沙皇时期的 1 卢布银币，正面是女皇头像，反面是俄罗斯国徽双头鹰图案，银币重 25.6 克，这和中华民国初期 1 银元的分量差不多，叶卡捷琳娜一世时期的卢布可能大致相同。哥德巴赫到俄国后，生活应该还是比较宽裕的，在学术研究之余，还做点行政工作。

在牛顿和莱布尼茨发明了微积分之后，伯努利家族和欧拉等一些数学家又进一步推动微积分理论和技巧的发展，从中产生出了像无穷级数、常微分方程、偏微分方程、微分几何和变分法等一些重要的数学分支，这些分支合起来，形成一个被称为“分析”的数学研究领域，这个领域与几何、代数等领域一起，构成了理论数学的核心部分。对于当时正在蓬勃发展的这些数学分支，哥德巴赫都很关注和感兴趣，他自己也写过若干篇关于无穷级数和微分方程的论文，并在圣彼得堡科学院宣读。虽然这些论文有一定水平，但确实没有传世价值，后来也就被人们遗忘了。

圣彼得堡（Saint Petersburg）是彼得大帝于 1703 年下令修建的，它的名字来源于耶稣的弟子圣徒彼得，1924 年改名为列宁格勒，1991 年苏联解体后，经市民投票，恢复了圣彼得堡的原名。

圣彼得堡位于波罗的海芬兰湾的东岸，涅瓦河的河口，当初这里只是一片沼泽，彼得大帝先在这里建军事要塞，后

丹尼尔·伯努利也于1725年来到了圣彼得堡科学院，哥德巴赫就有了共同研究的伙伴，他们时常徜徉在涅瓦河畔，切磋讨论数学问题。

扩建为城市。1712年，彼得大帝将首都从莫斯科迁到圣彼得堡。迁都的目的，是为了更顺利地推行他的改革政策，也是为俄国争取出海口，沟通与西欧的海上联系。当时，圣彼得堡紧挨着瑞典的领土（如今这块地方属于芬兰），瑞典人经过1704年和1705年两次失败的进攻之后，未再试图夺取圣彼得堡。

涅瓦河的流量排在伏尔加河与多瑙河之后，是欧洲第三大河，它经过圣彼得堡，流入芬兰湾。在圣彼得堡，涅瓦河分支遍布，河面上有几百座桥梁，把岛屿和陆地相连，自然风光十分秀丽，因此这座城市也有“北方威尼斯”之称。俄国著名诗人丘特切夫的“在涅瓦河上”一诗中，有这样的句子：

在涅瓦河的轻波间
夜晚的星把自己投落，
爱情又把自己神秘的小舟
寄托给任性的波浪。
.....
涅瓦河啊，你的波涛
广阔无限，柔和而美丽，
请以你自由的空间
荫护这小舟的秘密！

圣彼得堡还是世界上少数具有白夜的城市，白夜时漫步在涅瓦河畔，遥望蔚蓝天空的北极光，感觉在梦幻中一样。

对于建造圣彼得堡，彼得大帝花费了很大的心血。他从法国、意大利等国请来了一大批著名建筑师，这些人设计出很多经典建筑，为俄罗斯带来了巴洛克风格。在17世纪初至18世纪上半叶，巴洛克是流行于欧洲的主要艺术风格，它的特点是装饰繁复、富丽堂皇、极具动感。彼得宫（也称为“夏宫”）是巴洛克建筑风格的一个典范，整个宫殿豪华壮丽，装饰精巧，被誉为“俄罗斯的凡尔赛宫”。宫殿下的大阶梯由37座金色雕像、64座喷泉和许多雕塑环绕点缀，一条水渠将大阶梯与波罗的海相连。圣彼得堡被认为是欧洲最美丽的城市之一，它的建成是彼得大帝的一个伟大功绩。

丹尼尔·伯努利也于1725年来到了圣彼得堡科学院，哥德巴赫就有了共同研究的伙伴，他们时常徜徉在涅瓦河畔，切磋讨论数学问题，蓝天之下的花园、宫殿、教堂、喷泉和雕塑，让人心旷神怡。

政治风云

轻松的日子过得快，转眼就过去了一年多。比起他的数学才能来，哥德巴赫与人打交道的能力要更突出一些，因而，在1726年，圣彼得堡科学院院长就向朝廷推荐哥德巴赫，想让他担任彼得·阿列克谢耶维奇·罗曼诺夫（1715-1730）的家庭教师。

小彼得是阿列克谢的独生子，也就是彼得大帝的孙子。他此时11岁，是罗曼诺夫王朝唯一的男性继承人，因此对于他的影响是一件很重要的事情。当时把持朝政的缅希科夫自然不会放过这样的机会，他指派他的亲信担任小彼得的家庭教师，因而科学院的推荐没有成功。

提到缅希科夫（1673-1729），可以说是一位奇才。他少年时在莫斯科街头以卖馅饼为生，偶遇彼得一世，他的机灵乖巧很讨彼得的喜欢，因而被彼得收作了勤务兵。缅希科夫随彼得大帝东征西战，由于他的忠诚而深得彼得的信任，因此得以步步高升。虽然缅希科夫没受过多少教育，但却具有罕见的军事能力和行政才干。他曾在多次著名战役中指挥军队，取得辉煌胜利，后来成为第一位俄国大元帅。缅希科夫负责过圣彼得堡的工程建设，他还创办了砖瓦厂、木材加工厂、盐场、渔场和酿酒厂等诸多企业。

1727年5月，叶卡捷琳娜一世去世，12岁的小彼得继位，称彼得二世（1727-1730在位）。此时的朝政大权仍由缅希科夫把持，但他对于金钱和权力的过分贪婪，招致了很多贵族的极度不满。贵族们策动近卫军，逮捕了缅希科夫，将他全家流放到西伯利亚的偏僻小镇别留佐夫。两年后，缅希科夫在那里郁闷地死去。苏里科夫的历史画“缅希科夫在别留佐夫镇”，描绘了在西伯利亚的小木屋里，落寞的政治家在烛光下，和儿女们一起读圣经的场面。苏里科夫的“近卫军临刑的早晨”、“缅希科夫在别留佐夫镇”和“女贵族莫洛卓娃”，被称为他的历史画三部曲，都是令人震撼的杰作。

缅希科夫一倒台，他指派的家庭教师只得走人。1727年底，哥德巴赫再次被推荐，当上了彼得二世的家庭教师。这样，哥德巴赫的宁静日子就已成过去，他也要经常关心俄国的政治风云了。

就在叶卡捷琳娜一世去世的那一天，欧拉来到了圣彼得堡。此时的欧拉是一位20岁的青年，他是约翰·伯努利的学生，



欧拉 (1707-1783), 最伟大的数学家之一

也是约翰的儿子丹尼尔的好朋友。丹尼尔得知圣彼得堡科学院医学部可能还有职位，就马上写信告诉了欧拉。于是，欧拉一面与科学院联系，一面突击学习生理学，并在巴塞尔大学旁听了医学讲座。接到了去圣彼得堡的邀请后，欧拉马上动身，谁知正赶上女沙皇去世，情况有变，医学部的职位没了着落。欧拉感到很绝望，束手无策，幸亏有丹尼尔等人的帮助，欧拉才进了数学部，给丹尼尔当助手。这样，欧拉有了固定的职位和稳定的收入，就能安下心来做数学研究了。

欧拉 (Leonhard Euler, 1707-1783) 是瑞士巴塞尔人，他的父亲是基督教加尔文教派的牧师，曾经听过雅各布·伯努利的课。当时教会势力很大，牧师的社会地位普遍要比科学家高，这和现代的情况很不相同。因此，欧拉的父亲希望欧拉将来作一名牧师，也是顺理成章的事情。

欧拉遵从父亲的意见，进了巴塞尔大学，学习神学和希伯来语等。然而他在数学课上的卓越表现引起了约翰·伯努利的注意，于是约翰慷慨地每周给欧拉单独辅导一次，在此过程中欧拉也和丹尼尔有了交往，彼此成了要好的朋友。欧拉 17 岁取得硕士学位后，约翰和丹尼尔说服欧拉的父亲，没

有让欧拉去作牧师，这实在是数学界的一件幸事。

在数学的历史上，人们常常将欧拉与阿基米德、牛顿、高斯并列为最伟大的数学家。在欧拉到达圣彼得堡之前的两个月，牛顿在伦敦逝世。按照法国启蒙运动思想家伏尔泰所说，英国的大人物们争相扛抬牛顿的灵柩，英国人悼念牛顿就像悼念一位造福于民的国王。诗人亚历山大·波普在牛顿的墓志铭上这样写道：“自然和自然定律隐藏在茫茫黑夜之中。上帝说：‘让牛顿出世！’于是一切都豁然明朗。”牛顿时代一过去，欧拉时代马上来临。伟大的无产阶级革命导师马克思在“1848 年至 1850 年的法兰西阶级斗争”一文中，援引 18 世纪法国唯物主义哲学家爱尔维修的话说，“每一个社会时代都需要有自己的伟大人物，如果没有这样的人物，它就要创造出这样的人物来。”按照唯物主义历史观，欧拉的出现具有某种历史的必然性。

由于丹尼尔的关系，哥德巴赫和欧拉很快就熟悉起来了，涅瓦河畔散步又多了一个伙伴。哥德巴赫比欧拉年长 17 岁，在那个时代几乎是一代人的差距，哥德巴赫欣赏欧拉的聪明和勤奋，欧拉钦佩哥德巴赫的见多识广，他们之间是一种忘年之交。

彼得二世上台后不久，缅希科夫就被流放到了西伯利亚，朝政由一些保守派势力把持。1728 年 2 月初，彼得二世将朝廷从圣彼得堡迁回莫斯科，这是保守派卷土重来的一个标志。2 月底，彼得二世在克里姆林宫举行加冕大典。此时的圣彼得堡只是名义上的首都，科学院仍在运行，但多少有些冷清。

哥德巴赫作为彼得二世的家庭教师，也跟着来到了莫斯科。加冕后的彼得二世，还只是个 13 岁的少年，十分贪玩，不爱学习，也没有能力管理朝政。彼得二世经常带着比他大 6 岁的姑姑伊丽莎白和一些青年贵族外出郊游和打猎，读书只是一个点缀。莫斯科郊外有大片的白桦林，在湛蓝的天空下骑马飞驰，是他们十分开心的事情。

