从左至右：付晓青，邓明立，罗懋康，张智民，刘建亚，汤涛，贾朝华，蔡天新，张英伯

主　办　香港 Global Science Press
沙田新城市中央广场第一座 1521 室

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者。

本期刊欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com; 或mc@global-sci.org

本期刊欢迎教育界，出版界，科技界的广告
本期刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本期出版时间：2011年8月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金和科学出版社的支持。

Contents | 目录

才兼文武，学贯天人

——纪念山东大学数学学科创始人黄际遇先生

东 青

今年是山东大学建校110周年，也是山东大学数学学科正式建立81周年——一个九九归一的年份。佛家往往将“九九归一”与“终成正果”联系起来，寓意一路探索而来，终于回到本初状态，从而大彻大悟。但对于一门基础学科而言，这种回归并不是单纯的“蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”的感悟，而是历经艰辛、不懈追求，从而有所成就的一种升华。这是一个新的起点。

在这原点与新起点的交汇处，对创始者进行一下追忆似乎是人之常情，吾辈自不能免俗，然而更有一层原因是，作为山东大学数学学科创始人的黄际遇先生——一位擅数学、明经传、通骈文、工书法，乃至骑射、算卜、弈棋无一不精的才子型学者，长久以来竟然一直不为人所知。无怪乎与先生同乡的陈平原先生感叹：“此等人物，若生活在老北大，定然是校园里的绝佳风景。不知道是因为五十年代后专业化观念日益深入人心，凭兴趣读书讲学不再被认可，还是因教学于兵荒马乱之中，没有弟子承衣钵传薪火。”[1] 这也许只能算作其中的一个原因。另一重要原因窃以为在于先生对其学问的“低调处理”。先生所学广博，其诸多成果均付诸日记，“举凡科学、文学理论、筹算演证，与所作骈散文章，及与人来往书札、联语、棋谱，靡不笔之于篇。小楷端书间，杂以英、德、日诸国文字。月得一册。其在青岛所记者，曰《万年山中日记》，曰《不其山馆日记》。广州所记者，曰《因树

任初先生在山东大学，时年五十岁。（1935年摄于青岛）

光绪二十七年（1901 年）九月二十四日，时任山东巡抚袁世凯上《为遵旨该设学堂酌拟教规谨将试办章程缮单呈览》及《山东省城试办大学堂暂行章程》的奏折，皇帝照准奏称。红色文字为光绪皇帝于十月六日在奏折上的朱批：“知道了。政务处暨各该衙门知道，单併发。”

山馆日记》。在临武所记者，曰《山林之牢日记》。积数十年。”[2] 可惜的是，这些日记中的多半数失落于战乱辗转途中，而留下的正如蔡元培先生所言：“任初日记，苟付梨枣，非延多种专门学者，难与校对。”先生其人，正勃发之年而逝于乱世；先生其学，因少人传承而埋于故纸。由是，其名不显。然金玉岂可久没于泥淖之中？近闻潮汕文化研究中心正筹备出版先生日记，不胜欣喜，此宝贵文化遗产若可得见天日，后辈也可从中得窥先生风采之一二。

缘于上述，谨就所知，先行小文以记先生。

筚路蓝缕，以启山林 [3]

黄际遇先生，生于清光绪十一年（1885 年），卒于民国三十四年（1945 年），字任初，后自号畸盦 [4]，广东省潮州市澄海县人。

任初先生一生行历丰富，因本文写作缘起于对先生创立山东大学数学学科的追忆，那么不妨先说说先生在山东大学的六年（1930-1936），这也是其治学生涯中颇值得浓墨重彩的地方。

山东大学始创于清末光绪二十七年，即公元 1901 年。时任山东巡抚的袁世凯上《为遵旨该设学堂酌拟教规谨将试办章程缮单呈览》及《山东试办大学堂暂行章程》的奏折，同时调蓬莱知县李于锴进行筹备。同年 10 月奏折获准，官立山东大学堂在济南泺源书院正式创立，周学熙任管理总办（校长）。这是继京师大学堂之后中国创办的第二所国立大学，也是山东大学历史的起点。此后山东大学历经波折，几近停办。

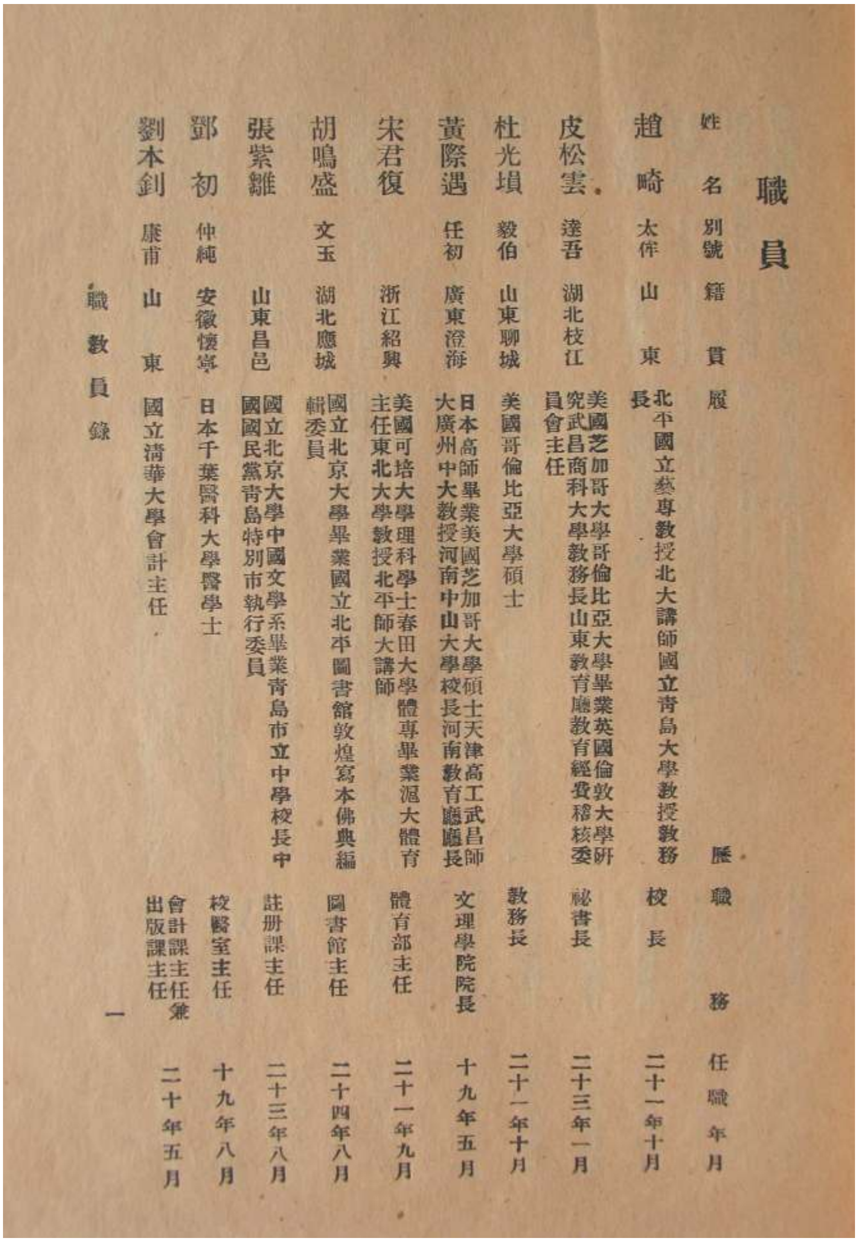
1930 年，当时的南京国民政府采纳蔡元培先生的建议，决定在原先私立青岛大学的基础上建立国立青岛大学。1930 年 9 月 21 日，国立青岛大学正式成立，由杨振声先生出任校长。他秉承蔡元培先生“兼容并包、学术自由”的办学方针，广聘名师学者来校任教，以提高学校的学术水平，国立青岛大学理学院数学系也正是创建于此时，也就是现今山东大学数学学院的前身，其创立者正是任初先生。

据台湾版《山东文献》第六卷第二期的相关记载，作为第一批被聘任的教授，任初先生于 1929 年 12 月即赶赴青岛参与当时国立青岛大学的创制。学校成立之初，只有文学与理学两个学院，先生任理学院院长兼数学系主任，理学院下设数学系、物理学系、化学系、生物系。其中，物理学家蒋德寿、王恒守任物理系主任、化学家汤腾汉任化学系主任、生物学家曾省任生物系主任。

单从建制上看，刚成立的国立青岛大学似乎已初具规模，但在当时，师资短缺是国内高校普遍存在的问题，师资力量之困窘远非今天所能想象。数学系建系之初，开设了微积分、代数解析、立体几何解析、数学演习共 4 门课程 [5]，但任课教师只有任初先生一人，也就是说，国立青岛大学成立的第一年，整个数学系的教学完全是由任初先生一人完成的。面对此种窘境，1931 年国立青岛大学成立了由杨振声校长为主席的教师职称聘任委员会，任初先生为委员。尽管校方与

1930 年国立青岛大学建校原址（原为德占时期所建俾斯麦军营），校名为蔡元培先生亲笔题写，现为中国海洋大学鱼山校区

任初先生多方努力，第二年数学系也只聘到了一位讲师——宋智斋（字鸿哲），而且此人还是任初先生曾经的学生，来校任教一定程度上属于“友情支援”。随后的两年，数学系又陆续聘请了李先正、杨善基两位讲师。1932年，国立青岛大学更名为国立山东大学后，文学院与理学院合并为文理学院，下辖中国文学系、外国文学系、数学系、物理学系、化学系和生物系等六个系，任初先生为新成立的文理学院的院长仍兼任数学系主任。当时数学系教师尤其是教授奇缺的状况依然而没有太大的好转，这令任初先生心急如焚。任初先生听说他早年的学生曾炯（字炯之，1898-1940）正在德国哥廷根大学攻读博士学位，于是便“预定”其学业完成后到山东大学任教，但毕竟远水难解近渴，曾炯便先推荐了同为留德学生且已获得博士学位回国的学友李达（字仲珩，1905-1998）。1934年8月，李达辞去清华大学教授的职位来到山东大学，成为数学系成立后聘请到的第二位教授，而这已经是山东大学数学系建立的第五个年头了。后来，任初先生又通过校方将自己兼任的数学系主任一职让给了李达。到1935年，任初先生邀请刚获得法国理学博士学位的陈传璋（字琰如，1903-1989）任山东大学数学系教授，李锐夫（原名李蕃，1903-1987）任讲师，从而使得当时的山东大学数学系具备了3位教授4位讲师的师资规模，仅看数字似乎并不惊人，但这与当时国内各高校数学系的师资力量相比已属名列前茅。



