第谷与开普勒仰望天空的雕塑坐落在布拉格。

理性文明两千年
——概述与重访(下)

项武义

§4. 重访开普勒行星定律的探索历程

师法其意，改弦更张，
以后见之明的简洁新途径身历其境

自古以来，“量天”一直是几何学的“巨梦”，此事一直到开普勒才真正圆此巨梦。在天文观测中，夹角和方向乃是实测之数据，而星际之距离则是主要有待克服的难点，开普勒量天有术的方法何在？

师法其意之一：开氏量天术

概括地来说，下述跨周期叠加测量法乃是开氏巧用周期性，善用第谷天文宝库的基本方法。如图 -11 所示，M 是火星在 t_1 时刻的位置 $M_0(t_1)$ 在黄道面上的垂直投影，$(\pi-\mu_1)$ 则是在 t_1 的薄暮观测所得的 $\overline{SE_1}$ 和 $\overline{E_1M}$ 的方位差。一个火星年约为 $T=687$ 天。所以在和 t_1 相差几个火星年的 t_2 时刻，则有 $M(t_1)=M(t_2)=M$。上述跨周期的 ΔSE_1M 和 ΔSE_2M 就在天际叠加成所示的四边形！其中 μ_1，μ_2 和 θ 都是直接实测之角度，可以在第谷天文宝库（或现代天文数据）中查到。由此可见，只要能够掌握日 - 地距的规律（亦即，地球绕日的极坐标方程）就可以用他熟知的三角测量公式去计算 $\overline{SM}$ 的方位与距离，此事让他认识到下述“卓见”。

师法其意之二：（自知之明乃是新天文学的基石所在）

有鉴于地球和其它行星都在绕日运行，所以由地球观测各别行星的视运动就变得复杂难解，可以说是“舞在其中，当局者迷”的一种表现，其实也正是千古之谜的根源所在。反之，若能有自知之明（亦即充分掌握日 - 地距的极坐标方程）则利弊逆转，就可以利用上述开氏量天术研究行星运行的规律！所谓“自知之明”善莫大焉！它是新天文学的基础所在，这也就是《新天文学》第三卷的主题，其标题为：

“第二个不规则性 (second inequality)，即对太阳或地球运动的探讨，是深刻天文学的关键，那里存在着许多运动的物理原因”。

开氏量天术的三角分析：

一般情形：令 $\alpha_1=\angle E_1MS$，$\alpha_2=\angle E_1MS$，$d=\overline{SM}$，则有

$$\beta=2\pi-\mu_1-\mu_2-\theta=\alpha_1+\alpha_2,$$

$$\frac{d}{\sin\mu_1}=\frac{\lambda_1}{\sin\alpha_1},\quad \frac{d}{\sin\mu_2}=\frac{\lambda_2}{\sin\alpha_2}$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\lambda_1\sin\mu_1}{\lambda_2\sin\mu_2}(:=k),\quad \sin(\beta-\alpha_2)=k\sin\alpha_1$$

$$\alpha_2=\cot^{-1}\left(\frac{k+\cos\beta}{\sin\beta}\right)\tag{1}$$

特殊情形：设 t_i 和 t_j 都是和某一个火星冲相差几个火星年者（参看图 -12）。$\{\theta_i,\theta_j,\mu_i,\mu_j\}$ 皆为实测数据而 $\alpha_i=\pi-\theta_i-\mu_i$，$\alpha_j=\pi-\theta_j-\mu_j$。因此，由正弦定律即得

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_i}=\frac{\sin\alpha_j\sin\mu_i}{\sin\alpha_i\sin\mu_j}\tag{2}$$

重访地球面积律的探索历程（后见之明之一）：

在开氏行星定律中，地球面积律是他第一个重大突破（首战告捷），也是他用来探索其它各定律的基础与利器，所以它自然也是我们重访的首要。在《新天文学》中，地球

的面积律乃是第三卷对于“第二个不规则性”（亦即日 - 地距的极坐标方程）研究成果的简洁重述，堪称神来之笔。如今回看，它乃是地球绕日运动的角动量守恒定律，是理性文明史中第一个发现的角动量宏恒律，其极坐标表达式即为：

$$\frac{1}{2}\lambda^2\omega = \text{常数},$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}\text{（角速度）} \quad (3)$$