据记载，哥德巴赫还教过彼得二世的一个姑姑，应该就是伊丽莎白，因为彼得二世的姑姑安娜一直在她自己的属地，别的姑姑都远嫁到了国外。哥德巴赫的教学任务不重，所以他有时间思考数

哥德巴赫比欧拉年长 17 岁，在那个时代几乎是一代人的差距，哥德巴赫欣赏欧拉的聪明和勤奋，欧拉钦佩哥德巴赫的见多识广，他们之间是一种忘年之交。

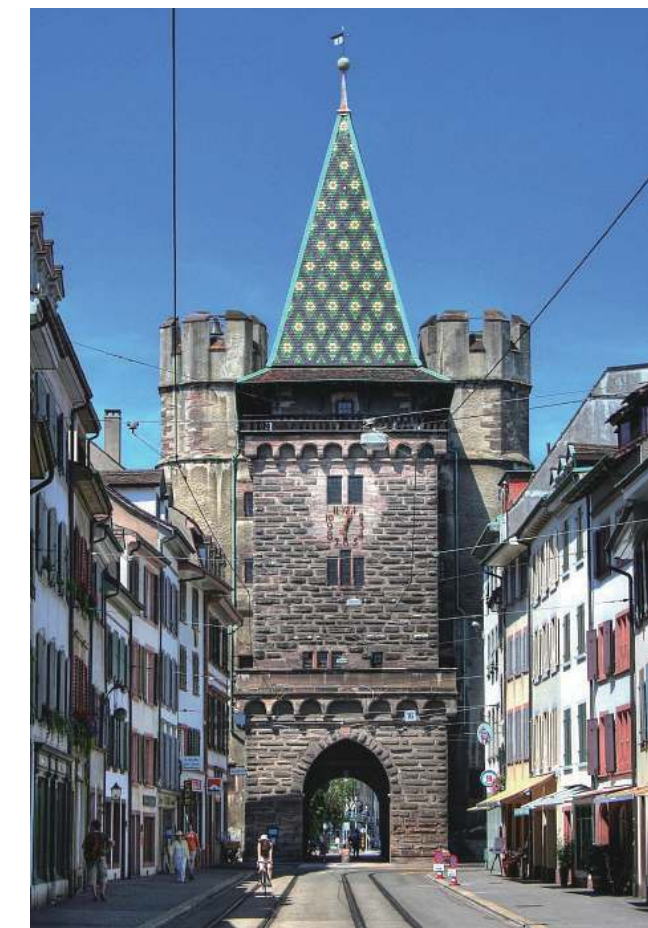
学，并且与丹尼尔和欧拉通信讨论问题。哥德巴赫与欧拉的通信从 1729 年开始，一直持续到 1763 年，就是哥德巴赫去世的前一年。

由于彼得二世年纪小，又无得力的大臣辅佐，朝政比较混乱。这种情况持续了两年多，1730 年初，彼得二世得了天花，这在当时是不治之症，因而他很快就病逝了。彼得二世没有后代，这样罗曼诺夫家族的男性继承人就断绝了。

最高秘密委员会随即举行会议，经过种种考虑，最后选定彼得大帝的侄女安娜·伊凡诺夫娜（1693-1740）作为新沙皇。此时安娜正在库尔兰做公爵，她统治的库尔兰公国位于现在拉脱维亚的西部，面积很小，但其战略位置却相当重要。当年彼得大帝将安娜嫁给了库尔兰的威廉公爵，婚后不久威廉病逝。安娜继任公爵后，一直住在库尔兰，对于俄罗斯发生的重大事情，安娜很少知道。

安娜突然接到让她当沙皇的通知后，顿感喜从天降。最高秘密委员会还让特使带去一份协议书，里面对沙皇的权利作了种种限制，使得沙皇形同虚设，但安娜照签不误。然而，安娜到了莫斯科登上皇位后，立即联络一些贵族大臣，策动近卫军，逼迫最高秘密委员会放弃了已签订的协议，从此安娜女皇（1730-1740 在位）大权独揽。

哥德巴赫的教学任务不重，所以他有时间思考数学，并且与丹尼尔和欧拉通信讨论问题。哥德巴赫与欧拉的通信从 1729 年开始，一直持续到 1763 年，就是哥德巴赫去世的前一年。



瑞士的巴塞尔也是欧拉的出生地

随后，安娜对莫斯科的贵族们进行了大清洗，因为担心有人报复，1732 年，安娜又将朝廷迁回到圣彼得堡。安娜主要

依靠她的情夫比龙来管理朝政，比龙是生长在库尔兰的德国人。

由于哥德巴赫的为人处世深得皇家的信任，在彼得二世病逝后，哥德巴赫被挽留留在宫中，继续为安娜女皇做事。当朝廷迁到圣彼得堡之后，哥德巴赫非常怀念科学院宁静的生活，于是他又回到了圣彼得堡科学院，并被任命为通信秘书。这种秘书不是做抄抄写写的工作，而是有管理职权的。1737 年，哥德巴赫升任，负责科学院的管理工作。

在这期间，哥德巴赫的朋友圈里有些变化。丹尼尔由于不太适应圣彼得堡的严寒气候等原因，于 1733 年回到了温暖的家乡巴塞尔，欧拉接替了丹尼尔的位置。在巴塞尔，丹尼尔先是担任解剖学和植物学教授，之后成为生理学教授，后来又成为物

理学教授，他的兴趣更集中在数学的应用方面。丹尼尔回到巴塞尔后，和欧拉进行了长达 40 多年的学术通信。在通信中，丹尼尔向欧拉提供重要的科学信息，而欧拉则用杰出的分析才能和推理能力，给予迅速的帮助。而哥德巴赫与丹尼尔之间则没有进行类似的学术通信，其原因是哥德巴赫把主要精力用在了管理工作和社会活动上，余下的时间思考一些比较纯粹的数学理论问题，和丹尼尔的兴趣相去较远。

大师风采

当时接替丹尼尔的欧拉只有 26 岁，却已初显大师风采，他在数学的理论和应用两方面都做出了很大贡献。在大学微积分教程中，我们常会看到欧拉变换、欧拉公式和欧拉方程等。欧拉引进的一些记号，如用 $f(x)$ 表示函数， Σ 表示求和， i 表示虚数 $\sqrt{-1}$ 等，现在一直沿用。欧拉证明了，极限



世界各国发行的纪念欧拉的邮票与钱币

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

存在，并将它记作 e ，这个数在分析及其应用中都是很重要的。以 e 为底的对数称为自然对数，在理论研究中经常用到。

欧拉还将 e 的复数次幂与三角函数联系起来，建立了欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ ， x 是实数。这个公式是棣莫弗定理的一个发

展，由它可得

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$

以及

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix} \cdot e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ &\quad + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y), \end{aligned}$$

比较两式的实数部分和虚数部分，得到

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y,\end{aligned}$$

这就是三角学中的和差化积公式。

早在欧拉 19 岁的时候，他就以一篇研究船桅最佳布置问题的论文，参加巴黎科学院的有奖征文活动，获得了荣誉提名。从 1730 年代中期开始，欧拉以很大的精力来研究航海和船舶建造问题，这些问题对于俄国的海军建设是有现实意义的。后来，欧拉还根据这些积累的经验，写成两卷本的《航海学》出版，书中讲述了浮体平衡的一般理论以及如何将流体力学用于船舶建造。

由于航海学的需要，欧拉研究了太阳、月亮和地球在相互间的万有引力作用之下所产生的运动，特别是月亮的运动规律。欧拉提出了关于月亮运动的一种新理论，根据这种理论，天文学家制成了一张月亮运行表，它对于舰船导航很有价值。欧拉还写过许多关于彗星和行星运动的论著，在他临去世之前，仍在考虑天王星的轨道计算。此外，他常常为解决物理学、地理学、弹道学、保险业和人口统计学中的问题提供数学方法。总而言之，应用问题始终是欧拉研究数学理论的源泉和动力。

在接替了丹尼尔的位置之后，欧拉就打算在俄罗斯安家了，1733 年冬天，他和一位瑞士画师的女儿结了婚。欧拉很享受婚后安逸的生活，灵感泉水般涌现，下笔如有神助，就像法国物理学家弗朗索瓦·阿拉戈所说，“欧拉计算时毫不费力，就像人在呼吸，或鹰在翱翔一样轻松。”从婚后第二年起，

欧拉的 13 位子女陆续降生，可惜只活下来 5 位，其余都在幼年时夭折。欧拉很喜欢孩子，他常常是抱着一个婴儿写作他的论文，而大一点的孩子们在他周围玩耍嬉戏，欧拉在工作的同时尽享天伦之乐。

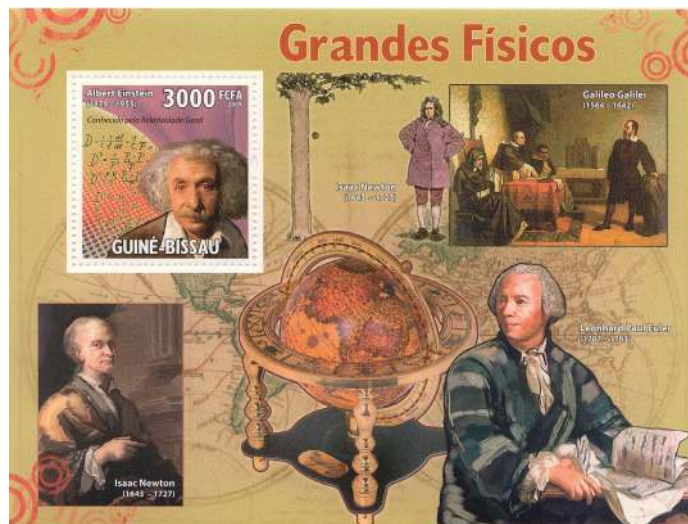
欧拉很喜欢孩子，他常常是抱着一个婴儿写作他的论文，而大一点的孩子们在他周围玩耍嬉戏，欧拉在工作的同时尽享天伦之乐。

虽然俄罗斯的政治风云时常变幻，但科学院里并没有科学家受到政治上的迫害。这主要是因为，俄国的统治阶层迫切需要科学家们来提高俄国的综合国力，而当时欧洲各国对于科学人才是处于一种开放和竞争的状态。欧拉得到的薪水和奖金，足够保障一大家子人过上富足的生活，另外还可以雇人来完成家务劳动，否则这么多家务做下来，别说像鹰一样翱翔，能赶上乌龟就很欣慰了。欧拉后来也说过：“我和所有其他有幸在俄罗斯帝国科学院工作过一段时间的人都不能不承认，我们应把所获得的一切和所掌握的一切归功于我们在那儿拥有的有利条件。”他说的条件既包括学术氛围，也包括生活条件。