職員

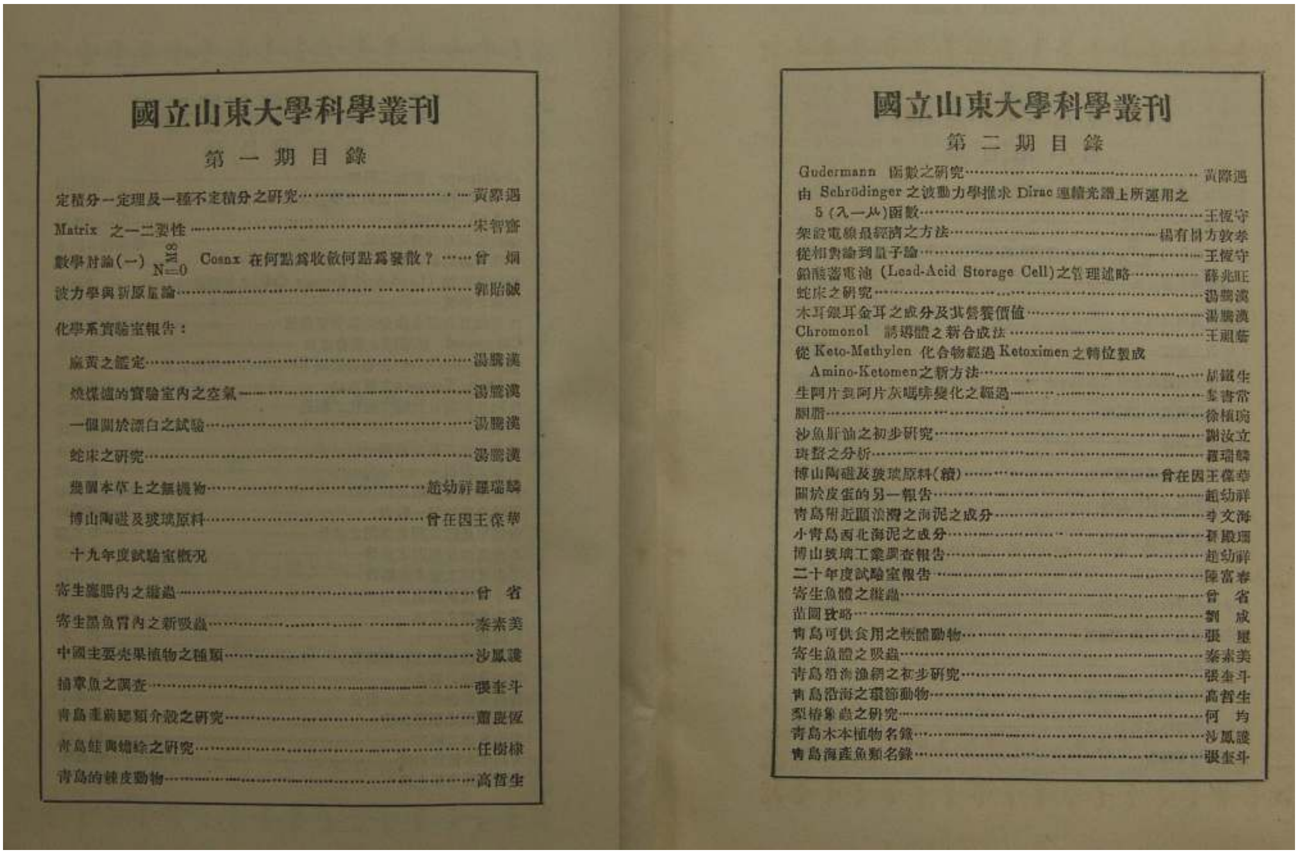
姓名	别號	籍貫	履歷	職務	任職年月
趙畸	太侔	山東	北平國立藝專教授北大講師國立青島大學教授教務長	校長	二十一年十月
皮松雲	達吾	湖北枝江	美國芝加哥大學哥倫比亞大學畢業英國倫敦大學研究武昌商科大學教務長山東教育廳教育經費稽核委員會主任	秘書長	二十三年一月
杜光塤	毅伯	山東聊城	美國哥倫比亞大學碩士	教務長	二十一年十月
黃際遇	任初	廣東澄海	日本高師畢業美國芝加哥大學碩士天津高工武昌師大廣州中大教授河南中山大學校長河南教育廳廳長	文理學院院長	十九年五月
宋君復		浙江紹興	美國可培大學理科學士春田大學體專畢業滬大體育主任東北大學教授北平師大講師	體育部主任	二十一年九月
胡鳴盛	文玉	湖北應城	國立北京大學畢業國立北平圖書館敦煌寫本佛典編輯委員	圖書館主任	二十四年八月
張紫離		山東昌邑	國立北京大學中國文學系畢業青島市立中學校長中國國民黨青島特別市執行委員	註册課主任	二十三年八月
鄧初	仲純	安徽懷寧	日本千葉醫科大學醫學士	校醫室主任	十九年八月
劉本釗	康甫	山東	國立清華大學會計主任	會計課主任兼出版課主任	二十年五月

職教員錄 一

1933年12月印制的《国立山东大学职教员录》（部分）。其中对任初先生的介绍为：“姓名：黄际遇；别号：任初；籍贯：广东澄海；履历：日本高师毕业，美国芝加哥大学硕士，天津高工、武昌师大、广州中大教授，河南中山大学校长，河南教育厅厅长；职务：文理学院院长；任职年月：十九年五月（1930年5月）”

除了争取外来人才，任初先生还注重自己培养。1932年，任初先生认识了大学刚毕业在青岛胶济铁路中学任教的刘书琴（1909-1994），因其好学上进，任初先生特意安排他到山东大学数理学会做一次讲演，题目就是“数学的定义”。1933年11月，山东大学纪念徐光启逝世三百周年举行学术报告会时，任初先生安排新到任的讲师杨善基（1904-1966）讲“几何学的分类”。[6] 而对于这类为启用新人特别安排的特别讲演，任初先生更是多方搜集材料提供给讲演者，并进行具体的指导，以使青年教师能够通过这种锻炼有所提高，而这对学校的师资培养也是大有裨益。

在解决数学系师资燃眉之急的同时，任初先生在课程编制方面也不遗余力，坚持“内容力求充实，并注重习题演习”，经过几年的卓绝努力，至



國立山東大學科學叢刊

第一期目錄

定積分一定理及一種不定積分之研究……黃際遇
Matrix 之一二要性……宋智齋
數學討論(一) $\sum_{N=0}^{\infty}$ Cosnx 在何點爲收斂何點爲發散？……曾炯
波力學與新原子論……郭貽誠
化學系實驗室報告：
麻黃之鑑定……湯騰漢
燒煤爐的實驗室內之空氣……湯騰漢
一個關於漂白之試驗……湯騰漢
蛇床之研究……湯騰漢
幾個本草上之無機物……趙幼祥 羅瑞麟
博山陶磁及玻璃原料……曾在田 王葆華
十九年度試驗室概況
寄生鷺腸內之縧蟲……曾省
寄生鰶魚胃內之新吸蟲……秦素美
中國主要殼果植物之種類……沙鳳護
摘章魚之調查……張奎斗
青島重齒鰓類介殼之研究……蕭貴恆
青島蛙與蟾蜍之研究……任樹棣
青島的棘皮動物……高哲生

國立山東大學科學叢刊

第二期目錄

Gudermann 函數之研究……黃際遇
由 Schrödinger 之波動力學推求 Dirac 運轉光譜上所運用之 δ(λ—μ)函數……王恒守
架設電線最經濟之方法……楊有樹 方敦孝
從相對論到量子論……王恒守
鉛酸蓄電池 (Lead-Acid Storage Cell)之管理述略……薛兆旺
蛇床之研究……湯騰漢
木耳銀耳金耳之成分及其營養價值……湯騰漢
Chromonol 誘導體之新合成法……王祖
從 Keto-Methylen 化合物經過 Ketoximen 之轉位製成 Amino-Ketomen之新方法……胡鐵生
生阿片製阿片灰嗎啡變化之經過……姜書常
胭脂……徐植琬
沙魚肝油之初步研究……謝汝立
斑蝥之分析……羅瑞麟
博山陶磁及玻璃原料(續)……曾在田 王葆華
關於皮蛋的另一報告……趙幼祥
青島附近頭浪灣之海泥之成分……李文海
小青島西北海泥之成分……薛殿璋
博山玻璃工業調查報告……趙幼祥
二十年度試驗室報告……陳富春
寄生魚體之縧蟲……曾省
苗圃致略……劉咸
青島可供食用之軟體動物……張璽
寄生魚體之吸蟲……秦素美
青島沿海漁網之初步研究……張奎斗
青島沿海之環節動物……高哲生
梨椿象蟲之研究……何均
青島木本植物名錄……沙鳳護
青島海產魚類名錄……張奎斗

任初先生于1934年完成了《定积分一定理及一种不定积分之研究》、《Gudermann 函数之研究》两篇重要的学术文章，发表于《科学丛刊》杂志的第一、二期

任初先生离开前的1936年，当时的山东大学数学系已经开设了包括15门必修课、22门分组必修课以及13门选修课在内的共计50门课程，山东大学数学系迎来了自其建立以来的第一个鼎盛时期。

笔参造化，学究天人 [7]

任初先生以数学立身，兼治文史，曾言文科与哲学密切相关，而哲学则以自然科学为基础，故文理必须交叉。倘若文理老死不相往来，则科学发展与人才培育无望矣！任初先生曾谓学问有“平面”与“直线”类型之别，“平面之学问”为“泛滥各科，以求广博”，“直线之学问”为“设为专题，极深研几”。在其看来，达于极致，学问皆可相通，因而做学问自可“设为专题，极深研几”，也可“泛滥各科，以求广博”，然于至高境界，则当兼极“平面学问”之广与“直线学问”之深，方可触类旁通，游刃有余。“或叩以研究纯粹科学有何用处，则曰：‘科学家殚毕生精力，能于书末索引，占一姓字，斯足矣。’”[2]

任初先生既是这么说的，也是这样做的。在山东大学执教期间，任初先生于1934年完成了《定积分一定理及一种不定积分之研究》、《Gudermann 函数之研究》两篇重要的学术文章，并发表于《科学丛刊》杂志，另有《群论》、《数论》等也陆续发表。同年，其论著《潮州八音误读表说》[8] 也发表于《山东大学文史丛刊》第一期，并出版了《班书字说》。其文理成果兼备的学问修养，即便与整个民国时代那些辉映后世的大师们相比，也不遑多让。

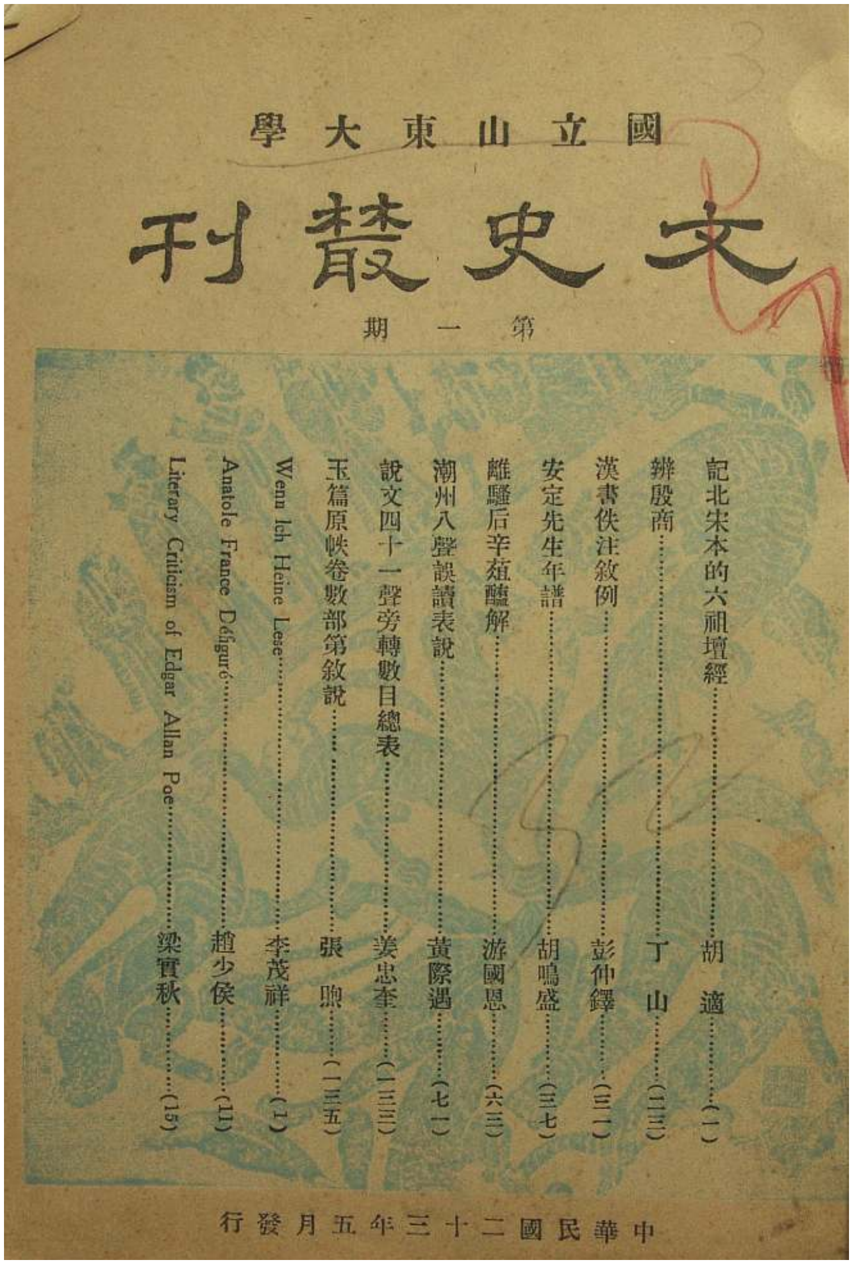
身为文理学院院长的任初先生对于文科学科的建设非常用心。他曾于1935年邀请当时的国学泰斗章太炎先生前来山东大学讲学，而个性独特的章太炎之所以能够答应任初先生的邀请，一方面是因为任初先生的才具，另一方面则源于二人在日本时就已建立的私交。1903年8月，十八岁的任初先生由广东省官派赴日本留学，从其治小学。此“小学”绝非是如今九年义务教育体系的初级阶段，简而言之，是国学研究中对于“古汉语文字学”的一个统称，大致分为“音韵、文字、训诂”三类。任初先生对此学问兴趣