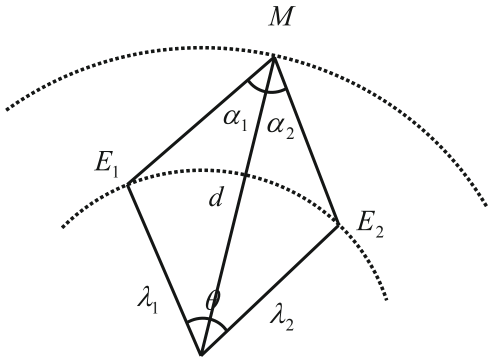

图 -11

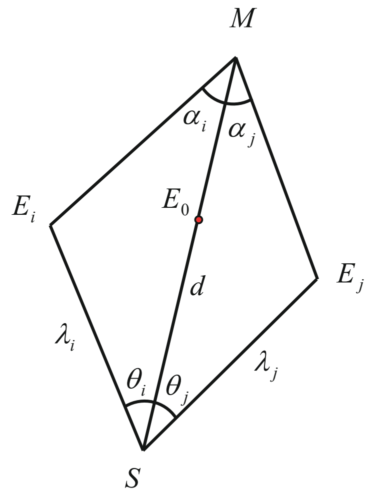

图 -12

有鉴于在薄暮观测中，当时之日的地方位 θ_t，乃是第一个实测的数据，它们的逐日差额就是当天的每天平均角速度 ω_t；而上述守恒律的探索其实就是要从实测数据去检验

$$\frac{1}{2}\lambda(t_j)^2\omega(t_j) = \frac{1}{2}\lambda(t_i)^2\omega(t_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda(t_j)^2}{\lambda(t_i)^2} = \frac{\omega(t_i)}{\omega(t_j)}$$

恒成立。

再者，t_i 在和 t_j 各别和某一个火星冲 t_0 相差几个火星年的特殊时刻

$$\frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2} = \frac{\sin^2\alpha_j \sin^2\mu_i}{\sin^2\alpha_i \sin^2\mu_j} \text{和} \frac{\omega_i}{\omega_j}$$

都可以由实测数据直截了当地计算之。

例如表 -1（见下页）所列者，乃是以 1948 年 5 月 5 日火星冲为准，前后三十个火星年的实测实算数据。易见它们的最后两行之值几乎相等（差相在 0.3% 之内）。我们当然还可以改用其它火星冲作同样检验，而且发现它们依然几乎相等。这样就可以由实测的角度和方位的实算，检验地球面积律这个极为重要的实验性定律 (experimental law)。

重访地球椭圆律之探索（后见之明之二）：

在此将以后见之明，改弦更张，先行探索地球的轨道是否是一个太阳位于其焦点之一的椭圆？有鉴于业已建立的地球面积律和每天实测可得的逐天角速度，即有

$$\frac{1}{2}\lambda^2\omega = k, \quad \frac{\sqrt{2k}}{\lambda} = \sqrt{\omega} \qquad (4)$$

历史的注记

(i) 在开普勒行星律的探索历程中，是先有地球的面积律，亦即第三卷对于“第二不规则性”的充分掌握，接着发现火星的面积律，然后再苦战数年才发现火星的椭圆律。上述三者发表于 1609 年的《新天文学》。地球的椭圆律以及其它四个行星的面积律和椭圆律实乃顺理成章的推广，陆续发表于三册《哥伯尼天文学概要》(Epitome Astronomiae Copernicanae，1617-21)，而综合六个行星各别定律的周期律则发表于《世界之和谐》(Harmonica Mundi，1619)。

(ii) 当年离解析几何学之问世还有几十年，所以现代众所周知某些锥线性质：如五点定一锥线，锥线以焦点为原点的极坐标方程乃是开普勒未能得见，也没能想到者，但是他当然熟知阿波罗尼斯的锥线论。

亦即 $\frac{\sqrt{2k}}{\lambda}$ 每天之值皆可相当精准地实测实算！

另一方面，由解析几何的后见之明，一个以原点为其焦点之一的椭圆之极坐标方程均可写成下述形式，即

$$\frac{1}{\lambda} = c_0 + c_1\cos\theta + c_2\sin\theta \qquad (5)$$

由此可见，我们可以先取一年中相当均匀间隔的三天 $\{t_1, t_2, t_3\}$，先由下述三元一次方程组，即

$$\sqrt{\omega(t_i)} = c_0' + c_1'\cos\theta(t_i) + c_2'\sin\theta(t_i), \quad i = 1, 2, 3 \qquad (5')$$

解得 $\{c_0', c_1', c_2'\}$，然后再以任选许多天的 $\sqrt{\omega(t)}$ 和 $\theta(t)$ 之值代入

$$\sqrt{\omega(t)} = c_0' + c_1'\cos\theta(t) + c_2'\sin\theta(t), \quad i = 1, 2, 3$$

来检验上述等式是否几乎恒成立。这样，就可以简洁明了地探索而得地球的椭圆律！

有兴趣对于开普勒行星定律探索历程，作一次身历其境的全程重访的读者，在此郑重建议去细读《千古之谜与几何天文物理两千年》的第五章，并且认真地做该章的习题与演练。在此限于篇幅，仅作下述分析与注记。

分析与注记

(i) 开普勒行星定律是整个理性文明无比辉煌的实验性定律，对于它作一次重访中，后见之明自然是指路明灯，可以使得我们的历程目标明确，避免曲折。其实，在开氏当年写书时，岂不是也已经有了后见之明？

(ii) 在重访之一中，一方面我们对于好几个取定的火星冲计算和它相差几个火星年的日-地距之比值。这是开氏量天术的特别简化的情形，只要直截了当地用正弦定律就可以由实测的角度马上实算之。从几何观点来看，此事其实就是善用周期性，以居于原位的太阳和火星为观测站来对于 $\{E_i, E_j\}$ 作太空三角测量。另一方面，我们有效利用每天平均角速度 $\{w(t_i), w(t_j)\}$ 是每天都可以精准实测的数据。