1740 年 10 月，安娜女皇去世。她生前指定她外甥女的儿子伊凡继承皇位，称伊凡六世（1740-1741 在位），由比龙摄政。这时的伊凡六世只是两个月大的婴儿，他的父亲是不伦瑞克公爵，不伦瑞克是德意志的一个小邦国。伊凡六世上台后，不伦瑞克的贵族们纷纷涌向俄罗斯，争先恐后地占据了朝廷中的重要位置。本来一个比龙已经够让俄国人烦的了，现在又来了一帮不伦瑞克人，俄国人的心情可想而知。此时，俄罗斯的贵族们强烈希望一个人能出来收拾局面，这个人就是伊丽莎白。

伊丽莎白·彼得罗芙娜（1709-1762）是彼得大帝和叶卡捷琳娜一世的小女儿，血统非常高贵，只可惜叶卡捷琳娜生她时还只是彼得大帝的情妇，因此，伊丽莎白是个私生女，名分不正，这对她的前程产生了很大的影响。

伊丽莎白自幼就长得花容月貌，被彼得大帝夫妇视为掌上明珠，叶卡捷琳娜一世曾想把她嫁给法国国王路易十五，因为名分不正遭到法国人的婉拒。由于没有合适的对象，伊丽莎白一直待闺中，经常随彼得二世出外骑马打猎，也曾受教于哥德巴赫。彼得二世去世后，伊丽莎白还是因为名分不正，没做成沙皇。但 1741 年的政治形势大不相同，此时俄罗斯贵族急于驱除德国势力，也就顾不上再考虑伊丽莎白的名分问题了。



三大科学巨匠：欧拉、牛顿、爱因斯坦

欧拉所处的时代被称作是数学上的分析时代，他在其中做出了最杰出的贡献。约翰·伯努利在给欧拉的信中写道：“在我介绍高等分析的时候，它还是一个孩子，而你正在将它带大成人。”

1741年年底的一天，伊丽莎白乘一架雪橇来到近卫军的营房前，她用富有感召力的声音召来了300多名士兵，跟她一起来到皇宫，轻松地将小沙皇请下皇位。就这样完成了皇位的更迭，整个过程一滴血没流，不愧是彼得大帝的女儿，玩政变如烹小鲜。

1740年5月，28岁的普鲁士新国王腓特烈二世（1740-1786在位）登基。他一上台，就锐意进行法律、经济、教育和军事等方面的改革，致力于建立廉洁高效的政府机构，自称是“国家的第一仆人”，同时积极强化军队建设。在腓特烈二世的统治下，普鲁士的领土充分扩张，经济迅速发展，国力日益昌盛，为德意志的最终统一打下了坚实基础，因此后世称他为腓特烈大帝。

柏林科学院成立于1700年，到了1740年已经有一些衰落趋势。为了重振柏林科学院，腓特烈大帝热情地邀请欧拉去柏林工作。1741年7月，欧拉来到柏林，他一直在柏林呆了25年。欧拉并不是只会书斋里写文章，他是一个有抱负、有管理才干的人，为了寻求更大的施展空间来到了柏林，而当时的俄国正处在乱糟糟的状态，让人对未来无法预料。

欧拉担任了柏林科学院的数学部主任，他还参与了其它许多行政事务，如提出人事安排，监督财务，管理天文台、图书馆和植物园，以及出版历书和地图等。欧拉鼎力协助科学院院长莫佩蒂，在恢复和发展柏林科学院的过程中发挥了重大作用。在莫佩蒂外出期间，由欧拉代理院长。1759年莫佩蒂逝世后，欧拉虽然未被正式任命为院长，但他一直是科学院的实际领导者。

欧拉还担任过普鲁士政府关于安全保险、退休金和抚恤金问题的顾问，并为腓特烈大帝了解火炮方面的最新成果，设计改造运河，也曾主管过普鲁士皇家别墅水利系统的一些设计工作。

在柏林期间，欧拉的研究工作依然非常活跃。他提出了理想流体模型，建立了流体运动的基本方程，从而奠定了流体动力学的基础。他和克莱罗（A. Clairaut）、达朗贝尔（J. R. D' Alembert）一起推进了月球和行星运动理论的研究。他与丹尼尔·伯努利和达朗贝尔之间关于弦振动问题的研讨，推动了数学物理方法的发展。他还出版过《光和色彩的新

理论》一书，解释了一些光学现象。

欧拉所处的时代被称作是数学上的分析时代，他在其中做出了最杰出的贡献。约翰·伯努利在给欧拉的信中写道：“在我介绍高等分析的时候，它还是一个孩子，而你正在将它带大成人。”欧拉的《无穷小分析引论》、《微分学原理》和《积分学原理》是分析学的伟大著作，同时代的人称他是“分析的化身”，后来的一些分析学教程都是他著作的翻版和再翻版。

由于受18世纪启蒙运动思想的影响，腓特烈大帝实行一种叫做“开明专制”的统治。“开明专制”的核心思想是，自上而下地改革或取消已经过时的封建制度，君主应当公平公正，提倡宗教宽容、鼓励科学文化、保护艺术，并且为全民族造福。1750-1754年期间，腓特烈大帝邀请法国启蒙运动的旗手伏尔泰，到普鲁士来做宫廷教师，传播先进思想。

在腓特烈大帝的宫殿里，经常是灯火通明，高朋满座，大家兴致勃勃地讨论各种问题。作为有雄才大略的帝王，腓特烈的思维常常是天马行空，穿梭古今，他还称自己“论秉性就是个哲学家”，因而特别喜欢谈论一些哲学问题。

哲学一直是欧拉的弱项，对于那些天赋人权、自由平等、君



达朗贝尔 (1717-1783), 法国数学家

主立宪、信仰自由等等新鲜说法，一时间还找不到感觉。虽然欧拉没有当牧师，但他一生中从未放弃过对于基督教加尔文教派的信仰。正是由于这种信仰，使得欧拉在困难的时候，内心会比较平静，但另一方面，对于新的社会思想也会产生一些抵触。

欧拉与腓特烈的那个圈子渐渐有些话不投机，加上欧拉和腓特烈在科学院的管理上又产生了意见分歧，所以欧拉开始萌生去意。后来，欧拉听说腓特烈想把科学院院长的位置授予达朗贝尔，而在圣彼得堡那边，叶卡捷琳娜二世女皇一直在向欧拉招手，于是欧拉就下定了走的决心。

达朗贝尔是著名的法国数学家、物理学家和天文学家，虽然他的科学成就无法与欧拉相比，但他担任过法国第一部《百科全书》的科学副主编，这部全书对于宣传启蒙运动思想起到了很重要的作用，因而达朗贝尔更对腓特烈大帝的心思。1764年，腓特烈大帝邀请达朗贝尔到柏林王宫住了3个月，想请他担任柏林科学院院长。达朗贝尔不想移居柏林，并且认为欧拉更适合院长之职。腓特烈出于他自己的一些考虑，始终没有任命欧拉为院长。

1766年，欧拉一家回到圣彼得堡，叶卡捷琳娜二世以皇室的规格接待了他们。女皇不但为他们提供一栋配有高档家具的房子，而且还派了一位御厨专门负责他们的膳食。每到欧拉家的晚餐时间，枝形吊灯散发着温暖的光芒，橡木长条桌上摆上纯银的餐具，餐盘里盛着黄油煎大马哈鱼、烤小牛排、龙虾色拉、奶油烤杂拌等各种食物，鱼子酱抹大列巴（俄式大面包），红菜汤飘着香气，凡是女皇能够吃到的，欧拉家都能吃得到。

欧拉对于圣彼得堡科学院的工作是驾轻就熟的，因为他在柏林期间，俄国政府还一直付给他年薪，欧拉也将他的部分论文寄到俄国发表，并且给予圣彼得堡科学院很多帮助和指点。

回到俄国之后，由于白内障的缘故，欧拉的左眼不久就失明了。而欧拉的右眼早在30多岁时就已经失明，这主要是工作劳累过度所致。在生命的最后十几年里，欧拉凭着非凡的

在欧拉的身后，留下了极其丰富的科学遗产，法国数学家拉普拉斯说过“读读欧拉，读读欧拉，他是我们大家的老师！”

记忆力和心算能力，在助手们的帮助下，依然完成了许多高质量的数学研究。在欧拉的身后，留下了极其丰富的科学遗产，法国数学家拉普拉斯说过：“读读欧拉，读读欧拉，他是我们大家的老师！”



少女与玫瑰（布歇，法国）

香飘俄罗斯

让我们再回到1741年的俄国。伊丽莎白女皇（1741-1761在位）上台之后，彻底驱除了宫廷中的德国势力，并且恢复了彼得大帝的所有改革措施，以及被安娜女皇解散的枢密院，用法律的形式确定了贵族特权，建立起一个能够吸收各阶层精英的文官制度。伊丽莎白女皇可以说是俄国开明专制的始创者，自她以后，俄国的各项国家制度才真正地成熟起来。

国事初定，伊丽莎白女皇心情愉悦，打算好好享受一下生活。在彼得大帝时代，作为公主的伊丽莎白就很喜欢西欧的生活方式，尤其钟爱法兰西的时尚。当上女皇之后，伊丽莎白仍然喜欢跳舞，每周至少要在宫中举行两次假面舞会，她还大量购买法国的新潮时装、香水和化妆品，从而带动了俄罗斯贵族崇尚奢华精致的风气。

当时的法国，正流行一种称为“洛可可”的艺术风格，它的特点是纤巧、精美、幽雅、华丽。洛可可风格始于18世纪初，经国王路易十五的情妇蓬帕杜夫人大力倡导，在法国广为流行。后来的法国王后玛丽·安托瓦内特，也非常热衷于洛可可服装，这在2006年上映的影片《绝代艳后》中



左图：意大利人利玛窦（左）和徐光启（右）合译了《几何原本》，这是中文版中的插图。

中图：摘自徐光启手书篆刻《几何原本》序。

右图：《几何原本》北京印刷书，藏于罗马中央国立图书馆。古希腊数学家欧几里得的这本巨著在西方是仅次于《圣经》流传最广的书籍。

有充分的展现。洛可可服装有夸张的裙撑、打褶的花边、繁复的缀饰等，十分注重整体线条和修腰的效果，印花布料上多为草绿、粉红、鹅黄等亮丽的颜色，让人感受到春夏季节的阳光明媚。