甚浓，并由此打下了坚实的骈文功底，而章太炎也对任初先生极为欣赏。

章太炎为浙江人，一口地道的吴语使得两人最初的交流有些障碍，但随着交往日深，任初先生在国学大有进益的同时，顺便也学到了一门方言。也正因如此，当章太炎赴山东大学讲学时，任初先生一直陪同。一是出于师生之谊，二来章浓重的吴语对绝大多数北方的师生而言不啻一门外语，任初先生全程的“同声传译”还是很有必要的。忽然忆起前时曾见报道，一夫妇节衣缩食自费送其子赴美留学，然其子却在唐人街附近一住三四年，回国后英语水平未见长进，倒是练就了一口流利的广东话，可笑可怜可叹！

当然，上述仅为现在家长盲目送子女出国留学的一个特例，并无所指，我们还是言归正传。任初先生学习吴语只能算是“顺手牵羊”，但从中也可见其语言天赋及好学精神。身为数学家的任初先生，其语言学著作也颇丰，前述其著《潮州八音误读表说》算得上其中的代表著作。任初先生根据陈氏《切韵考》的理论，首次为自己家乡的潮州方言考证了“声类切母”与“韵类字首”各八声，并论证出潮州方言乃源于“上古音”的结论。

另一部著作《班书字说》[9] 以章太炎《文始》和《国故论衡》为基础，又独辟蹊径，在“六书”理论、文字构造以及训诂疑难等方面均有独到的见解，然书成后却并未付梓。此种情况在任初先生而言并非孤例。先生“在汴梁时，尝为周亮工栎园做年谱，未敢自信，今犹在箧中。”[10] 从中不难想见任初先生对学问的精益求精。著名语言学家黄家教先生是任初先生次子，毕业于中山大学文学院，是我国语言学大师王力先生的开门弟子，称得上是中国语言学方面的大家，但每遇有人称赞时都会说，“我比起家父来差远了”，并一再强调此实非自谦，从中也可见任初先生语言学造诣之深。



任初先生于1934年完成的论著《潮州八音误读表说》，发表于《文史丛刊》杂志第一期，篇幅从第71页至第132页，长达62页

先生不仅精研中国古文字学，在日本留学期间还掌握了日语、德语以及英语，并运用自如，这在先生的文章与日记中多有体现。

除邀请诸如章太炎等来校讲学外，任初先生还修书数封力邀黄侃（字季刚，1886-1935）到校执教。与季刚先生的交往也源于任初先生留学日本时期，两人曾一道问学于章太炎先生，且年龄相若（任初先生年长一岁），均嗜美食，皆为兴之所至可放浪形骸于外者，对白话文都不太感兴趣。但最为重要的是，二人皆国学精深，畅谈之下，顿生相见恨晚之情，由此成为

至交。这从其往来书信也可见一斑。在任初先生的一封《致黄季刚书》中言道："……祭酒赵君，深致心折，属为传语，以当先容。黉舍环山，士风椎朴，乏先觉牖我后生。国学鳣堂，尤希清响。愿虚讲席，祗迓教鞭。奚啻嘤嘤之鸣，聊致喈喈之意。庶几曲阜坠绪，高密余风，幸籍心传，平添掌故耳。"相信一般人读罢，恐怕会有不知所云之感。全文虽短，但几乎句句有典。而这不仅仅是任初先生留日时师从章太炎先生的结果，更与从年少时就打下的国学基础有莫大的关系。

任初先生年少时就表现得聪颖异常，才思敏捷，曾自述"臣受父经，云方五龄。礼传章句，甫龀而毕。"[11]十三岁时，就以院试一等的成绩考取秀才，在同科诸生中最为年幼，被誉为"神童"，深受当时的广东学政张百熙赏识，特赠范晔的《后汉书》一部，褒掖有加。这件事对任初先生的影响很大，以至于直到其晚年行文，仍喜欢用《后汉书》的风格及典故。上述书信中提到的"鳣堂"等典故就出自《后汉书·杨震传》："后有冠雀衔三鳣鱼，飞集讲堂前，都讲取鱼进曰：'蛇鳣者，卿大夫服之象也。数三者，法三台也。先生自此升矣。'"后世因此称讲学之所为"鳣堂"。仅举一例，先生文采之盛，诚意之笃可见一斑。正如季刚先生收到来信后所言"得任初书，甚殷勤可感。"[12]无奈季刚先生一直抱恙在身，终未能成行。

任初先生文理兼长，既讲数理课也上文学课。其中丁观海（我国著名土木工程学家。1930年考入国立青岛大学中国文学系，学号为23230。诺贝尔物理奖获得者丁肇中先生之父）、臧克家都曾修读任初先生主讲的中文系课程。[13]任初先生口才极好，教数学，能把枯燥的公式原理讲得生动活泼，学生不但听不厌，还觉有趣。讲授古典文学，更能旁征博引，妙趣横生。如遇上自己喜爱的名篇，就用一种既

任初先生三十余岁照片，原载于1919年版《国立武昌高师己未级同学录》（此图片由潮汕文化研究中心提供）

非普通话，也非潮州话，更不像广州白话，腔调近似汉剧道白，名曰"孔子正"的诵读腔调歌吟朗诵。任初先生上课声音洪亮，声情并茂，常博得学生阵阵掌声，更有的还在堂下喝彩叫好。对此任初先生却并不买账，总道："我是在讲书，不是来唱戏，无劳喝彩。你们是在课堂听课，不是上戏院听戏，请安静毋噪。"

寻才治学之余，身为理学院院长的任初先生对学校校务及数学学科的发展也颇为经心。1932年，学校经费紧张之际，校长、教务长分赴宁、沪筹措资金，任初先生暂代校务，努力维持学校的正常运转。1933年4月，任初先生参加了旨在"集全国数学专家于一堂，商讨发展科学教育之实际有效方案"的天文数学和物理讨论会。针对学生毕业后的就业问题，任初先生力促成立山东大学职业指导委员会，该委员会于1935年3月正式成立，任初先生为五位委员之一。同年7月，任初先生赴上海参加中国数学会成立大会，并被选为中国数学会董事会九名董事之一。作为时至今日中国数学工作者最为重要的学术性组织之一，任初先生为其创立与发展贡献良多。

兼资文武，雅有筹算[14]

任初先生的课在当时校园里是一道别致的风景，仅从装束而言就很吸引眼球。先生平时喜穿长衫，不同之处在于其长衫胸口处缝有两个特制的口袋，一狭长、一短宽，据先生讲，只是取其方便。至于所装之物，可就众说纷纭了：一说是粉笔与钢笔，一说是粉笔与眼镜，一说是钢笔与烟盒，还有一说是钢笔与飞镖。最后一说显然更为给力，颇具传奇色彩，虽不能尽信，却也并非全然无稽。

单就外表论，任初先生也并不像是一温婉书生，其"精力充溢，体貌俊伟似齐鲁人"[2]——莫非这也是任初先生钟情于于山东大学的一个原因？任初先生年少时就热爱体育运动，以骑射功夫名闻乡里。在日本留学期间曾热衷于击剑，并在比赛中获奖。利用假期回乡探亲的时间，先生经常向当地民众宣传体育健身的道理，并创制体育课，亲身示范骑马、击剑乃至球类运动，希冀以此能够先从体质上帮助乡里民众洗刷"东亚病夫"的耻辱身份。据说在此期间，任初先生还主持了澄海开县以来的第一届全县运动会。

任初先生还是第一个将自行车推广到粤东地区的人。先生对自行车可谓情有独钟，既将其作为交通工具，也将其视为运动器械。在任河南省教育厅厅长兼河南大学校长（1929-1930）时，任初先生几乎每天都要在政府与学校两机构间往来办公，政府专门为他准备了一辆汽车，并配备了一名专职司机听候使唤，但任初先生直到辞职也没有使用

过这辆汽车，而是每天骑着自行车穿梭于政府与学校间。这既非政治作秀（中国的政治环境下实无此必要），也不是想替纳税人省钱（这种思想觉悟在当时中国尚未见端倪），任初先生只是认为骑自行车代步方便自由且可锻炼身体，一举两得。不过自民国以降，无论出于什么原因，能够像任初先生那样坚持骑自行车往来办公、上班下班的厅级官员还真是凤毛麟角。[15]

据说任初先生足球也踢得不错，早年留学日本学习数学时，任初先生曾一度是所在学校的足球队长，当时校足球队成员中的中国留学生只有他一人，其余都是日本人。由于训练得法，任初先生率领的这支足球队成绩一直很好。在执教山东大学期间，已过不惑之年的任初先生虽不能与青年学生在球场上一较高下，但却是学校足球赛执法裁判的首选，眼明手快，满场飞奔，仅就体力而言，丝毫不逊于那些年轻后生。即便在平日里，任初先生给人的印象也是“布衣敝履，健步如飞，终日无倦容。体魁硕，年逾六十，壮如四五十岁人”。[16]

这样一个喜好运动、身负武功且率性而为之人，即便随身带几支镖也属“情理之中”吧。

然而学者毕竟是学者，与单纯的体能运动相比，任初先生更痴迷于中国传统的“脑力运动”——中国象棋。任初先生一生酷爱象棋，晚饭后即便稍有空闲，他也会摆好棋盘一人独弈一番，每有所得辄记，然后夹在一本本早已写满本人评注的棋书中。若是能遇一棋力相当者与之对弈数盘，任初先生会兴奋许久。对弈后，任初先生仅凭记忆即可复盘，对两人的着法进行反复演算，分析胜负关键并保存记录。对于自认为好的对局，先生在得意之余往往会标注“名局”字样，并附上自己的评注。虽不无自诩之嫌，然其痴迷程度亦可见一斑。

任初先生的棋艺虽称不上登峰造极，但据说已可居一流棋手之列。当年象棋运动的权威报纸《象棋报》曾登载过先生的一个对局，当时的名手卢辉曾评价道：“此局纯为名作，一等之选也。”

先生与众多象棋名家私交甚笃，经常在一起交流甚至对弈，特别是在为躲避战火避居香港的两年时间里，因参加了许多高质量的棋艺活动，使得任初先生的棋力大增。任初先生最爱在名手对局现场记录着法，只要有余暇就会出现在象棋名手比赛场所，甚至邀请名手至家切磋。当年华南名手卢辉、方绍钦、吴兆平三人常聚集在任初先生家日夜演练双马局，任初先生记录他们的对局达三四册之多，因此其饶单双马的技艺很是高明。而每遇此类场合，任初先生往往身穿他独创的带口袋的玄色长袍，并且随身携带两种烟，好的款待别人，次等的自己吸用，这也成为当时象棋名手对局棋盘旁边的一道独特的风景线。

任初先生曾被冠以“超级棋迷”的称号。当年，名棋手周德裕与董文渊在香港作十局赛，先生应邀作棋证。董连胜五局，第六局周悔着，发生争吵，先生始终在场，对其中细节一清二楚。在坪石时，教职员学生闻名登门求弈，不论老少，先生必欣然出秤接待。一夜，一袁姓讲师来与先生对弈，中夜辞去。先生就寝未及半小时，忽然袁来叩门，提出若某着变用他着则可获胜。于是挑灯重整旗鼓，反复变着，最后均失败。此时已凌晨三点，先生始终棋兴高涨，毫无倦容。[17]