(iii) 有了地球面积律 $\lambda^2\omega/2 = k$，就可以由 $\omega(\theta)$ 之值直接计算 $\sqrt{2k}/\lambda(\theta) = \sqrt{\omega(\theta)}$ 在各个方位之值，亦即地球绕日运行的极坐标方位业已简洁掌握。所以重访之二关于地球椭圆律的探索根本可以看做地球面积律的一个顺理成章的应用。再者，有了地球绕日运行的极坐标方程，一般情形的开氏量天术就可以长驱直入地测算其它行星的极坐标之数据。由此可见，其它行星的面积律和椭圆律的探索又是一种直截了当的顺理成章！

日期	ω_i	ω_j	$\frac{r_j^2}{r_i^2}$	$\frac{\omega_i}{\omega_j}$	日期	ω_i	ω_j	$\frac{r_j^2}{r_i^2}$	$\frac{\omega_i}{\omega_j}$
1948.5.5	0.969	（以此日期当做基准）			1948.5.5	0.969	（以此日期当做基准）		
1940.10.26		0.998	0.968	0.971	1957.9.30		0.983	0.976	0.986
1938.12.9		1.016	0.952	0.954	1959.8.18		0.961	1.006	1.008
1937.1.21		1.017	0.951	0.952	1961.7.5		0.953	1.014	1.016
1935.3.6		1.001	0.966	0.968	1963.5.23		0.962	1.006	1.008
1933.4.18		0.977	0.990	0.992	1965.4.9		0.982	0.984	0.987
1931.6.1		0.958	1.009	1.012	1967.2.25		1.005	0.961	0.964
1929.7.14		0.954	1.014	1.016	1969.1.12		1.019	0.949	0.951
1927.8.27		0.966	1.003	1.003	1970.11.29		1.014	0.954	0.956
1925.10.9		0.988	0.976	0.980	1972.10.16		0.992	0.973	0.976
1923.11.22		1.010	0.957	0.959	1974.9.3		0.969	1.000	1.000
1922.1.4		1.019	0.949	0.951	1976.7.21		0.955	1.013	1.015
1920.2.17		1.009	0.959	0.960	1978.6.8		0.957	1.011	1.013
1918.4.1		0.986	0.981	0.983	1980.4.25		0.973	0.993	0.996
1916.5.14		0.964	1.003	1.005	1982.3.13		0.997	0.970	0.972
1914.6.27		0.954	1.015	1.016	1984.1.29		1.016	0.952	0.954

表 -1 二十个火星年的实测实算数据


开普勒 (1571-1630)


伽里略 (1564-1642)


笛卡儿 (1596-1650)


惠更斯 (1629-1695)

§ 5. 从新天文学到自然哲学的数学原理

顺理成章，精益求精；
天上人间合而为一，至精至简，万有引力

古希腊文明经过文艺复兴的蕴育而重获新生。到了十六世纪中叶，业已萌芽茁壮，容光焕发，有蓬勃进展之势。例如 §3 中所述的天文学巨棒三接力，则是其中至重至大者；不但开创了天文学的新纪元，而且也引领着近代科学的全面进展。由十七世纪初叶的新天文学（包括伽利略 (Galileo) 用望远镜所得的重大天文发现）到 1687 年牛顿的巨著《自然科学的数学原理》(以下简称《原理》) 集其大成，理性文明进展之神速，令人叹为观止！比之于理性文明的先前两千年的进化历程，可以说简直是一气呵成而又精彩绝伦的突飞猛进。其中有很多引人入胜，富有启发的创见与思想。在此限于篇幅，仅作极为简略的概括：

(1) 1608 年望远镜的发明：它的光学原理十分简明，首先是在荷兰为了航海之用而发明的；而天文学家如伽里略，开普勒等马上就认识到它在天文观测上的重要性而自行研制。此事大大扩展了天象观测的视野与精度，促进了天文学的更上层楼，例如伽里略的种种天文发现。

(2) 伽里略 (Galileo，1564-1642) 的重力实验：自由落体以及斜面实验，等加速运动的数理分析，惯性和 $F = m \cdot a$ 的首现。

(3) 笛卡儿 (R. Descartes，1596-1650)：解析几何，广义的惯性定律。(他在力学上的机械论在当代曾为显学，如今早已成为历史陈迹)。

(4) 开普勒天文学的逐步进展：

(i) 他的三册《哥伯尼天文学概要》逐渐成为欧陆天文学的主要教科书。

(ii) 他在 1627 年出版的《鲁道夫星表》(Rudolphine Table) 要比任何其它星表精准百倍而被广泛采用。

(iii) 他预测在 1631 年 11 月 7 日会有水星凌日，1631 年 12 月 6 日会有金星凌日；前者由茄桑地 (Gassendi) 的观测证实，但是后者则因为发生在欧洲的夜晚而未能观测。随后霍洛克 (Harrocks) 按照开氏定律预知 1639 年 12 月 4 日还有另一次金星凌日，并且作了详细的观测与纪录。


伽利略在介绍天文望远镜