法国画家弗朗索瓦·布歇是洛可可绘画大师，他的作品多取材于神话和贵族生活，代表作有“沐浴后的月神戴安娜”、“维纳斯的凯旋”和“蓬帕杜夫人肖像”等，表现了优雅性感 and 奢华的贵族生活，反映了那个时代人们的审美趣味。

1730年，法国第一家香精香料公司诞生于南方小城格拉斯。这里生长着各种花卉，有金黄色的黄绒花，紫色的熏衣草，白色的茉莉花和缤纷的玫瑰，为香水生产提供了优质原料，不断出现的香水新产品为人们的生活带来了浪漫和激情。法国的香水与时装、葡萄酒并称为三大精品产业，是法国人的骄傲。

虽说此时德国人不受欢迎，但哥德巴赫是个例外。他在俄国工作多年，已经深深扎根在这片土地，况且还做过伊丽莎白的老师，俄国人早把他看成是自己人了。

在伊丽莎白女皇的影响下，法兰西的时尚也在俄国流行，空气里似乎弥漫着优雅的芳香，到处都有和平与繁荣的气息。在圣彼得堡科学院过了多年平静生活的哥德巴赫，此时有点坐不住，又想要去政界了。人有时候很矛盾，热闹多了就想

平静，而平静时间久了又想要热闹了。就性格而言，哥德巴赫是一个喜欢热闹的人。

1742年，凭借宽广的人脉和良好的工作业绩，哥德巴赫被调到俄国外交部工作，外交部设在莫斯科，哥德巴赫也就移居到了莫斯科。虽说此时德国人不受欢迎，但哥德巴赫是个例外。他在俄国工作多年，已经深深扎根在这片土地，况且还做过伊丽莎白的老师，俄国人早把他看成是自己人了，和那些来投机做官的德国人不是一类。

珍贵的通信

哥德巴赫与远在柏林的欧拉一直保持通信，讨论各种数学问题，其中关于数论问题的讨论影响最大。

数论是研究整数性质的数学分支，它的形成和发展经历了漫长的岁月。早先住在洞穴里的原始人就有自然数（或正整数）的概念，后来由于生活和生产的需要，在世界各地逐渐形成了一些独特的数字，例如，古巴比伦的楔形数字，古埃及的象形数字，中国的甲骨文数字，希腊的阿提卡数字等等。我们今天使用的阿拉伯数字实际上是由印度人发明的，12世纪时由阿拉伯人传入欧洲。而关于自然数的理论，至少可以追溯到古希腊时代，欧几里得在他的名著《几何原本》中就讲到了数论。

关于欧几里得 (Euclid) 生平的记录很少, 只知道他在公元前 300 年左右, 生活在埃及的亚历山大城, 在那里教书授徒。他所著的《几何原本》一书, 凝结了古希腊数学的许多精华, 是数学历史上最著名的、流传最广的教科书。在这本书里, 欧几里得从点、线、面的定义出发, 用几条最基本的公理以及形式逻辑方法, 建立起了欧几里得几何学这个严密的体系。

《几何原本》由 13 篇组成, 基本上是讲几何学的, 也有 3 篇 (第 7、8、9 篇) 是讲数论的, 其中的一些数论结果今天仍然常用。比如“算术基本定理”, 它是说, 每个大于 1 的自然数 n 都可以分解为素数的乘积

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s,$$

其中 p_1, p_2, \dots, p_s 是素数 (即只能被 1 和它自身整除的数, 例如 2, 3, 5, 7, \dots), 而且不管怎样分解, 所得到的 p_1, p_2, \dots, p_s 都是一样的, 顶多只有次序上的不同。

我们有了算术基本定理, 就可以用素数这些基本材料, 通过乘法搭建起正整数这座大厦, 很多关于正整数的问题就可以转化成关于素数的问题。例如, 要求两个数 24 和 108 的最大公因子, 可先将他们分解成素数的乘积

$$24 = 2^3 \times 3, \quad 108 = 2^2 \times 3^3,$$

在比较素数方幂的最大公因子之后, 我们可以清楚地看到, 24 和 108 的最大公因子应该是 $2^2 \times 3 = 12$ 。



费尔马 (1601-1665) 猜想的雕塑

在《几何原本》中, 欧几里得提出了一个快速计算最大公因子的方法, 称为“欧几里得辗转相除法”。此外他还证明了, 素数有无穷多个。首先, 他假设只有 n 个不同的素数 $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_n$ 。因为正整数

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

不能被素数 p_1, p_2, \dots, p_n 中的任意一个整除, 所以 a 必有一个不同于所有 p_i 的素数因子, 也就是说, 我们至少有了 $n+1$ 个素数, 这就与前面的假设发生了矛盾, 因此, 素数一定有无穷多个。欧几里得的这个证明, 是反证法一个最经典的范例。

在数论的历史上, 法国数学家费尔马 (Pierre de Fermat, 1601-1665) 是一位里程碑式的人物。费尔马对于数论有直观的天才, 他所提出的很多数论命题, 极大地吸引了后来数学家们的研究兴趣。

费尔马一生基本上生活和工作在法国南部城市图卢兹, 他从 30 岁起成为政府的文职官员, 担任过晋见接待官和地方议会的议员, 主要处理法律事务。费尔马是一个诚实、正直和谨慎的人, 对于本职工作兢兢业业, 使得各项政策能够顺利地贯彻实施。他的乐趣主要来自业余生活, 他对于欧洲的主要语言和欧洲大陆的文学有很深的修养, 还会熟练地用拉丁文、法文和西班牙文写诗, 数学只是他的业余爱好之一, 他研究数学多半是由于对数学美感的热爱。

设 x, y 分别是直角三角形两条直角边的长度, z 是斜边的长度, 那么有

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

这是毕达哥拉斯 (Pythagoras) 定理, 在中国称为勾股定理。有时碰巧 x, y, z 都是正整数, 比如,

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

喜欢纯数学的人看后会感觉特别的爽, 这就是所谓“数学的美感”。

另外, (5, 12, 13) 也满足上面的方程, 类似的数组还可以找到很多。费尔马给出了一般性的命题: 如果 z 是形如 $4m+1$ (m 是正整数) 的素数的话, 那么, z 一定是某个边长均为正整数的直角三角形的斜边长度, 而且这种直角三角形只有一个。当 $m=1$ 时, $z=5$, 直角边 $x=3, y=4$; 而当 $m=3$ 时, $z=13$, 直角边 $x=5, y=12$ 。这个命题也可以这样说: 形如 $4m+1$ 的素数的平方可以表示成两个正整数的平方之

和，如果不考虑两个平方数的次序的话，那么表示方式是唯一的。

欧拉在 1754-1755 年间的一篇论文里证明了：形如 $4m+1$ 的素数可以唯一地表示成两个正整数的平方之和，这里不考虑两个平方数的次序。设 p 是形如 $4m+1$ 的素数，由欧拉的定理知，

$$p = x^2 + y^2,$$

其中 x, y 都是正整数，而且 $x > y$ 。于是，就有

$$\begin{aligned} p^2 &= (x^2 + y^2)^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2, \end{aligned}$$

可见 p^2 可以表示成两个正整数的平方之和。由一个初等的讨论易知，表示方式是唯一的。因此，费尔马的命题成立。

很自然地，费尔马也考虑了高次方程

$$x^n + y^n = z^n,$$

这里 $n(\geq 3)$, x, y, z 均为正整数。他断言，这种高次方程是没有解的。他说可以证明，但没写下来，后世就称为“费尔马猜想”。费尔马自己只解决了 $n=4$ 的情形，他给出的证明相当粗略。后来，欧拉解决了 $n=3$ 的情形。很多优秀的数学家都对这一问题做出过重要贡献，在研究过程中，也产生出了不少新的数学概念和方法。直到 1994 年，才由英国数学家怀尔斯（Andrew Wiles）彻底解决了费尔马猜想，这是 20 世纪数学最重大的成就。从猜想的提出到解决，整整跨越了 350 多年。

费尔马研究数学，只是为了享受得到新发现的乐趣，并不期望别人的承认。费尔马的很多工作散见于他给朋友们的信件，以及他阅读过的书籍的空白处，他生前也发表过几篇论文，但都是匿名的。费尔马去世之后，才由他的儿子克莱蒙特·塞缪尔等人，将他的研究成果整理成两卷本著作出版。后世的数学家和数学史家，积极搜集他的数学工作，挖掘其中的深刻内涵，并赞誉费尔马是“业余数学家之王”。

费尔马研究数学，只是为了享受得到新发现的乐趣，并不期望别人的承认。费尔马的很多工作散见于他给朋友们的信件，以及他阅读过的书籍的空白处。

哥德巴赫对于费尔马研究过的一些问题很感兴趣，例如，形如 $2^n + 1$ （这里 n 为正整数）

的素数问题。容易证明，如果 $2^n + 1$ 是素数，则 $n = 2^m$ （这里 m 为非负整数）。令

$$F_m = 2^{2^m} + 1,$$

后人称 F_m 为费尔马数。最初的 5 个费尔马数

$$\begin{aligned} F_0 &= 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \\ F_3 &= 257, \quad F_4 = 65537 \end{aligned}$$