晚年时，任初先生将其象棋记录及其评注手订《畸盦坐隐》五十卷，可惜因战乱未能流传下来。然可庆幸的是，任初先生有记日记的习惯，即便是象棋棋局也多抄录于内，细细翻阅从中可见诸多手谈佳品。

对酒当歌，人生几何[18]

青岛，无疑是一个宜居之地。缺少深厚的文化底蕴是其短板，然背山面海，气候宜人，加之物产丰富，尤盛产海鲜，当时的山东大学选址于此，想来正可耗其物产之有余以补其文化之不足吧。而任初先生在此精于治学的同时，也不忘偶尔去享受一下生活。

在山东大学期间，任初先生与杨振声、闻一多、梁实秋等人意气相投，教学之余时常在一起饮酒作乐。当时的山东大学曾流传有“酒中八仙”的逸闻，此八人于 1930 年至 1932 年间在校共事，“宴饮作乐，酒酣耳熟，一时忘形，乃比附前贤，戏以八仙自况”。所谓“比附前贤”，倒不是说此八人将自己比作传说中那“过海”的八位神仙，其“攀比”的对象是杜甫“饮中八仙歌”[19] 中那八位醉态可掬的文士。只是杜甫的“饮中八仙”实际并未在一起饮过酒，是杜甫本人通过诗歌将他们强行拉郎配，而本文所说的这“酒中八仙”倒是时常在一起以酒会友，把酒言欢。

其实最初这群酒仙的成员并不固定，几年之中屡有变化，只是在一次聚饮中间，闻一多先生环顾座上共有八人，一时兴起言道：“我们是酒中八仙！”孰料竟成固定称谓。当时这八个人是：杨振声、赵畸、闻一多、梁实秋、陈命凡、刘本钊、方令孺女士以及任初先生。按照梁实秋先生的说法，他们这八仙“只是沈湎曲蘖的凡人，既无仙风道骨，也不会白日飞升，不过大都端起酒盘举重若轻，三斤多酒下肚尚能不及于乱而已。”而“（任初）先生实其中佼佼者。”[20]

此八仙性情各异。

杨振声，字今甫，山东蓬莱人，为国立青岛大学的实际创办者。就身材而言，为典型的山东大汉，但言谈举止温文尔雅，“居恒一袭长衫，手

1930 年国立青岛大学建校后的第一任校长杨振声（左）及第二任校长赵太侔（右）

携竹杖，意态潇然。"可一旦群友毕集，酒杯在手，则意气风发。今甫先生嗜拇战——类似于我们今天的划拳，"入席之后，往往率先打通关一道，音容并茂，咄咄逼人。"[21]

作为今甫先生的左膀右臂，时任学校教务长的赵畸（字太侔）与时任学校秘书长的陈命凡（字季超）可谓是性格截然不同的两个极端。太侔先生和今甫先生是同学，最大特点就是寡言笑，据说可以和客人相对很久而一言不发。平日专于韬光养晦，乃至于自己原籍何处都讳莫如深。今甫先生因当时的国民政府拖欠经费问题辞职后，太侔先生代其为校长。而季超先生为人开朗豪爽，精明强干，喜动不喜静。基本上太侔先生的所有性格指数乘以 -1 就是季超先生的写照了。当然，两人也有共同之处——都是山东人，都有山东人的酒量。

"八仙"中也有不善饮者，闻一多与梁实秋两位先生从来都是饮少辄醉的，但二人皆好酒，与人对饮时都兴致极高。一多先生早年经历丰富，曾学习油画，并出国游历，后终觉因文化背景差异，中国人在油画方面难与西方人一争短长而主动放弃，从此醉心于文学。据说又因恋情受挫，不忍回顾当时所写的白话情诗而终埋首于故纸堆中专心研究国学。曾言道："名士不必须奇才，但使常得无事，痛饮酒，熟读离骚，便可称名士。"传闻一多先生一次醉酒，冷风一吹，竟昏倒在尿池旁，一时成为诸仙欢饮时活跃气氛的谈资。与闻一多先生相比，梁实秋先生的早年经历可谓是顺风顺水。生于西子湖畔，顺利考学出国，文学创作使其少年成名，家有贤妻从而生活美满，真是羡煞众人。

酒桌之上最重"酒品"，"酒中八仙"的酒品自然不低，但要优中选优，还要推刘康甫先生。刘康甫先生名本钊，时为国立青岛大学会计主任，为人细致谨慎。好酒程度不亚于闻、梁，而酒量之豪可直追赵、陈。嗜拇战，只因耳聋严重，拇战时不易控制声音大小，故声音极高，而对于对方的呼声却不甚了了，但"只消示意令饮，他即听命倾杯"，从不疑对方有诈，其酒品颇有君子之风。

方令孺是八仙中唯一的女性，安徽桐城人，教国文，兼管女生工作。"有咏雪才，惜遇人不淑"，一直过着独身生活。她一向是一袭黑色旗袍，极少的时候薄施脂粉，给人一种恬淡朴素的印象。虽参加欢饮，但从不纵酒，刚要"朱颜酡些"的时候就停杯了。

"八仙"中最为豪气干云者，还得说是任初先生。"友朋饮宴之间，尤其是略有酒意之后，他的豪气大发，谈笑风生。他知道的笑话最多，荤素俱全，在座的人无不绝倒，甚至于喷饭。……每当嘉会，酒阑兴发，击箸而歌，声震屋瓦，激昂慷慨，有古燕赵豪士风。"[22] 任初先生尤嗜拇战，"宴会时拇战兴致最豪，嗓音尖锐而常出怪声，狂态可掬。"[21] 一次微醺之后，任初先生口占一联："酒压胶济一带，拳打南北二京。"虽纯为戏言，但其豪气可见一斑。

诸"仙"经常聚饮的地点有两个：鲁菜馆顺兴楼与豫菜馆厚德福。顺兴楼是青岛本地的老馆子，手艺属于烟台一派，当时最拿手的几样菜如爆双脆、锅烧鸡、酱汁鱼、烩鸡皮、拌鸭掌、汆西施舌、黄鱼水饺等驰名胶东。厚德福则是北平厚德福饭庄在青岛的分号，自有一套拿手绝活儿，如瓦块鱼、鱿鱼卷、铁锅蛋、核桃腰、红烧猴头、琵琶燕菜、清炒亦或黄焖鳝鱼……都是独门手艺，而其焖炉烤鸭也是别有风味。[21]

这群酒仙对于菜品的好坏固然看重，但最注重的还是酒的品质。"八仙"们每次聚会以喝尽一坛花雕为限。一坛酒约三十斤，雇两个工人抬到店，当面启封试尝，若微酸倒尚无大碍，最忌的是带有甜意，有时要换两三坛才中意。当然，这只是诸位"饮君子"们口味刁钻而已，却不是摆谱。一旦酒菜上桌，诸人皆喜欢自行舀取，以为那样才尽兴。他们喜欢用酒碗，一口一大碗，痛快淋漓，对于菜肴反倒不大挑剔，通常是一桌整席——也就



从左至右：闻一多，梁实秋，方令孺女士

是今天我们常说的标准套菜，但是偶尔也别出心裁，例如：上菜一般先是以四个双拼冷盘开始，诸仙有一次要求将其换成二十四个小盘，把圆桌面摆得满满的，且要求精致美观。有时候，尤其是在夏天，则将四拼盘换为一大盘，把大乌参切成细丝放在冰箱里冷藏，上桌时浇上芝麻酱三合油和大量的蒜泥，据说这一冷荤很受欢迎，比拌粉皮之类的凉菜相比确是高明。一次吃铁锅蛋时，太侔先生建议外加一元钱的美国干酪，切成碎末打搅在内，菜成，果然气味浓郁、不同寻常，从此成为诸仙聚饮时的定例。酒酣饭饱之后，通常要一大碗酸辣鱼汤，用以醒酒。

据说有一次胡适自京赴济，“八仙”设宴为其洗尘。席间“八仙”猜拳豪饮之状，将胡教授吓得忙把刻有“戒酒”二字的戒指戴在手上，并说：“此乃内子所赐，胡某惧内，不敢犯戒。”“八仙”见胡教授如此认真，也就不再勉强。酒后，胡适还曾认真劝诫“八仙”酒多饮无益，回到北京后，还专门就此给“八仙”写了一封信。

适之先生以惧内为由逃酒倒不是托辞，他是真怕老婆！对此适之先生也从不讳言。适之先生有收集国外钱币的嗜好，曾有一友人寄给其十几枚法国硬币，其中一面刻有“PTT”字样，适之先生笑言他原有成立一个“怕太太”协会的打算，此硬币竟然含有协会名称首字母，正可作为“徽章”，直到晚年适之先生对此事仍念念不忘。适之先生与夫人江东秀的结合是“父母之命、媒妁之言”的结果，婚前自然谈不上有什么感情。等到适之先生遇见其表妹并一见倾心后，便下决心离婚，向包办婚姻宣战，追求属于自己的爱情。可当适之先生将这一决定委婉的说出后，江东秀立刻抄起一把刀并拉过两个儿子，威胁道：“离婚可以，我先把两个儿子杀了再和你办手续吧！”吓得胡适魂飞魄散，赔罪求饶。从此，再也不敢有离婚的念头。当然，江东秀绝非传统意义上的“母老虎”、“河东狮”，纵观适之先生一生，江的坚强、隐忍、细致也使适之先受益良多。仅就此事而言，江的坚持客观上毕竟阻止了一场近亲结婚的错误，善莫大焉。

其实，纵观古今中外，“惧内”并非特殊的社会现象，更与男人的勇气、智慧等等无关。比如戚继光，“大刀向鬼子们的头上砍去”连眼都不眨，但在家中却是畏妻如虎；古希腊先贤苏格拉底在其妻的淫威下渡过了一生，并总结了这样一条“哲理”——假如你的妻子是善良的，你便是一个幸运儿；假如你的妻子是邪恶的，你就会成为哲学家。

像这样的“惧内”名人很多，无需细细搜罗即可编成一部鸿篇巨制，咱们还是言归正传，抛开“妻管严”继续说说仙家们吧。“八仙”宴饮后，往往尚有余兴，通常就在任初先生的带领下乘着月色与酒兴蹒跚而至某家潮汕籍的店铺，做一回半夜敲门的不速之客。当时在青岛颇有几家潮汕巨贾以经营鲁、粤两地土产为业，且皆对任初先生礼敬有加。一众平素端庄斯文的知识分子，满身酒气浩浩荡荡的在深更半夜敲店门，足以令店内睡眼惺忪的伙计睡意全消。进店后，任初先生熟门熟路的带领诸人直趋后

中国海洋大学“一多楼”，为一栋二层建筑。任初先生在山东大学执教期间住在此楼二层，闻一多先生住在一层

厅，主人的款待热情而周到，烹茶、烧烟皆有清秀的小童在一旁伺候。潮汕一带对饮茶一直十分讲究，皆饮功夫茶，虽身处异地也断不入乡随俗。其所用茶具小而精致，冲泡极有功夫。以红泥小火炉烧炭火煮水，浇灌茶具，冲入香茗，用小盅奉客。几盅吃下，余香满口而酒意全消。任初先生本人也很懂得吃茶，但不常喝。待客“起码是‘大红袍’、‘水仙’之类”，因此任初先生在山东大学期间的好友如梁实秋、闻一多等经常去他那里“蹭茶”吃。任初先生经常向来蹭茶的诸友就茶叶、茶具、水质、水温乃至如何品茶详加分析，如谓炉火与茶具相距以七步为度，沸水之温度方合标准等等。及至潮汕店铺中，任初先生再三告诫诸人，举小盅饮功夫茶，若饮罢径自返盅于盘，则主人不悦，须举盅至鼻头猛嗅两下方可。不知现在喝功夫茶是否还有此讲究，想来是以此表明留恋茶香，以示对主人佳茗待客的感谢之意吧。

茶罢，店主人将一众“仙长”们迎进内厅，点一灯如豆，短笛长箫信口吹，荒腔走板亦无妨，只图一乐。待得酒意消退，纷纷起身称谢告辞，店主人往往还有一匣香茗见赠。[23]

这“八仙”不仅喜欢酒后夜游，对于结伴野游也兴趣颇浓，再加上青岛风光秀美，更增游兴。任初先生在其日记中就不止一次的记载与闻一多、方令孺等结伴游崂山的经历。

对于平时的饮食，任初先生也较考究，曾自带一潮汕厨子为其做饭。这倒不是因其富裕或为了摆谱，只怪南北饮食差异太大。一次，任初先生从家乡回来，立刻邀梁实秋与闻一多去他的住所吃饭，一桌子菜以海鲜为主，梁实秋先生后来回忆“都鲜美异常”。其中有一碗白水氽虾，十来只明虾去头去壳留尾，滚水中一烫，经适当的火候出锅上桌，肉白尾红，蘸酱油食之，脆嫩无比。这种简单而高明的吃法，使梁实秋等大为赞叹，以后常仿此菜式待客，而但凡吃这道菜的无不称善。但任初先生此次请客的另一道“硬菜”——清汤牛鞭，可让闻、梁两位书生犯了难。只见清汤中一白汪汪之物漂在面上，任初先生虽殷勤劝客，并再三强调其滋补之效，但客人却均不敢下箸。想来这也是当时南北饮食差异的一种具体体现吧。倒是任初先生刚从汕头携来的一篓潮州蜜柑，在饭后让宾主们一扫而空，小补了牛鞭之缺。请朋友吃饭，任初先生大有倾其所有的架势，对于平时的饮食任初先生倒是要求的很简单，一碗汤，两个小菜即可。若有不速之客登门，则不过加两个荷包蛋而已。

当时的中国内忧外患，形势混乱，任初先生及其友人虽偶尔寄情于酒宴欢会，乃至乘醉夜游，中间也不

免透出颇多无奈。浮生难得半日闲，与友人觥筹交错之际，暂时抛却诸般烦恼，疏放各自性情，一吐胸中块垒，亦是件大乐事。然终有宴罢曲终之时，“八仙”如此相聚并未几年便作风流云散。

未完待续

本文的写作得到了山东大学数学院院长刘建亚教授的大力支持，四川大学数学学院罗懋康教授多次给予了细致的指点，潮汕文化研究中心提供了珍贵的资料，在此一并致谢！

作者介绍：

东青（1981-），文学博士，现为山东大学历史文化学院讲师，《数学文化》文字编辑。

参考文献

1. 吴定宇主编：《走进中大》，四川人民出版社 2000 年版，第 1 页。
2. 饶宗颐：《黄际遇教授传》，原载《暹罗澄海同乡会成立周年纪念刊》，泰国曼谷 1949 年，第 35 页。
3. “筚路蓝缕，以启山林”，语出《左传•宣公十二年》。
4. 从字面理解，畴盦即是“研究数学的地方”，语出清代阮元著《畴人传》。关于何为“畴人”，其含义不一，根据《史记集解》对《历书》“畴人”的注释“家业世世相传为畴。……各从其父学”的说法，认为中国古代天文学家和数学家多是师承家学，所以称为畴人。
5.《山东大学校史》，山东大学出版社 1986 年 4 月第 1 版，第 70 页。
6.《黄际遇日记（节本)》，1932 年 12 月 14 日；1933 年 3 月 9 日，3 月 21 日，11 月 17 日，11 月 24 日。
7. “笔参造化，学究天人”，语出李白《与韩荆州书》。
8. 国立山东大学出版委员会：《国立山东大学文史丛刊》，山东大学出版社 1934 年第一期，第 71-132 页。
9. 饶宗颐编：《潮州志•艺文志》“经部”，第 16 页，1965 年香港龙门书店。
10.《万年山中日记》第五册，1932 年 10 月 28 日（农历九月二十九日）。
11. 黄际遇，《万年山中日记第二十七册》序。
12.《黄侃日记》第 878 页，《寄勤閒室日记》，癸酉四月六日，1933 年 4 月 30 日。
13. 李彦英、毌嘉平：《著名校友丁观海》，《山东大学报》2004 年 2 月 28 日。
14. “兼资文武，亚有筹算”，语出《隋书•卷六十•列传第二十五•崔仲方》。
15. 林莲仙：《缅怀黄任初师》，原载《汕头文史•潮汕教育述往》，1991 年第 9 辑，第 172-179 页。
16. 姚梓芳：《澄海黄任初教授墓碑》，载于《黄任初先生文钞》，广州国立中山大学 1949 年版，第 95-96 页。
17. 钟集：《记黄际遇先生》，陈景熙、林伦伦主编《黄际遇先生纪念文集》，汕头大学出版社 2008 年版，第 188 页。
18. “对酒当歌，人生几何”，语出曹操《短歌行》。
19. 唐代杜甫曾作《饮中八仙歌》，生动描写了贺知章、李琎、李适之、崔宗之、苏晋、李白、张旭、焦遂等八人的酒姿醉态，是杜诗中难得的潇洒之作。
20. 梁实秋:《记黄际遇先生》，载《雅舍杂文》，上海人民出版社 1993 年，第 90 页。
21. 梁实秋:《酒中八仙——忆青岛旧游》，载《雅舍杂文》，上海人民出版社 1993 年，第 42 页。
22. 张云:《<黄任初先生文钞>序》，原载《黄任初先生文钞》，国立中山大学 1949 年。
23. 梁实秋：《喝茶》，载《清华八年》，华夏出版社 2008 年，第 68 页。

《中国数学会通讯》是该刊编辑委员会编辑出版的内部刊物，季刊。主要刊登国内外数学界的重要信息，报导中国数学会与各省市自治区数学会、学科分会等的活动情况。主要栏目包括：学术活动信息，数学教育与普及，数学精品文章（数学的历史、进展、价值、趣事等），人物专栏，学科介绍，书讯与书评等。

《中国数学会通讯》为季刊，彩色印刷，图文并茂，
全年的总订费为 50 元（含邮费）。

订阅办法：请将订费邮汇至北京中关村东路 55 号（邮政编码：100190），中国数学会办公室；
或行汇至中国数学会

开 户 行：北京工商行海淀西区支行
帐　　号：0200004509089161419
电　　邮：cms@math.ac.cn
电　　话：0086-10-62551022

2011 年第 2 期要目：

- 陈省身的期望
- 科学与艺术有共性也有交融
- 笛卡儿的梦乡

诗三首
数学与艺术中的抽象
《数学与人文》简介
数学文化小丛书总序
第二届数学名词审定委员会一审会在京召开
“第四届数学史与数学教育国际研讨会暨第八届全国数学史学会学术年会”会议纪要
北京大学“组合数学研讨会”在京召开

《中国数学会通讯》编辑部供稿

2005 年 5 月，李天岩教授在庆祝他 60 岁生日时接受台湾新竹清华大学赠送的“公鸡”礼物

传奇数学家李天岩

丁玖

2005 年是爱因斯坦狭义相对论发表一百周年，为此美国数学会专门设立了“爱因斯坦讲座”，每年请一位世界杰出科学家作公众演讲。2008 年 10 月，在位于加拿大西海岸美丽城市温哥华的不列颠哥伦比亚大学召开的美国数学会与加拿大数学会联合会议上，爱因斯坦讲座的讲者属于年逾八旬的美国普林斯顿高等研究院英国裔物理学家戴森（Freeman Dyson）教授，但他因故未能赴会，便在 2009 年 2 月的《美国数学会会刊》中发表了一篇题为“鸟与青蛙”的演讲稿。文中他描述了两类伟大的研究学者：鸟瞰大地者与深入探索者，而杨振宁和冯 • 诺依曼分属为之。他又写道：“在混沌领域里，我仅知道一条有严格证明的定理，1975 年由李天岩和詹姆斯•约克（James Yorke）在他们题为‘周期三意味着混沌’的短文中证明的。李 - 约克论文是数学文献中不朽的珍品之一。”（“In the field of chaos I know only one rigorous theorem, proved by Tien-Yien Li and Jim Yorke in 1975 and published in a short paper with the title ‘Period Three Implies Chaos’. The Li-Yorke paper is one of the immortal gems in the literature of mathematics.”）

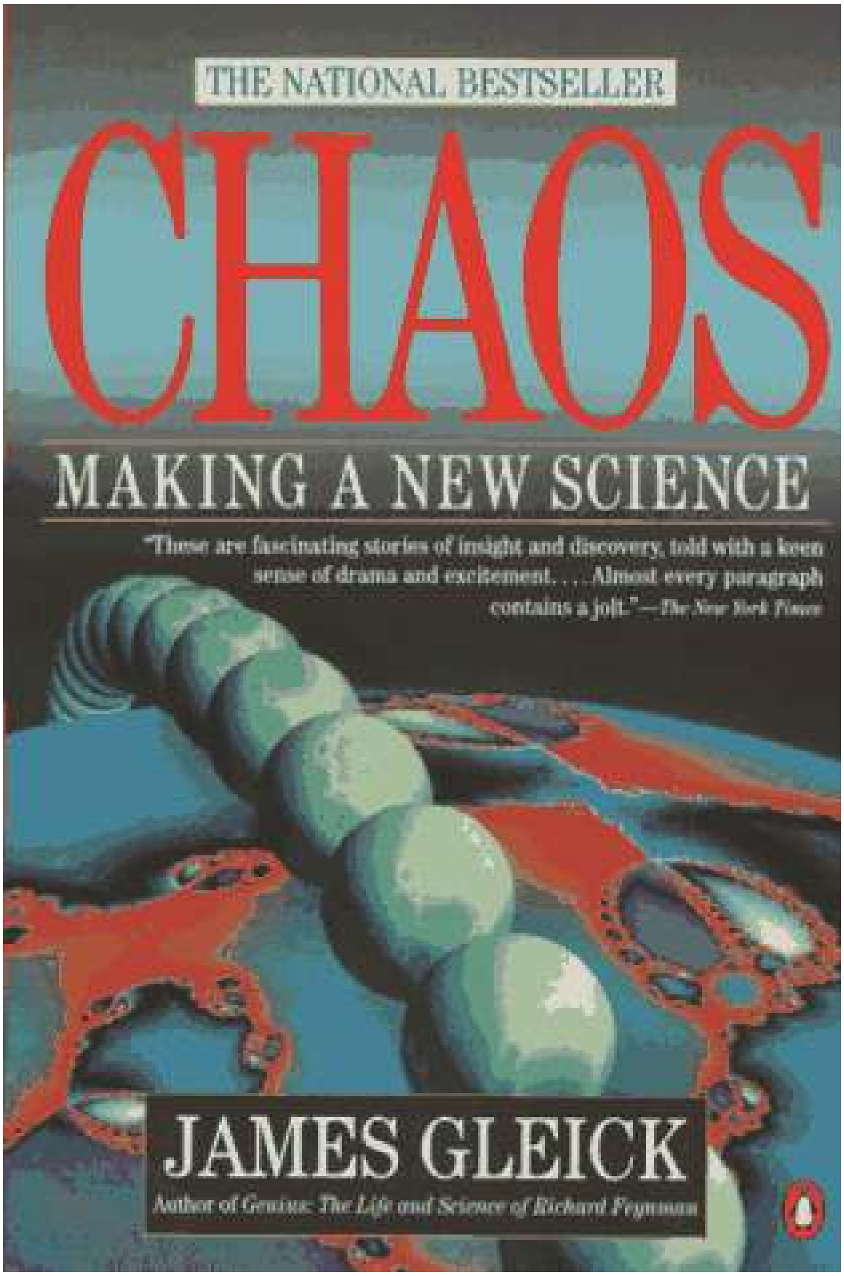
戴森提到的李天岩，是本文的主人公。他祖籍湖南，1945 年 6 月出生于福建省沙县。他的父亲李鼎勋早年留学日本东京帝国大学医学院，获医学博士，1934 年回国任教湖南湘雅医

李天岩教授1976年后一直在密西根州立大学数学系工作；目前是这所大学的杰出讲座教授

李天岩教授的博士导师 James Yorke（左）

学院，1939年起任福建省省立医院院长。李天岩三岁时随父母及全家定居台湾，在那里接受教育直至大学毕业。他1968年为台湾新竹清华大学数学系第一届毕业生，在按规定服兵役一年后，于1969年赴美国马里兰大学数学系攻读，1974年获博士学位，其论文指导老师就是约克。