都是素数，因此费尔马相信，所有的费尔马数都是素数。然而哥德巴赫没有那么深的功力来做这个问题，因此他就写信请欧拉试试。

欧拉回信说， F_5 就不是一个素数，这通过一个初等的证明就可以看出。令

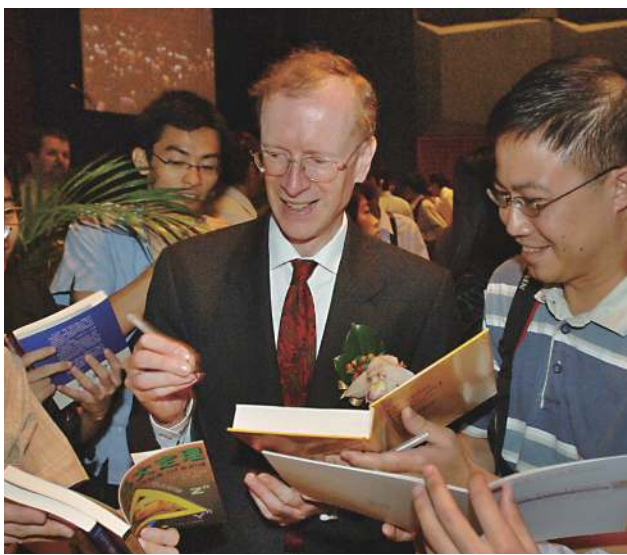
$$a = 2^7, \quad b = 5,$$

则有

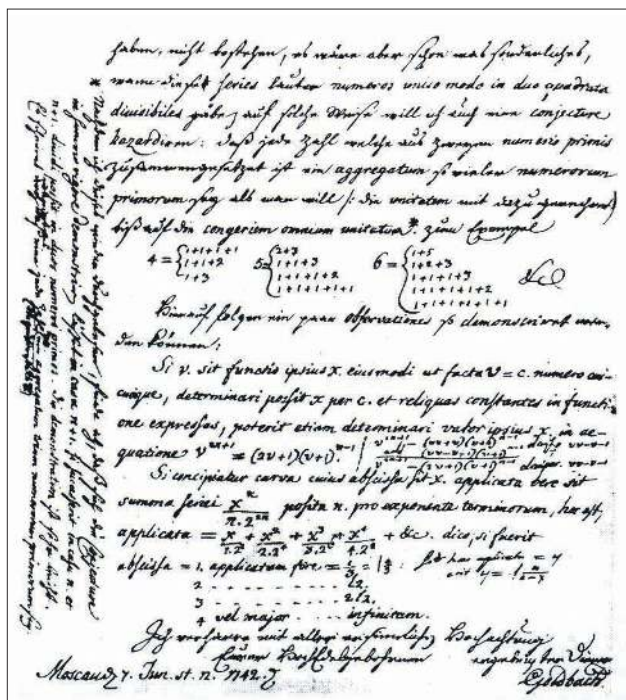
$$a - b^3 = 3, \quad 1 + ab - b^4 = 1 + 3b = 2^4.$$

所以，

$$\begin{aligned} F_5 &= 2^{2^5} + 1 = (2a)^4 + 1 \\ &= (1 + ab - b^4)a^4 + 1 \\ &= (1 + ab)a^4 + 1 - a^4b^4 \\ &= (1 + ab)(a^4 + (1 + a^2b^2)(1 - ab)) \\ &= 641 \times 6700417, \end{aligned}$$



英国数学家怀尔斯最终解决了有 350 年历史的费尔马猜想，这是他获得 2005 年邵逸夫奖时在香港的留影。



哥德巴赫和欧拉于 1742 年的一封重要的通信

可见并非所有的费尔马数都是素数。

于是，我们可以进一步问，是否存在无穷多个费尔马素数，这与几何学的作图问题很有关系。1801 年，高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777-1855）证明了，对于一个正多边形，如果它的边数是一个费尔马素数，或者是几个不同费尔马素数的乘积的话，那么，这个正多边形就可以用圆规和没有刻度的直尺做出。时至今日，关于费尔马素数问题也少有进展，看来它的确是非常困难的。

下面两封信被归于数学史上最珍贵的通信之列，一封是 1742 年 6 月 7 日在莫斯科的哥德巴赫给在柏林的欧拉的信，另一封是 1742 年 6 月 30 日欧拉给哥德巴赫的回信。

哥德巴赫在信中说：“对于那些虽未切实论证但很可能是正确的命题，我不认为关注它们是一件没有意义的事情。即使以后万一证明它们是错误的，也会对于发现新的真理有帮助。正如你已经证明的那样，费尔马关于 F_m 给出一列素数的想法是不正确的，但如果能够证明 F_m 可以用唯一的方式表成两个平方数之和的话，那也是一个很了不起的结果。”

当 $m \geq 1$ 时， F_m 是形如 $4n+1$ 的正整数。由上述费尔马的一个命题，如果 F_m 是素数的话，那么 F_m 自然就可以用唯一的

方式表成两个平方数之和。哥德巴赫的意思是，在无法保证 F_m 是素数的情况下，看看能否证明弱一点的结果“ F_m 可以用唯一的方式表成两个平方数之和”。

欧拉在回信中否定了哥德巴赫的想法，在经过一番推理之后，他指出

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 65536^2 + 1^2 \\ = 62264^2 + 20449^2,$$

即 F_5 可以用至少两种方式表成两个平方数之和。

哥德巴赫在信中又说：“类似地，我也斗胆提出一个猜想：任何由两个素数所组成的数都是任意多个数之和，这些数的多少随我们的意愿而定，直到所有的数都是 1 为止。例如，

$$\begin{aligned} 4 &= 1+3 = 1+1+2 \\ &= 1+1+1+1, \\ 5 &= 2+3 = 1+1+3 \\ &= 1+1+1+2 \\ &= 1+1+1+1+1, \\ 6 &= 1+5 = 1+2+3 \\ &= 1+1+1+1+2 \\ &= 1+1+1+1+1+1, \end{aligned}$$

……。”哥德巴赫又在页边的空白处补充道：“重新读过上面的内容后，我发现，如果猜想对于 n 成立，而且 $n+1$ 可以表成两个素数之和的话，那么，可以严格地证明猜想对于 $n+1$ 也成立。证明是容易的。无论如何，看来每个大于二的数都是三个素数之和。”这里哥德巴赫把 1 看成了素数，下面欧拉也采用这种看法。

欧拉在回信中说：“关于‘每个可以分成两个素数之和的数又可分拆为任意多个素数之和’这一论断，可由你以前写信告诉我的一个观察（即‘每个偶数是两个素数之和’）来说明和证实。如果所考虑的数 n 是偶数的话，那么它是两个素数之和。又因为 $n-2$ 也是两个素数之和，所以 n 是三个素数之和，同理它也是四个素数之和，如此等等。

下面两封信被归于数学史上最珍贵的通信之列，一封是 1742 年 6 月 7 日在莫斯科的哥德巴赫给在柏林的欧拉的信，另一封是 1742 年 6 月 30 日欧拉给哥德巴赫的回信。



座落在圣彼得堡的叶卡捷琳娜宫殿：雄伟的外景，富丽堂皇的内殿，和美丽的法式花园。

如果 n 是奇数的话，因为 $n-1$ 是两个素数之和，所以 n 是三个素数之和，因此它可以分拆为任意多个素数之和。无论如何，我认为“每个偶数是两个素数之和”是一条相当真实的定理，虽然我不能证明它。”

因为这是私人间的通信，所以其中的说法相当随意，在数学上是不严格的。但里面的要点，如“每个偶数是两个素数之和”以及“每个大于二的数都是三个素数之和”是很明确的，后人在数学上将它们严格化，并称之为“哥德巴赫猜想”。

优美的猜想

英国数学家华林（E. Waring, 1736-1798），在 1770 年出版的《代数沉思录》一书中，首次提出了如下形式的哥德巴赫猜想：

1. 每个大于 2 的偶数都是两个素数之和；
2. 每个奇数或者是一个素数，或者是三个素数之和。

一个标准的现代版本是这样的：

- I. 每个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和；
- II. 每个不小于 9 的奇数都是三个奇素数之和。

可以将它们写成下面的数学公式：

- I. $N = p_1 + p_2$, 当 $N(\geq 6)$ 是偶数；
 - II. $N = p_1 + p_2 + p_3$, 当 $N(\geq 9)$ 是奇数，
- 其中 p_i 均为奇素数。

如果猜想 I 成立，那么对于奇数 N ，我们可以将 $N-3$ 表成两个奇素数之和，因此猜想 II 就成立。也就是说，猜想 II 是猜想 I 的推论。保留猜想 II 的一个原因是，可以使得猜想在形式上关于奇数和偶数都有表述。

哥德巴赫猜想的表达形式简洁明了，体现了数学的优美感觉。从乘法来看，素数是构成自然数的基本元素，在哥德巴赫猜想中，将素数放到加法的环境里，实际上是刻画了加法和乘法的某种关系，而这两种运算在数学中是最基本和最常见的。

我们再从加法的角度，来看自然数的构成。如果将 1 重复地相加，显然可以得到任何一个自然数，但这太没技术含量了。稍微复杂一点，人们会尝试将一些特殊的数（比如素数）相加，看能否得到任何一个自然数，这样就很有可能得到与哥德巴赫猜想类似的结论。据说早在哥德巴赫之前，法国哲学家和数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）在他的手稿里就有“每个偶数是至多三个素数之和”这样的叙述。



在哥德巴赫猜想产生的过程中，伟大的欧拉实实在在地当了一回配角。我们已经看到，对于费尔马数问题，欧拉表现出了精湛的数学功力，但对于哥德巴赫猜想，欧拉却没有提出任何有价值的意见。这并不意味着欧拉对此没有兴趣或没有深入思考，实际上他是深知这个问题的分量和难点所在的。

在欧拉那个时代，数学的主要工具是分析方法，主要研究对象是连续的实数直线。而正整数在实数直线上是一些离散的点，如何用处理连续对象的工具来研究离散情形，是一个非常重要的课题。1737年，欧拉提出了著名的乘积公式：当 $x > 1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^x} \right)^{-1},$$

其中乘积中的 p 跑遍所有的素数。欧拉乘积公式开了用分析方法研究数论的先河，对于数论的发展影响非常重大。

在欧拉乘积公式中，令 $x \rightarrow 1$ ，左边的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

是发散的，因此，右面的乘积

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1}$$

不会是一个有限的数。由此可知，所有素数的个数不可能是有限的。这样，对于欧几里得关于素数个数无限的定理，我们就有了一个分析的证明。

然而在对于素数的认识方面，当时的人们并没有比欧几里得走出多远。除了知道素数有无穷多个，再细致一点的信息就不清楚了。比如，关于不超过 x 的素数个数，即

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

的一些基本性质，当时是很不清楚的。后来，高斯才对 $\pi(x)$ 的近似公式有了一个猜想性的结果，而证明则是 1896 年的事情了。

要弄清楚单个素数的变化，就已经如此之难，想要把两个或三个素数的变化通过加法合在一起考虑，其难度可想而知。虽然欧拉无法预料素数理论的发展，但他深知解决哥德巴赫猜想已经远远超出他的能力之外。外行人不了解其中的深浅，对于这样一个看似不太深奥的猜想，居然能使欧拉这样