李天岩1976年至今一直在美国密西根州立大学数学系任教，其中1976年至1979年为助理教授，1979年至1983年为副教授，1983年至今为正教授，1998年起被赋予杰出讲座教授（University Distinguished Professor）头衔。他1995年荣获美国著名的哥根哈姆（Guggenheim）奖，1996年获密西根州立大学杰出教授奖，同年又获数学系弗莱明杰出教学奖，2002年获台湾清华大学理学院杰出校友奖，2006年获

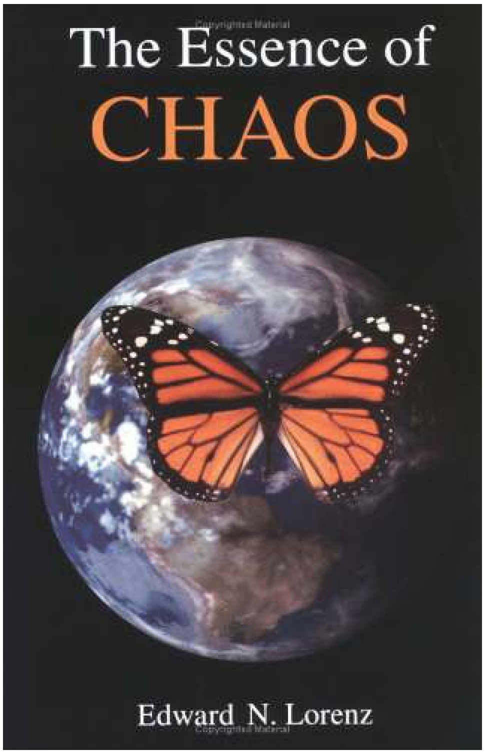


左图：著名科普作者 Gleick 的关于混沌的畅销书；右图：混沌现象和理论的部分重要贡献者 (从上至下)： Lorenz, May, Yorke, 李天岩

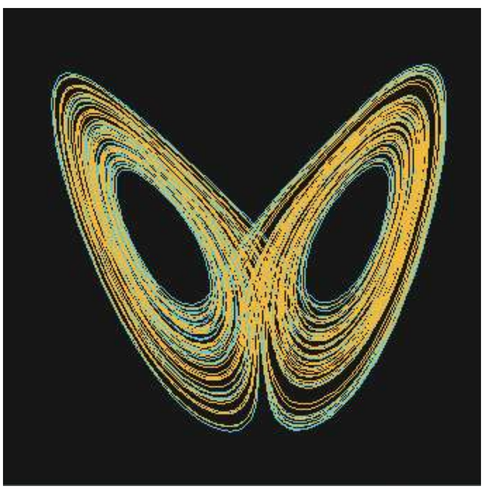
密西根州立大学理学院杰出导师奖。

李天岩曾在应用数学与计算数学几个重要领域中作出了开创性工作，成就非凡。他与约克的上述论文在数学中第一次引入了“混沌”的概念；他对乌拉姆（Stanislaw Ulam）猜想的证明是动力系统不变测度计算理论与算法研究之奠基性工作；他与凯洛格（R. B. Kellogg）及约克关于计算布劳威尔（L. E. Brouwer）不动点的思想和数值方法，开辟了现代同伦延拓算法研究的新天地；他和他的合作者们以及学生们关于代数特征值问题以及一般多变量多项式系统的同伦方法之广泛与深入的研究，为他赢得此领域领袖人物之一的称号。

2005 年 5 月，李天岩的母校台湾新竹清华大学主办了庆祝他六十周岁生日的“数值分析与动力系统国际研讨会”。约克用如下引人入胜的开场白开始了会议的第一个报告：“一百年前，



混沌之父 Lorenz 的著作《混沌及其基本原理》



Lorenz 蝴蝶效应现象

爱因斯坦发表了划时代的四篇论文。三十年前，李天岩完成了三个杰出的工作；它们分别是混沌概念、乌拉姆猜想、同伦算法。”约克如此奇妙的比较，正是对他优秀弟子原创性贡献的绝妙概括。

“周期三意味着混沌”

现今世界上稍微了解一点动力系统的人，无人不知李天岩与约克于 1975 年 12 月在《美国数学月刊》杂志上发表了一篇极其重要的论文“周期三意味着混沌”。该文首创了“混沌”的数学定义，开拓了整个数学界、科学界对混沌动力系统理论和应用研究的新纪元。

在自然科学领域，混沌现象的发现与相对论、量子力学一起被誉称为二十世纪物理学上三大发现。约克对混沌概念有过形象的说明：“生命中充满着小改变导致大变化的情形。例如说车祸，假如人们早个或晚个十秒钟出门，或许就可避免一场车祸。所以小小的改变可以导致很大的变化。”这也是中国成语“差之毫厘谬以千里”之奥秘所在。早在十九世纪末，1936 年被美国数学家贝尔（Temple Bell）在其名著《数学伟人传》中称为“最后的全能数学家”庞加莱（Henri Poincare）在研究天体运动的“三体问题”时已知道其牛顿运动微分方程组的解对初始条件的敏感性。二十世纪六十年代初，美国麻省理工学院气象学教授爱德华 • 洛伦茨（Edward N. Lorenz）用三个简单的常微分方程来计算可用于天气预报的对流扩散问题时意外发现了长期天气预报的不可行性，即俗称的所谓“蝴蝶效应”：北京的蝴蝶翅膀轻轻一拍，两周后可能导致纽约的一场风暴。七十年代初美国普林斯顿大学生物学教授罗伯特 • 梅（Robert M. May）在用“逻辑斯蒂模型”$S(x) = rx(1-x)$ 来研究生物种类的数量变化时惊讶地发现当参数 r 接近 4 时，其迭代序列将变得愈加复杂。在这些科学研究的背景下，混沌的数学概念在李天岩与约克的著名论文中应运而生。

1961 年冬季的一天，具有数学学士学位并在第二次世界大战中为美国空军从事气象预报工作的洛伦茨教授在他麻省理工学院的办公室，与往常一样用 Royal McBee 型的一台简陋计算机计算与天气预报有关的三个简单非线性微分方程初值问题。算了一阵子之后，为了下楼喝咖啡，他暂停计算，只是把计算机终端上的数据抄了下来。一小时回来之后当他重新输入刚才的数据，却十分吃惊地看到与旧初始值仅仅相差约万分之一的新计算结果和原先预期的计算结果大相径庭，面貌全非。开始他以为这仅仅是计算过程中的舍入误差在作怪吧。但严谨而又细心的他经过反复试验、仔细推敲，终于领悟到这一异常现象根植于该微分方程组的内在特性：初值问题解对初始值的极端敏感性。他的发现随即发表在《大气科学杂志》上，成了十年后点燃“李 - 约克混沌”思想火花的火花塞。洛伦茨 2008 年 4 月以 90 高龄去世 , 他留给世人的“洛伦茨吸引子”成为混沌学领域中最有名的奇异吸引子。

1972 年，美国马里兰大学气象学费勒（Allen Feller）教授将洛伦茨关于气象预测模型的那四篇在气象学家眼里理论性太强、数学味太浓的论文递给了同在流体力学及应用数学研究所的数学系约克教授，认为数学家们也许会感兴趣。约克一生致力于数学与科学的联姻，对英国纯粹数学家哈代（Godfrey H. Hardy）以“无用”引为自豪的纯之又纯“象牙塔”式研究颇不以为然。哥伦比亚大学本科一毕业，他就直奔马里兰大学读数学博士，只因那里有一个流体力学及应用数学研究所这一巨大的“吸引子”。多亏了费勒的引见，约克和他的博士研究生

李天岩才能接触到洛伦茨的论文。他们的确甚感兴趣，约克甚至将文章复印数份，四处寄出，这就是为何坊间曾经流传“约克‘发现’洛伦茨”。

1973 年 3 月的一天下午，当李天岩来到约克的办公室时，约克对他说，“我有个好主意给你！”（I have a good idea for you）这个想法已在约克头脑中直观地凸现，但他未能予以证明。那时李天岩正在做微分方程方面的研究，以为他所谓的好主意是关于那方面的高深想法，就半开玩笑地打趣道：“Is your idea good enough for the Monthly?” Monthly 指的是《美国数学月刊》这个一般学生都能看懂的浅近杂志。当李天岩听完约克说完这个好主意后，马上感慨地说，“这将是《数学月刊》一个完美的工作。”因为它所牵涉的语言非常基本。两周后，运用他得心应手的微积分技巧，具体地说，巧妙不断地运用微分学的“介值定理”，李天岩完全证明了这个后来出了名的李 - 约克定理：若实数轴一区间到其自身的连续函数 f 有一个周期为三的点，即存在三个互不相等的数 a, b, c，使得函数 f 在 a 的值为 b，在 b 的值为 c，在 c 的值为 a，则对任意正整数 n，函数 f 有一周期为 n 的点，即从该点起函数 f 迭代 n 次后又第一次返回到该点。更进一步，对“不可数”个的初始点，函数从这些点出发的“迭代点序列”之最终走向将是杂乱无章的，无规律可循。当文章写好后，尽管李天岩心里想到的是投给令人尊敬的高等专门杂志，却按照约克的意图，他们寄给了具有大量读者的《美国数学月刊》。但不久文章被退回，理由是该文过于研究性，不太适合此期刊所重点面向的大学生读者群。但编辑同意若作者能改写文章到一般学生都能看懂的地步，可以投回《美国数学月刊》。但是，由于李天岩忙于微分方程等方面的博士论文研究，没功夫改它，也不知怎么改。于是乎，这篇文章就在他桌上被束之高阁将近一年。

1974 年是马里兰大学数学系生物数学的“特殊年”。在这一年里，每星期都要请生物数学这个领域里最杰出的学者来校演讲。在五月的第一个星期，他们请来了普林斯顿大学的梅教授演讲一周。梅 1959 年在澳大利亚悉尼大学获得理论物理博士学位，两年博士后在哈佛大学从事应用数学的研究，回到母校做到理论物理正教授之后“心血来潮”地对生物学着迷，1973 年成为普林斯顿大学动物学讲座教授，硕果累累。在其最后一天在马里兰的演讲中，梅教授讲了逻辑斯蒂模型的迭代：当参数从小到大变化时其迭代点序列之性态将变得愈来愈复杂。他十分困惑于对这一现象的解释，想像中也许只是计算上的误差所造成的吧。约克听完梅的演讲后，在送他上飞机时，把李天岩桌上躺了将近一年的那篇关于李 - 约克定理的文章给他看。梅看了文章的结果之后，极为吃惊，并认定此定理大大解释了他的疑问。约克从机场回来后立即找到李天岩说，“我们应该马上改写这篇文章。”文章在两个星期内改写完毕，三个月后被《美国数学月刊》接受，并刊登在 1975 年 12 月份的那一期上。

1985 年夏，李天岩第一次来祖国大陆学术访问，南至中山大学、北至吉林

李天岩（奶奶怀抱者）及母亲（最左边）；前左是哥哥李灵峰，现为台湾清华大学著名物理教授

李天岩 1970 年全家照：前面中间是父母，后排右一为李天岩，后排左一为哥哥李灵峰

1996 年李天岩获密西根州立大学 " 杰出教授奖 " 时与母亲合影

1996 年李天岩获密西根州立大学数学系 " 弗莱明教学奖 " 时与母亲合影

大学，东到杭州、西临西安，中达北京中科院理论物理研究所，马不停蹄地讲解“混沌”与“同伦”。笔者当时刚获硕士学位不久，留校教书，由系领导特批，飞往他讲学第一站广州，首次聆听他极富魅力的讲座。在中国的演讲中，李 - 约克论文的题目“Period Three Implies Chaos”被他形象地翻译成“周期三则乱七八糟”。这篇令他一举成名、篇幅不长的论文，第一次在数学上严格地引入了“混沌”的定义。尽管早在 1964 年，前苏联数学家沙可夫斯基(A. N. Sharkovsky)证明了较李 - 约克定理第一部分更为一般的结果，但只有李 - 约克定理之第二部分才深刻地揭示了混沌现象的本质特征：混沌动力系统关于初始条件的敏感性以及由此产生的解的最终性态的不可预测性。根据统计，该文可能是数学界及物理学界被引述次数最多的当代重要论文之一，已被引用了超过两千次。