优美的哥德巴赫猜想，让我们记住了香气飘逸的伊丽莎白女皇时代，而美轮美奂的叶卡捷琳娜宫，更使人对那个时代印象深刻。

的顶级数学大师一筹莫展，他们会感到很好奇。

优美的哥德巴赫猜想，让我们记住了香气飘逸的伊丽莎白女皇时代，而美轮美奂的叶卡捷琳娜宫，更使人对那个时代印象深刻。

早在1717年，彼得大帝在圣彼得堡郊外，为妻子叶卡捷琳娜修建消夏别墅，称为叶卡捷琳娜宫。1741年，伊丽莎白女皇登基后，授权俄国最优秀的建筑师，对叶卡捷琳娜宫进行了扩建和改造。改造后的宫殿长达306米，天蓝色和白色相间的外表耀眼迷人，造型丰富的镀金雕塑和凹凸有致的结构，使得整个建筑华贵而美观，宫殿上方五个圆葱头式的尖顶，在碧空下金光灿灿，很远处就能望见。宫殿内部，金碧辉煌的大厅一间挨一间，最具特色的算是琥珀厅，内部全部用光彩夺目的琥珀装修而成，被称为是世界的奇迹。花园里芳草萋萋，绿树成荫，到处弥漫着花草的清香。湖面上波光粼粼，荡漾着梦幻般的诗意。叶卡捷琳娜宫反映了俄罗斯帝国蓬勃向上的气象，多少年来，这里的湖光林色被一代又一代的俄罗斯诗人咏颂。

哥德巴赫踏上仕途之后，顺风满帆。1746年，哥德巴赫受赐封地，有了自己的庄园，虽不及皇家庄园富贵气派，却也宁静雅致，别有洞天。在俄罗斯广袤的土地上，各种庄园星罗棋布，形成赏心悦目的风景。人们会巧妙地利用庄园周围的自然资源，如河流、小溪、湖泊、山丘和森林，来营造一个景色宜人、情调浪漫的环境。庄园里都辟有花圃和草坪，湖畔河边有三两凉亭点缀其间，林荫小道，曲径通幽，漫步庄园之中，让人流连忘返。秋天的艳阳，冬天的静雪，春季的百合，夏季的紫丁香，使人品味无穷。著名的俄国小说家屠格涅夫，在《罗亭》、《贵族之家》等长篇小说中，对于俄罗斯贵族的生活有生动细致的描写。

清晨，哥德巴赫常常独自一人，信马由缰，徜徉在大自然的怀抱间。晚上，端上一杯格瓦斯（一种俄式饮料），凭窗远眺，夜色朦胧中的田园风光，更让人心旷神怡，如同丘特切夫“静静的夜晚”一诗中所写：

静静的夜晚，已不是盛夏，
天空的星斗火一般红，
田野在幽幽的星光下，
一面安睡，一面在成熟中……

啊，它的金色的麦浪，
在寂静的夜里一片沉默，
只有银色的月光
在那如梦般的波上闪烁……

粉色的月光

圣彼得堡科学院建立后，国外知名学者的引进确实带动了俄罗斯科学的发展。在伊丽莎白女皇时代，俄罗斯本土的科学家开始出现，罗蒙诺索夫是其中最杰出的一位。

罗蒙诺索夫（M. V. Lomonosov, 1711-1765）出身于一个富裕的渔民家庭，从小就有强烈的求知欲。当时平民受教育的机会很少，所以他就冒充贵族子弟，考入莫斯科的斯拉夫—希腊—拉丁语学院，不久成为那里最优秀的学生。后来，罗蒙诺索夫被派到德国留学，1741年学成回国，到圣彼得堡科学院工作，1745年担任化学教授。



罗蒙诺索夫 (M. V. Lomonosov), 俄国科学家、人文学者，莫斯科大学的创建人。



十九世纪的圣彼得堡

罗蒙诺索夫通过试验，总结出了“物质不灭定律”，也就是“质量守恒定律”，这一发现比法国化学家拉瓦锡的发现要早得多。罗蒙诺索夫还创立了物理学中热的动力学说，指出热是物质本身内部的运动，从本质上解释了热的现象。他在谈到物质结构时指出，微粒是由一些元素集合而成，这已经具有了“原子—分子学说”的思想。由于当时俄国的科学还很落后，西欧对于俄国的科学成就并不重视，因此，罗蒙诺索夫的这些重要学术思想没有得到广泛的传播。

罗蒙诺索夫还是一位出色的人文学者，他著有《俄罗斯古代史》、《俄语语法》和《修辞学》等著作。他的“攻克霍亨颂”（歌颂俄国对土耳其战争的胜利）、“伊丽莎白女皇登基日颂”和“彼得大帝”等诗篇，被誉为俄国文学史上古典主义的佳作。

莫斯科大学的创建是罗蒙诺索夫的一大历史功绩。罗蒙诺索夫写信给伊凡·伊凡诺维奇·舒瓦洛夫公爵，他在信中表示要在俄罗斯建立高等教育体系，并阐述了关于莫斯科大学的构想和具体的实施方案。舒瓦洛夫利用他在宫廷中的影响力，积极推动莫斯科大学的创建。1755年1月，伊丽莎白女皇批准了罗蒙诺索夫的方案。同年5月，莫斯科大学举行了盛大的开学典礼，当时设有哲学、法律和医学三个系。1940年，莫斯科大学被冠名为“国立莫斯科罗蒙诺索夫大学”。如今莫斯科大学已经是俄国规模最大、学术水平最高的高等学府，它是世界上最著名的大学之一，也

是俄国诺贝尔奖获得者的摇篮。

俄国大诗人普希金把罗蒙诺索夫比作是“俄罗斯的第一所大学”，文学评论家别林斯基更是用诗样的语言，赞誉罗蒙诺索夫“仿佛北极光一样，在北冰洋岸发出光辉……光耀夺目，异常美丽”。

舒瓦洛夫不仅推动了莫斯科大学的创建，而且还积极倡议建立圣彼得堡美术学院。这所学院创办于1757年，培养出了列宾、苏里科夫、希施金、瓦斯涅佐夫等一大批杰出的美术大师，后世称舒瓦洛夫为著名的教育家。舒瓦洛夫年轻时是

一位翩翩美少年，被伊丽莎白女皇在一次巡游中发现，女皇顿觉喜不自胜，将舒瓦洛夫收为零距离的宠臣，后来又将他升为公爵。舒瓦洛夫还和后来的叶卡捷琳娜二世女皇有过一段暧昧，他是个专门吃软饭的人，连这种人都惦着为国奉献，俄罗斯想不发达都难了。

虽然伊丽莎白女皇热衷于纸醉金迷的生活，但她有与生俱来的政治天分，处理国事举重若轻，善于化解矛盾于无形，因而，无论是和平年代还是战争时期，她都能牢牢掌控大局。

“七年战争”（1756-1763）是欧洲列强为争夺霸权而进行的一场超级大战，交战的一方为普鲁士、英国等，另一方为奥地利、法国和俄国等。普鲁士国王腓特烈二世亲率大军，驰骋疆场。在1757年的罗斯巴赫战役和洛伊滕战役中，腓特烈二世运用机动灵活的战术，以少胜多，取得了辉煌的胜利，在军事史上留下了赫赫威名。然而，伊丽莎白女皇并不示弱，她运筹帷幄，调兵遣将，屡次挫败普军。由伊丽莎白女皇、奥地利女王玛丽亚·特蕾西娅、法国国王路易十五的情妇蓬帕杜夫人订立的联盟，被腓特烈二世称作“三条裙子的联盟”，正是这个联盟使得他在政治、军事和外交上以寡敌众，在大局上逐渐转向被动。柏林一度丢失，腓特烈二世越来越招架不住，他感到很绝望，甚至携带毒药随时准备自杀。

在“七年战争”期间，作为外交官的哥德巴赫，周旋于各国



彼得三世 (1728-1762) 被妻子叶卡捷琳娜政变夺权

政府之间，显示了出色的外交才华，还没到战争结束，他就得到了提升。1760 年，哥德巴赫升任枢密院顾问，年薪 3000 卢布。枢密院是俄国最高咨询机构，其职责是审议重要的国务，回应沙皇的咨询，大凡担任枢密院顾问的人，都是身份特殊的重量级人物。据记载，当时沙皇赏给某位重臣的养老金是 5000 卢布，沙皇举办一次盛大的活动，花费约为 1 万多卢布，由此可见，年薪 3000 卢布是非常高的待遇。哥德巴赫担任枢密院顾问后，负责制定了俄国皇家儿童教育准则，这个准则管理俄国儿童达一个世纪之久。

1761 年 12 月，伊丽莎白女皇病逝。临终前，她指定她姐姐的儿子卡尔·彼得·乌尔里希（1728-1762）为皇位继承人，称彼得三世（1762 年在位）。彼得三世是彼得大帝的外孙，他的父亲是一位德国公爵。这位彼得从小在德国长大，在腓特烈二世的宫廷里受到过培养，对于普鲁士的军事制度和德国文化狂热崇拜，他不喜欢香喷喷的女皇、公主，就喜欢酷酷的腓特烈二世。腓特烈二世确实是个很有特点的人，他骑一匹个头不大但很善奔跑的阿拉伯马，戴一顶旧军帽，鼻烟盒不离身，打仗时常和士兵们一起风餐露宿。平时，腓特烈二世除了爱谈论哲学问题外，还喜欢吹长笛，并且写过 120

首长笛奏鸣曲，此外他还会用法文写诗。

彼得三世刚一上台，就与腓特烈二世结为同盟，他归还了俄国占领普鲁士的全部领土，并且命令俄国军队调转枪口，同昔日的盟友奥地利作战。1763 年 2 月，“七年战争”结束，普鲁士和英国成为这场战争的赢家，腓特烈二世能够成就大帝的伟业，彼得三世是帮了大忙的。然而，彼得三世的行为已经极大地损害了俄罗斯的国家利益，但他的自我感觉却十分良好，他也想干出一些流芳千古的事情来。于是，彼得三世采取了一些改善下层人民生活的措施，没收了教会的一些土地，强迫军队普鲁士化等。但是他的所作所为引起了俄国统治阶层的强烈不满，也加速了另一位历史人物的登场。

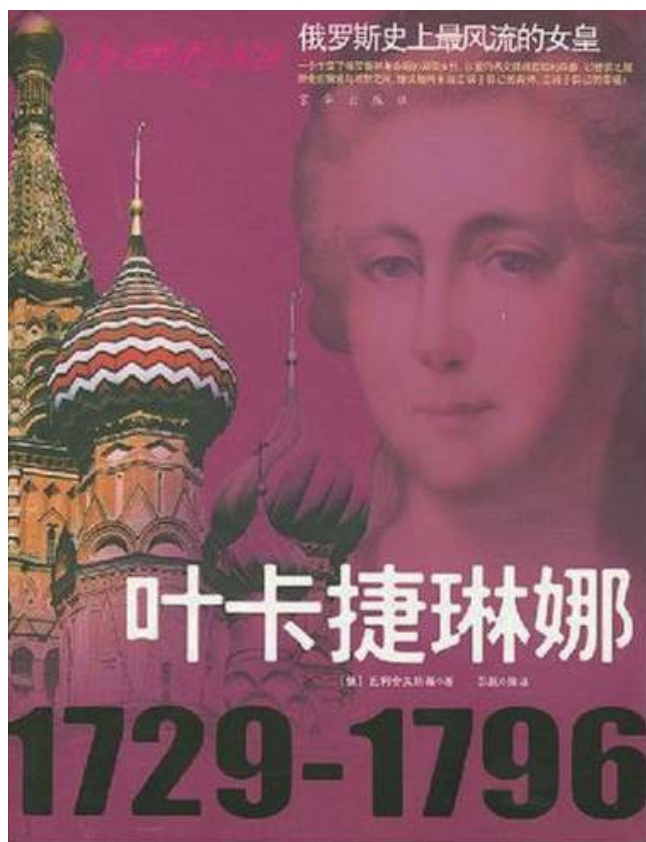
彼得三世的皇后叶卡捷琳娜·阿列克谢耶芙娜（1729-1796）是彼得的姑姑的女儿，她是一个纯粹的德国人，后来取了一个俄国名字。1745 年，叶卡捷琳娜与当时还是大公的彼得三世在圣彼得堡结婚。关于婚礼上的新娘叶卡捷琳娜，有这样的描写：她的身材修长而妙曼，淡粉色的皮肤衬托出一头浓密金发的光彩，鹅蛋形的脸庞线条分明，鼻梁高挑，两片红唇美艳而性感，碧蓝色的眼睛流露出万种风情，……。来参加婚礼的嘉宾，无不为之惊艳，令大家想不到的是，在这样美丽的容貌下面，还有一个睿智的大脑和一颗勃勃的雄心。

叶卡捷琳娜深知，她的未来将与俄罗斯紧密地联系在一起，于是，她努力学习俄语和俄国宫廷礼仪，虔诚地信仰东正教，详细研究俄国的历史、文化和风俗，并表现出发自内心的尊重。她的这些做法，赢得了俄国统治阶层的交口称赞，与彼得的做法形成了鲜明的对比。由于叶卡捷琳娜同彼得的志趣与秉性不合，导致了他们婚姻的不幸。

鲜艳的花朵容易招蜂惹蝶，而叶卡捷琳娜又不是一个甘于寂寞的角色，因此她很快就有一些心仪的情人，多为近卫军中英俊健美的军官，其中与格里戈利·奥尔洛夫最为亲密，他在后来的政变中是出了大力的。此外，叶卡捷琳娜还广交政治盟友，积极发展自己的势力，她做足了功课，只等待一个好机会。

彼得三世上台后所推行的一系列政策，遭到了俄国统治集团的强烈反对，这给了叶卡捷琳娜一个绝好的机会。1762 年 7 月的一天，趁着彼得三世去外地的时机，叶卡捷琳娜带领一

在“七年战争”期间，作为外交官的哥德巴赫，周旋于各国政府之间，显示了出色的外交才华，还没到战争结束，他就得到了提升。



叶卡捷琳娜二世

支部队政变，其他部队纷纷倒戈，在一片“我们的小母亲叶卡捷琳娜”、“女皇万岁”的欢呼声中，她被推上沙皇的宝座，称叶卡捷琳娜二世（1762-1796 在位）。宫廷显贵、教会人士和各国公使，争先恐后地迎接新女皇。下台后的彼得三世，很快就神秘地死去了。

叶卡捷琳娜二世上台之后，一方面加强中央集权，维护和发展农奴制度；另一方面，她奉行开明专制，理顺各种关系，充分调动各方面的积极性，大力促进生产力的发展。在她当政的 34 年间，俄国手工工场大规模增加，生铁产量居世界首位，进出口贸易大幅度增长，并有巨额贸易顺差。俄国的经济实力和军事实力空前强大，帝国进入鼎盛时期。

大多数帝王都想治理好国家，即使是彼得三世，他也是想有所作为的，但能否治理好国家，要取决于政治智慧和能力。与伊丽莎白女皇不同，叶卡捷琳娜二世出身于德国的一个小公爵家庭，她的政治才能很难从血统和家传上找到原因。早年的叶卡捷琳娜，热衷于阅读法国启蒙运动思想家伏尔泰等人的著作，登基以后，她与伏尔泰有频繁的书信往来，并将

启蒙运动的思想运用到政治实践中去。叶卡捷琳娜后来的一些情人中，也有像格里戈利·波将金元帅这样的政治家、军事家和外交家，无论卧榻之上，还是云雨之间，无时不在探讨治国安邦的大计。有道是热爱是最好的老师，无论对于科学还是政治，都是同样的道理。

在叶卡捷琳娜时代，俄罗斯的版图大大扩张。俄国通过两次对土耳其的战争，将曾经不可一世的奥斯曼帝国打得没了元气，实现了彼得大帝打通黑海出口的梦想。俄国还伙同普鲁士、奥地利三次瓜分波兰，并侵占了立陶宛、白俄罗斯和西乌克兰的大部分领土。在亚洲方面，俄国蚕食高加索，侵入哈萨克草原，并完全占领了西伯利亚北部，获得了丰富的森林和矿产资源。此外，俄国还占领了北美的阿拉斯加地区，并在加利福尼亚建立了一块殖民地。叶卡捷琳娜二世曾有这样的豪言：“假如我能够活到二百岁，全欧洲都将匍匐在我的脚下！”

叶卡捷琳娜二世对于俄国做出了巨大的贡献，得到了俄国人的一致称赞，后世尊称她为叶卡捷琳娜大帝。在俄国历史

哥德巴赫一直活到了辉煌的叶卡捷琳娜时代，可惜年事已高，无法有更大的作为。1764年11月20日，哥德巴赫逝世于莫斯科，享年74岁。

荣誉的冠冕，像在寂静中盛开的花！”

哥德巴赫一直活到了辉煌的叶卡捷琳娜时代，可惜年事已高，无法有更大的作为。1764年11月20日，哥德巴赫逝世于莫斯科，享年74岁，在那个时代算是高寿了。哥德巴赫安息在俄罗斯的青山绿水之间，与白桦林为伴，沐浴着女皇粉色的月光。

在叶卡捷琳娜一世之前，俄国没有女皇，而在叶卡捷琳娜二世之后，俄国再没出现过女皇，哥德巴赫恰好经历了俄国历史上全部四位女皇的朝代。也许哥德巴赫猜想折射了女皇们的光彩，所以才显得如此美艳动人，引得一代代数学家心驰神迷。

皇冠上的明珠

关于哥德巴赫的生平，文献中记载很少，即使是数学史专家，也未必十分了解。莫里斯·克莱因（Morris Kline）在他的名著《古今数学思想》第二册第367页上，称哥德巴赫是“普鲁士派往俄罗斯的一位公使”，这显然是不对的。哥德巴赫与欧拉的通信，有不少被保留下来，但信中的文字多是德文与拉丁文的混合体，读起来相当困难。其中关于哥德巴赫猜想的通信，早就被翻译整理出来，但后来的数学家谈到哥德巴赫猜想时，一般都采用标准的现代版本，很少引用原信。

然而，正如我们已经看到的那样，哥德巴赫在当时的社会中，是和各方面都有广泛联系的人物，关于他的研究会是一件有趣和有意义的事情。哥德巴赫的人生历程，对于后来者也有一定的借鉴意义。

我们已经讲了哥德巴赫和他那个时代的一些事情，关于哥德巴赫猜想后来的发展，我们再来做一点简单的介绍。

虽然数论的历史非常悠久，但它成为数学的一个独立分支却是比较晚的事情。高斯于1801年发表的著作《算术研究》，被认为是数论作为一门独立学科诞生的标志，这里的“算术”

上，只有她和彼得一世有此殊荣。即使是反对沙皇专制的普希金，对于叶卡捷琳娜大帝还是满怀敬仰之情的。他在长诗“皇村记忆”中，称叶卡捷琳娜时代是“我们的黄金时代”，他说“想当时，在伟大女皇的权杖下，快乐的俄罗斯曾戴着

是指“高等算术”或“数论”。高斯对于数论特别钟爱，徐迟在报告文学“哥德巴赫猜想”中，有过“自然科学的皇后是数学，数学的皇冠是数论。哥德巴赫猜想，则是皇冠上的明珠。”这样的描述，其中采用了高斯的一些说法。

关于不超过 x 的素数个数 $\pi(x)$ ，高斯做过这样的猜测：当 $x \rightarrow \infty$ 时，有

$$\frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)} \rightarrow 1,$$

这里 $\ln x$ 为自然对数。如果这个猜测成立，则它就叫做素数定理。

1850年，圣彼得堡科学院的切比雪夫（P. L. Chebyshev）证明了，

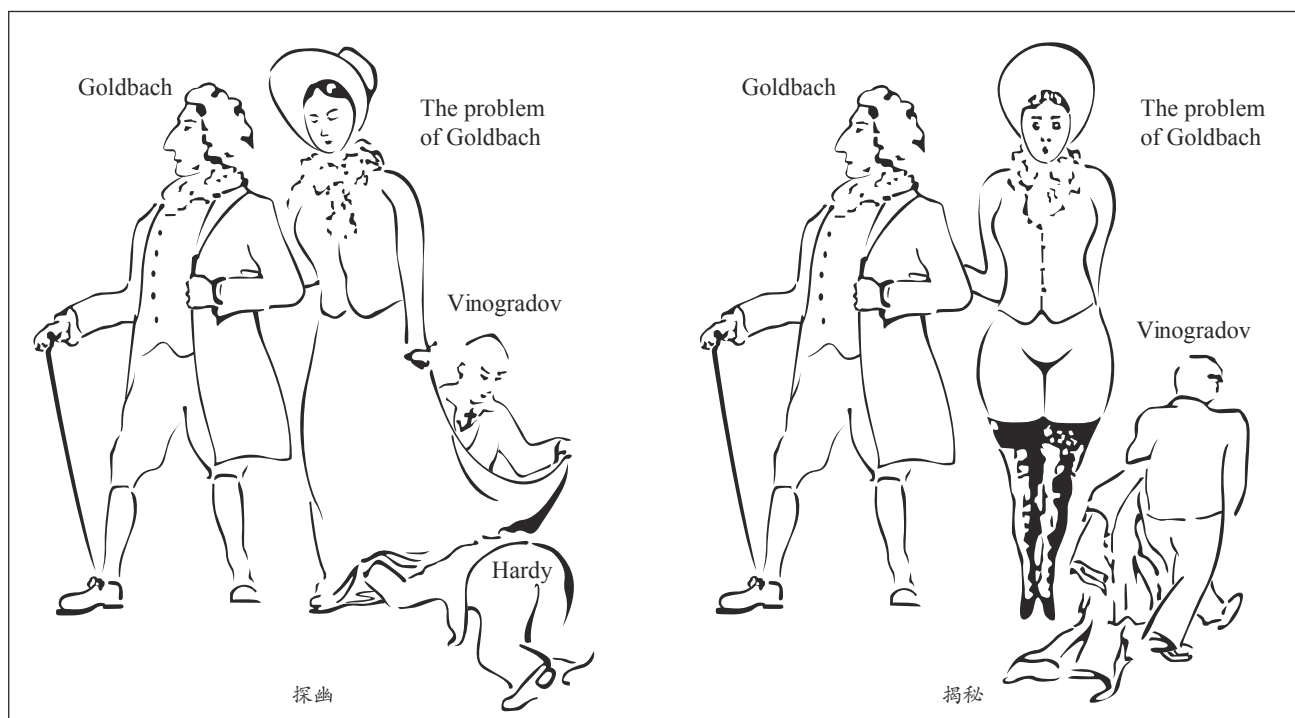
$$c_1 \leq \frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)} \leq c_2,$$