乌拉姆猜想

在日常生活中，概率问题到处可见。波兰科学院院士洛速达（Andrzej Lasota）曾这样讲述概率：当你准备离开一间屋子时，你出门的时侯有可能前后相差一分钟。随着时间的推移，又有不同的概率及可能发生的事要去考虑。比如，有百分之十的可能，你会发生车祸，而被送往医院；或许，有百分之十的机会，你会遇见从未谋面的漂亮女子，而深深为之倾倒，一切皆是偶然。所以事情会演变得愈来愈复杂，所有的事都牵涉到概率。因此约克曾经略显夸张地宣称：数学是概率的一部分。

遍历理论是研究确定性动力系统诸多概率统计性质的一门数学分支，是集测度论、泛函分析、拓扑学、近世代数等于一身的综合性学科，在物理和工程科学中应用广泛，如统计物

理、电子线路，以及与我们日常生活密切相关的无线电话。遍历理论的一个重要论题是关于非线性映射的绝对连续不变测度的存在及计算问题。这一问题又归结为相应的定义在勒贝格可积函数空间上的弗洛比尼尔斯 - 派农（Georg Frobenius 和 Oskar Perron）算子的不变密度函数的存在性与计算问题。对于混沌动力系统，这样的不变测度给出了迭代点的混沌轨道在其相空间中的概率统计分布，并与像熵及李雅普诺夫（Aleksandr Lyapunov）指数这样的重要数学概念密切相关。

1960 年，被誉为美国“氢弹之父”的杰出波兰裔数学家乌拉姆在其名著《数学问题集》中对于计算将单位区间 [0, 1] 映到自己内的非线性映射 S 所对应的弗洛比尼尔斯 - 派农算子的不变密度函数提出了一种数值方法。他将区间 [0, 1] 划分为 n 个子区间，然后他定义了一个 n 乘 n 阶矩阵。这个矩阵的每个元素都是位于 0 与 1 之间的实数。事实上，该矩阵位于第 i 行第 j 列相交处的那个数就是第 i 个子区间中被 S 映到第 j 个子区间中的那些点的比例。计算这个非负矩阵的关于特征值 1 的一个非负左特征向量并将其规范化，就可得到对应于 [0, 1] 区间如上划分的一个逐片常数密度函数。此密度函数可看成弗洛比尼尔斯 - 派农算子的近似不变密度函数。对于这一基于概率想法的数值方法的收敛性，乌拉姆提出了他在计算遍历理论领域现已著名的猜想：当子区间总数 n 趋向于无穷大时，这些近似不变密度函数将收敛于弗洛比尼尔斯 - 派农算子的一个不变密度函数。

1973 年，洛速达与约克在现已成为研究弗洛比尼尔斯 - 派农算子不变密度函数存在性问题的一篇经典性论文中解决了乌拉姆在其《数学问题集》中提出的一个问题：若 S 为一个足够“简单”的映射（例如逐片线性映射或多项式映射），其导数绝对值不小于 1，将一区间映到自身，则对应的弗洛比尼尔斯 - 派农算子是否存在不变密度函数？事实上，他们证明了如下的“存在性定理”：若区间映射 S 为一逐片二次连续可微映射，且其导数绝对值在该区间上都不小于一大于 1 的常数，则对应的弗洛比尼尔斯 - 派农算子存在不变密度函数。这个定理证明的关键是用到约克发现的关于有界变差函数与其在某一子区间上的限制之变差之间关系的一个不等式。

1997 年李天岩在儿子密西根大学本科毕业时与之合影

当李天岩读到上述的洛速达 - 约克定理的证明时，开始了构造计算弗洛比尼尔斯 - 派农算子不变密度函数的数值方法，却全然不知乌拉姆十余年前提出的上述方法。首先他定义了对应于区间 [0, 1] 划分为 n 个子区间的有穷维离散算子。它将每一个可积函数映成在每一子区间上取值为该函数在这一子区间上的平均值的一个逐片常数函数。这一离散算子不光为将可积函数空间投影到逐片常数函数子空间上的迦辽金（Boris Galerkin）投影算子，也是保持积分不变的马尔可夫（Andrey Markov）算子。若将这一算子与弗洛比尼尔斯 - 派农算子复合起来，则该复合算子限制在逐片常数函数全体所组成的子空间上在其标准密度函数基底下的矩阵表示恰为乌拉姆方法中定义的那个非负矩阵。运用下一节所述的布劳威尔不动点定理，李天岩直接证明对每一 个自然数 n，复合算子有一不变密度函数。他进而敏锐地感觉到有界变差函数的概念以及关于有界变差函数序列的经典赫利（E. Helly）引理在证明他独立提出的方法对于洛速达 - 约克区间映射族之收敛性时应起的作用。借助于洛速达 - 约克不等式与赫利引理，他证明了这个逐片常数逼近法的收敛性。换言之，乌拉姆方法产生的近似不变密度函数序列当 n 趋于无穷大时的确收敛于弗洛比尼尔斯 - 派农算子的不变密度函数。

李天岩中学毕业时的集体照；第三排右一为李天岩

恰在李天岩将这一开创性工作整理成文之际，他才知道他所构造的方法就是“乌拉姆方法”，他所证明的一切就是对乌拉姆猜想的一个解答！自然，文章的题目也相应修改，乌拉姆猜想的说法第一次出现在数学文献当中。多年后李天岩对笔者坦言：“如果我早知这是与冯•诺依曼（John von Neumann）齐名的大人物乌拉姆提出的问题，大概吓得不敢去碰。”可是，正如本文后面所转述的，“一个问题，大人物解决不了，并不表示小人物也解决不了。”

李天岩这篇发表于 1976 年美国《逼近论杂志》，题为“弗洛比尼尔斯 - 派农算子的有限逼近——乌拉姆猜想的一个解答”的论文让 1960 年诞生的乌拉姆方法声名鹊起。三十多年来，不变测度的计算已成为遍历理论和非线性分析中的一个活跃分支。在几乎所有关于应用乌拉姆方法及其推广计算不变测度的文献中，这篇论文成了必不可少的被引用经典文章之一。此外，他的证明思想也启发了他的学生，即本文作者及其合作者、中国科学院数学与系统科学研究院周爱辉在 1996 年发表的论文中证明对于高洛 - 波亚斯基（P. Gora 和 A. Boyarsky）高维映射族乌拉姆方法的收敛性。

现代同伦算法

学过代数拓扑或非线性泛函分析的人都知道有名的布劳威尔不动点定理：n 维闭球到此自身的光滑映射必有不动点。此定理的一个漂亮证明是用反证法。若无不动点，则可定义一新的光滑映射，它把闭球上任一点映到由该点在前一映射下的像到该点的线段延长到与球面之交点。易知球面上每一点在这新映射下保持不变。这样我们得到一个由闭球到其边界上且在边界上为恒同映射的光滑映射。而微分拓扑学告诉我们，这是不可能的，因为球面上几乎处处的任一点在该映射下的逆像所构成的光滑曲线无处可跑。

1973 年，当李天岩在旁听美国马里兰大学数学教授凯洛格的研究生课程“非线性方程组数值解”时听到

布劳威尔不动点定理的属于美国微分拓扑学家赫希（Morris W. Hirsh）发表于 1963 年的如上证明时，一个奇妙的想法在他脑海中涌现：既然在赫希的证明中，若假设闭球映射无不动点时，则对如上定义的“射线球面交点映射”，球面上几乎处处任取一点在该映射下的逆像光滑曲线无处可跑，则它必然跑到原先映射的不动点集合中去。更精确地说，若令 F 为 n 维闭球到此自身的光滑映射的所有不动点组成的非空集合，则利用如上反证法的思想，我们就有将 F 在闭球中的补集映到球面如上定义的光滑映射。由微分拓扑的沙德（Arthur Sard）引理可知，几乎所有的球面上的点都是该映射的“正则值”，因而这些点在映射下的逆像为起始于该点的一条光滑曲线。这条曲线的另一端不能再回到球面上，也不能在映射的定义域中停止，故必定趋向于原先映射的不动点集 F。如果能数值逼近这条曲线，就能计算出闭球映射的一个不动点。在凯洛格和约克两位教授的鼓励下，李天岩开始了这一卓越思想的数值实现。

在接下来的两个月时间内，他几乎每天都与学校计算中心那台只能用卡片输入的计算机打交道，但总是无功而返，计算机吐出的厚厚一迭纸预示着程序的失败。但李天岩锲而不舍，坚持不懈地修改程序。改错、输入、再改错、再输入，从一个实际计算的门外汉逐步登堂入室。直到有一天，他惊喜地发现计算机仅仅输出一张打印纸，上面正是成功计算出的布劳威尔不动点！他成功了！一个全新的布劳威尔不动点算法诞生了。

有趣的是，凯洛格 - 李 - 约克关于布劳威尔不动点的计算，并非是历史上的首次尝试。尽管他们当时不知道，早在 1967 年，美国耶鲁大学经济学教授斯卡夫（H. Scarf）在研究数量经济学时，将求解一个经济模型的均衡点问题归结为求解定义在 n 维标准单纯形上的一个连续映射 f 的不动点问题。根据布劳威尔不动点定理，这样的不动点存在。斯卡夫采用了所谓的单纯三角剖分方法，运用组合数学中的斯泊讷（E. Sperner）引理，跟随一条折线来近似 f 的不动点，从而设计了一种单纯剖分不动点算法。在七十年代，此算法被推广成求解非线性方程组的单纯不动点算法，成了热极一时的研究领域。1974 年，当在美国克莱姆森大学举行的第一届国际不动点算法大会组委会获悉凯洛格 - 李 - 约克的新方法时，他们提供了两张飞机票让他们赴会报告这一结果。正如斯卡夫在其会议论文集《不动点算法及其应用》序文中所述：“对我们众多与会者而言，克莱姆森会议之令人惊奇之处在于凯洛格 - 李 - 约克关于计算连续映射不动点的文章。他们提出了第一个基于微分拓扑思想——而不是我们习以为常的组合技巧——的计算方法。”

1992 年李天岩毕业 30 年后与中学老同学在洛杉矶相聚（李在后排右二）

李天岩和他的学生们，从右至左：曾钟钢、黄良椒、李奎元、李天岩、张红、丁玖、王筱沈；摄于 1990 年

虽然单纯不动点算法的研究目前基本上已趋沉寂，以凯洛格 - 李 - 约克方法为“初始点”的现代同伦延拓法研究依然方兴未艾，在不同的领域生根发芽。古典的同伦算法早在上世纪五十年代就有研究，尤其是前苏

1991 年李天岩被聘为北京清华大学客座教授仪式

联数学家戴维登科（D. Davidenko）引入相应的常微分方程初始值问题来数值求解同伦方程。如果我们要计算一个非线性映射 f 的零点 x^*，我们可将零点 a 为已知的一个平凡映射 h(譬如说，$h(x)=x-a$）与 f“同伦”，即定义同伦映射 $H(x,t)=(1-t)h(x)+tf(x)$，其中参数 t 在 0 和 1 之中取值。传统的同伦算法的思想是假设 H 的零点集可表示成连接 h 的零点 a 与 f 的零点 x^* 一条关于 t“单调”的曲线 $x(t)$。若对恒等式 $H(x(t),t)=0$ 求关于 t 的导数，我们就得到可以数值求解的戴维登科常微分方程初值问题。由 $t=0$ 起数值积分到 $t=1$ 时，就可得到 f 的零点 x^*。然而，这一方法的致命弱点在于，在一般情况下同伦曲线不一定总能定义 x 为 t 的单值函数。凯洛格 - 李 - 约克同伦方法的革命性思想是：只要能保证 0 是映射 H 的“正则值”，则由于沙德引理以及隐函数定理，光滑同伦曲线必定存在。坐标变量 x 与参变量 t 应具有同等的地位，它们均可视为曲线长度 s 的函数。这样，无论曲线关于 t 是否“转弯”，运用“预测 - 校正”这一数值手段，我们均能追踪此同伦曲线而得到解。这是现代纯粹数学，尤其是微分拓扑，在计算数学领域中的重要应用。如今，李天岩与凯洛格和约克一道是目前世界上被公认为非线性问题现代同伦法数值计算的创始人，并且对此重要的领域作出了巨大的贡献。