其中 c_1, c_2 是正的常数。这是在欧几里得证明了素数个数无限之后，人们关于 $\pi(x)$ 第一个重要的理论结果。切比雪夫在证明中用到的工具是微积分。

革命性的变化发生在1859年。当时，德国数学家黎曼（G. F. B. Riemann）发表了题为“论不超过一个给定值的素数个数”的论文，其中他用复变函数的理论来研究 $\pi(x)$ 。黎曼的出



历史名城莫斯科；1764年哥德巴赫在此去世。



这是 I. M. Vinogradov 早年创作的两张漫画，讲述自己对 Goldbach 问题研究过程的体会。漫画在所有当事人 (Hardy, Littlewood, I. M. Vinogradov) 都去世之后，才由 I. M. Vinogradov 的学生 A. A. Karatsuba 在纪念 I. M. Vinogradov 的文集里发表。文集刊于俄文期刊 Proc. Steklov Inst. Math., 有英译。

该漫画原作，现存 I. M. Vinogradov 的另一个学生 V. N. Chubarikov 处。V. N. Chubarikov 曾把该漫画复制赠送刘建亚，复制件现存山东大学数学学院图书馆。

发点，仍是欧拉乘积公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1},$$

此时的 s 可以是任意实部大于 1 的复数。黎曼将等式左边的级数看成是变量 s 的函数，称为 zeta 函数。他将 zeta 函数解析开拓到整个复数平面 ($s=1$ 是唯一的极点)，在 $\pi(x)$ 和 zeta 函数的零点之间建立起了一个关系式。黎曼的研究表明，素数定理与 zeta 函数的零点分布有着密切的关系。想想关于正整数的问题，要用虚数来研究，这是多么令人惊奇的事情。在数学中，有时将局部性的问题提升到更广阔的空间里考虑，常常会收到意想不到的效果，正所谓“欲穷千里目，更上一层楼”。

虽然黎曼没有给出关于 $\pi(x)$ 的具体结果，但他为素数定理的研究指明了方向。正是沿着这个方向，1896 年，法国数学家阿达马 (J. S. Hadamard) 和比利时数学家普桑 (Charles Jean de la Vallée Poussin) 独立地证明了素数定理。至此，人们对于单个素数的变化，已经有了比较深刻的认识。

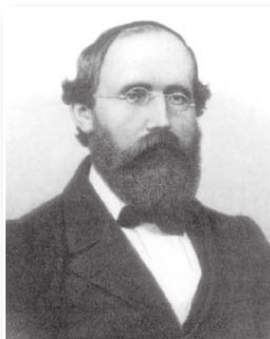
1900 年，第二届国际数学家大会在巴黎举行，大数学家希尔伯特 (David Hilbert) 作了题为“数学问题”的讲演。在这篇著名讲演中，他为新世纪的数学家提出了 23 个问题，这些问题对于后来的数学发展产生了深刻的影响。希尔伯特以有机统一的观点，来看待数学的整体发展，他将哥德巴赫猜想作为第 8 问题 (即“素数问题”) 的一部分，从此哥德巴赫猜想不再是孤立的数学难题，而成了近代数学重要的一环。后来的发展证明，希尔伯特的眼光是非常正确的。

从 1920 年开始，英国数学家哈代 (G. H. Hardy) 和李特伍德 (J. E. Littlewood) 发表系列文章 (共 7 篇)，开创与发展了一种崭新的数论方法，这种方法称为圆法。对于奇数 N ，我们用圆法可将方程

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \quad p_i \geq 3$$

的解的个数表示成积分

$$\int_0^1 \left(\sum_{3 \leq p \leq N} e^{2\pi i a p} \right)^3 e^{-2\pi i a N} d\alpha.$$



如果能够证明这个积分大于零，那么我们就证明了关于奇数的哥德巴赫猜想。在这个积分里，和式

$$\sum_{3 \leq p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}$$

称为素变量的线性指数和，关于它的研究是一件困难的事情。

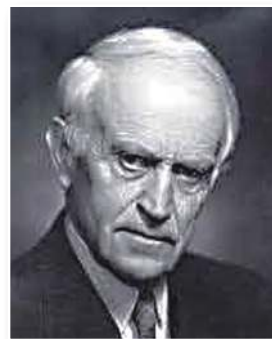
哈代和李特尔伍德在一个很强的假设下证明了：对于每个充分大的奇数 N ，上述积分大于零，因而哥德巴赫猜想成立。因为其中的假设至今仍无法证明，所以他们得到的只是一个条件性结果。虽然如此，他们为奇数哥德巴赫猜想的研究开辟了一条正确的道路，而圆法也成了数论中最基本的方法之一。

1937 年，苏联数学家维诺格拉朵夫 (I. M. Vinogradov) 提出了一套处理素变量线性指数和的独创性方法，从而无条件地证明了：对于每个充分大的奇数，哥德巴赫猜想成立。维诺格拉朵夫的结果称为三素数定理，它是数学上最重要的成就之一。

由三素数定理可知，对于大于某个界限的所有奇数，哥德巴赫猜想成立，而在这个界限之内只有有限个奇数，我们逐个来验证就可以了。然而这个界限大得惊人，以目前计算机的能力还无法完成验证工作，但在数学家们看来，奇数哥德巴赫猜想算是基本上解决了。

由于技术上的原因，圆法不适用于偶数哥德巴赫猜想，人们只能另觅途径。1920 年，挪威数学家布朗 (V. Brun) 对筛法作了重大改进，用它来研究偶数哥德巴赫猜想。筛法是一种用来寻找素数的十分古老的方法，它是由公元前 200 多年古希腊学者埃拉托塞尼斯 (Eratosthenes) 所创，我们今天在制作素数表时还会用到这种方法。

由于筛法的一些局限性，用它很难一步达到偶数哥德巴赫猜想，因此只能采取逐步逼近的方式。布朗用改进后的新筛法证明了，每个充分大的偶数都可以表为两个正整数之和，其中每个正整数的素因子个数均不超过 9，这个结果称为命题 (9+9)。类似地，命题 (a+b) 是指，每个充分大的偶数都可以表为两个正整数之和，其中一个的素因子个数不超过 a，而另一个的素因子个数不超过 b。通过不断地减小 a 和 b，



对素数理论和哥德巴赫猜想作出重要贡献的数学家，上图依次为高斯，黎曼，阿达马，普桑，下图依次为哈代，李特尔伍德，维诺格拉朵夫，布朗。



对哥德巴赫猜想作出最重要贡献的中国数学家：陈景润（中），王元（左），潘承洞（右）。

最终达到 $(1+1)$ ，就基本上解决偶数哥德巴赫猜想了。布朗之后的不少学者，正是沿着这样的路子，不断发展筛法技术，逐步减小命题中的素因子个数。而筛法的进步，也为深入研究其它重要数论问题提供了有力的工具。

1956年，中国数学家王元证明了命题 $(3+4)$ ，由此开启了我国在偶数哥德巴赫猜想命题 $(a+b)$ 研究上的先河。之后，王元和另一位中国数学家潘承洞又得到了若干重要的结果，使得我国在哥德巴赫猜想方面的研究达到了国际先进水平。

1965年，苏联数学家维诺格拉朵夫（A. I. Vinogradov，不是前面提到过的 I. M. Vinogradov）和意大利数学家邦别里（E. Bombieri）各自独立地证明了命题 $(1+3)$ 。1974年，邦别里被授予菲尔兹（Fields）奖，表彰他在数论方面 [包括证明命题 $(1+3)$] 以及在极小曲面和有限群论方面的工作。

1966年，陈景润宣布证明了命题 $(1+2)$ 。1973年，他发

表了命题 $(1+2)$ 的全部证明。陈景润的工作得到了国际数学界广泛的赞誉，被公认为是筛法理论最出色的应用，是关于偶数哥德巴赫猜想研究最杰出的成果。陈景润的事迹由徐迟写成报告文学后，广泛传播，家喻户晓，这是大家所熟知的了。

陈景润先生 1996 年 3 月在北京逝世，潘承洞先生 1997 年 12 月在山东济南逝世。

王元先生刚刚度过 80 寿辰，仍然参加一些学术活动，并常作讲演。他擅长书法，为《数学文化》创刊号题写了贺词。

关于哥德巴赫猜想的通俗介绍和中国数学家数论工作的简明回顾，大家可以看文章 [4] 和 [5]。

参考文献

- [1] E. T. Bell, 数学精英, 商务印书馆, 1994.
- [2] 蔡天新, 难以企及的人物, 广西师范大学出版社, 2009.
- [3] 陈一心, 哥德巴赫, 世界著名科学家传记 (数学家, V), 40-44, 科学出版社, 1994.
- [4] 贾朝华, 哥德巴赫猜想, 10000 个科学难题 (数学卷), 101-103, 科学出版社, 2009.
- [5] 宗传明, Analytic number theory in China, The Mathematical Intelligencer, 32(2010), no.1, 18-25.



作者介绍:

贾朝华, 北京大学数学博士, 中国科学院数学研究所研究员。研究领域为解析数论, 主要研究素数理论中的一些课题。