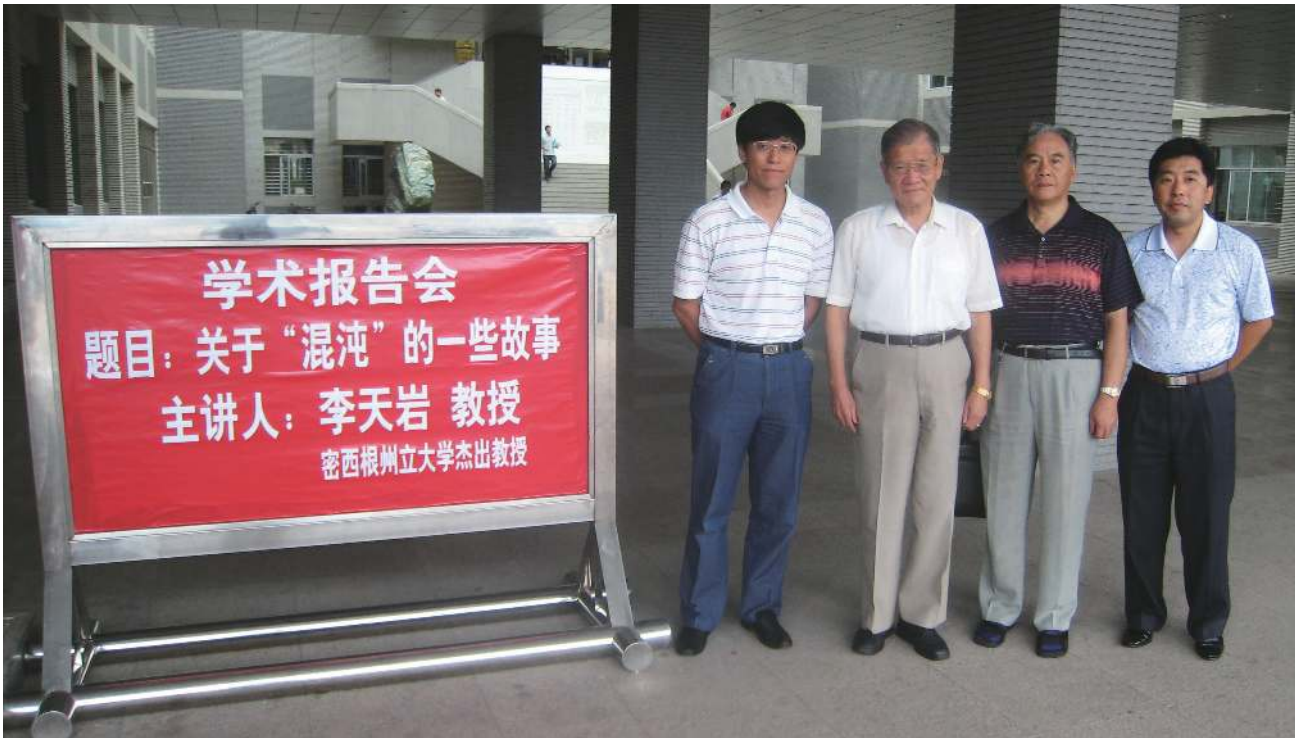
多项式系统数值解

自七十年代提出计算布劳威尔不动点的同伦方法后至今，李天岩一直在求解多项式系统同伦算法这一领域辛勤地开拓着。解多项式方程组的根是相当有趣而且经常出现在应用科学上的问题。譬如说电路分配问题、机械手问题等等。同时这种问题也出现在混沌理论的研究中，如洛伦茨研究的具有混沌现象的四维常微分方程组的定常状态事实上是其右端多项式方程组的解。李天岩在一次学术演讲中说过：“多项式方程组求解不光现在要用，两百年以后还是要用！”

对具有 n 个变数的 n 个多项式方程组，代数几何这一纯数学分支中古典的比左（Etienne Bezout）定理说此方程组所有孤立解总数的一个上界是所有多项式的阶之乘积。这个积称为对应于该方程组的比左数。但在绝大多数情况下，此上界远远大于实际孤立解的个数，其一典型例子为代数特征值问题。对应于 n 乘 n 阶矩阵的特征值问题的二次多项式方程组之比左数为二的 n 次方，但该矩阵最多只有 n 个特征值。

三十年来，用同伦算法来解多项式方程组“所有”孤立解的研究引起了很大的注意。1979 年，迦协 - 赞格维尔（C. B. Garcia 和 W. I. Zangwill）对解 n 元 n 个多项式方程组首先建立了一个同伦，将一所有解为已知的“初始平凡多项式组”与给定多项式组同伦起来。他们证明了：若 0 是该同伦正则值，则多项式方程组的每一个孤立解都是同伦方程的一个相应的解曲线当 $t=1$ 时的终点。重要的是，这些曲线关于同伦参数 t 绝不转弯朝回走。这样对同一常微分方程组求解初始值为选定平凡多项式组已知零点的不同初始值问题，我们就可以在数值上逼近同伦曲线，因此可找出被求解多项式组所有孤立解的逼近值。但该法的缺陷是，由比左定理知，最多比左数多的所有孤立解要通过数值跟随大大超过比左数个数的同伦曲线才能得到。这样当 t 趋于 1 时，许多曲线都跑到无穷远去了。跟随这些无用的曲线是个很大的浪费。

同伦算法计算多项式方程组所有孤立解的一大优点是它可并行化，因可在并行机器上同时求解对应于不同初始条件的同一常微分方程。为了克服上述迦协—赞格维尔同伦法的缺陷，周修义、莫莱特 - 派瑞特（J. Mallet-Paret）以及约克介绍了一个包含 n 平方个参数的同伦。他们证明，



李天岩访问大连理工大学并讲学；从左至右：于波，李天岩，王仁宏，罗钟铉

除了测度为零的集合外，对几乎所有的参数，追随同伦方程的所有比左数条解曲线，就可将多项式组的所有孤立解计算出来。

八十年代初，李天岩大大改进了同伦映射的构造。他证明，对于初始线性多项式乘积方程组，则对几乎所有的系数，追随同伦映射比左数条解曲线一样可以找到多项式方程组的所有孤立解。从那时起，他继续探索求解孤立解总数大大小于其比左数的多项式方程组。这样的方程组被称之为亏损方程组。若用同伦法求解这种多项式方程组，从 $t=0$ 开始我们必须追随比左数条曲线，在 t 趋于 1 时，大多数的曲线都跑到无穷远去了，只能少数的曲线收敛，因此造成极大的浪费。

对于数值代数中最重要也是最常见的亏损多项式系统——矩阵特征值问题，李天岩与他的合作者们及学生们提出了用同伦思想求解大型矩阵所有特征值：将一个特征值为已知或易于求得的同阶矩阵与所求矩阵同伦，然后从 $t=0$ 出发数值追随同伦矩阵的特征值和特征向量曲线，而当 $t=1$ 时得到所求矩阵的特征值与特征向量。他和其韩国博士生李弘九第一个将这一思想在计算机上实现。此后他指导他的中国学生张红、李奎元、曾钟钢、黄良椒、从栾、金鸣等进一步完善这一算法思想与数值实现。他们成功地发展了用于实对称矩阵、一般实矩阵、以及大型稀疏矩阵特征值计算的同伦算法。即使未考虑其可并行化的优势，仅用单个处理器，对许多大规模代数特征值问题，同伦算法优于基于 *QR* 分解的标准程序。

对于一般的亏损多项式方程组，构造一个好的同伦算法依赖于初始多项式系统的有效选取。这是因为不光所求多项式方程组的每一个孤立解均来自于初始多项式方程组的某个解出发的同伦曲线，更重要的是我们希望尽可能少的同伦曲线当 t 趋于 1 时趋于无穷。最理想的构造是这两个多项式组有同样数目的“在无穷远处的零点”。近二十年来，李天岩与索耶尔（T. Sauer）、约克以及他自己的学生王筱沈、李星、高堂安等人运用代数几何的理论和方法，先后发明出选取初始多项式组的一些行之有效的方法，如随机乘积同伦法和 Cheater 同伦法。十多年来，由于伯恩希坦（D. N. Bernshtein）定理的应用，基于解个数组合计数的多面体同伦法倍受青睐。在其中，所谓的“混合体积”之计算至关重要。李天岩与他过去及现在的学生们已取得一系列令人瞩目的新成果，其详情可见他 2003 年发表在《数值分析手册》第十一卷上的长篇综述性论文“求解多项式方程组的同伦延拓法”，在多项式方程组数值解领域，李天岩无愧于其领军人之一的称号。

李天岩访问昆明时留影

李天岩在自己家的车库门前留影（2003 年由本文作者摄）

逆境拼搏

令人难以置信的是，李天岩三十五年来在学术界的卓越贡献，却是在与身体上几乎无时无刻不受到的病痛作顽强搏斗中取得的。他在台湾清华大学读本科时，绰号叫作“棍子”，除了学业成绩名列前茅外，在体育运动上也是一流的，曾任清华大学篮球校队队长和校足球队队员。但当他 1969 年赴美国马里兰大学攻读博士学位的第二年开始，就感到肾脏逐渐不好，但他依然异常用功，至 1974 年完成了八篇学术论文并取得博士学位。毕业后仅仅六个星期，发现血压竟高达 220/160 毫柱。他于 1976 年 5 月 4 日起开始了长达五年半辛苦的洗肾过程，每周三次，每次五个小时，还不包括医院往返时间。当时他的研究工作大半是在病榻上完成的。与他积极向上的精神相反，当时密西根州立大学统计系聘用的一位印度籍助理教授因肾病而沉沦，最终导致解聘。

1980 年 1 月 29 日，李天岩首次接受换肾手术，然而因排斥效应之影响，不久以失败而告终。1981 年 7 月 15 日他成功地接受了他手足情深的妹妹的一个肾脏移植，在这之后的三年内，他的身体逐渐适应，康复不少。然而好景不长，1984 年 2 月 21 日，李天岩发生中风，右半身全部麻痹，并于 4 月 26 日作了脑血管动脉瘤的大手术。在之后的七、八年，他的身体还算平静，虽无大手术，但局部麻醉的小手术却仍然不断。然而，李天岩趁此机会抓紧时机，在此数年内发展了同伦延拓求解特征值问题和多项式方程组的重要理论及方法，并培养了一批从中国大陆直接招来的博士研究生。除此之外，在此期间他除了几乎每年回台湾进行重要的系列演讲，更于 1985 年 6 月至 7 月首度访问了祖国大陆十余所大学与中国科学院研究所，给出了若干关于混沌动力系统、同伦算法专题演讲，并开始挑选接受大陆研究生，对于将数学根植于国内及提携后进不遗余力。

1993 年 1 月 25 日，李天岩在密西根州立大学讲课时，身体突然感到不适而昏倒送医，经医生诊断为脑动脉血管阻塞。其后，他以极其坚韧的毅力与无比的信念战胜了疾病。然而，从 1992 年起他就开始感到腿痛，看遍了无数的中医西医，都没有办法找出病因。后来才知道是背脊椎骨关节炎所引起，最后终于在 1995 年 5 月 30 日动了一次大手术将发炎的部位割掉。在之后的五、六年间，他的身体状况基本平静。然而进入本世纪的第一年的 5 月 2 日，他又做了一次背脊椎骨

的手术。之后腿疾虽不时困扰他，但从 2003 年渐有起色。可是，就在笔者应邀为《中国数学家传》丛书第六卷撰写“李天岩传”之时的 2003 年 6 月，李天岩再次遭遇病魔的袭击。6 月 24 日医生对他心脏动脉血管的阻塞进行了及时的治疗与处理，运用刚刚问世不久的最新医疗技术为他动脉血管安装了八个支架。他近年来勤于运动保养身体，每天要游泳一千公尺或步行二英里，身体状况比以前明显好转许多。但由于他全身是病，遍体是伤，一不小心，伤病便会“卷土重来”。最新的例子是 2010 年 6 月他在杭州开会期间，晚间在西湖边意外跌倒，血流如注，在急诊室缝了八针。几天后他绷带在身依约去了东北大学讲学。

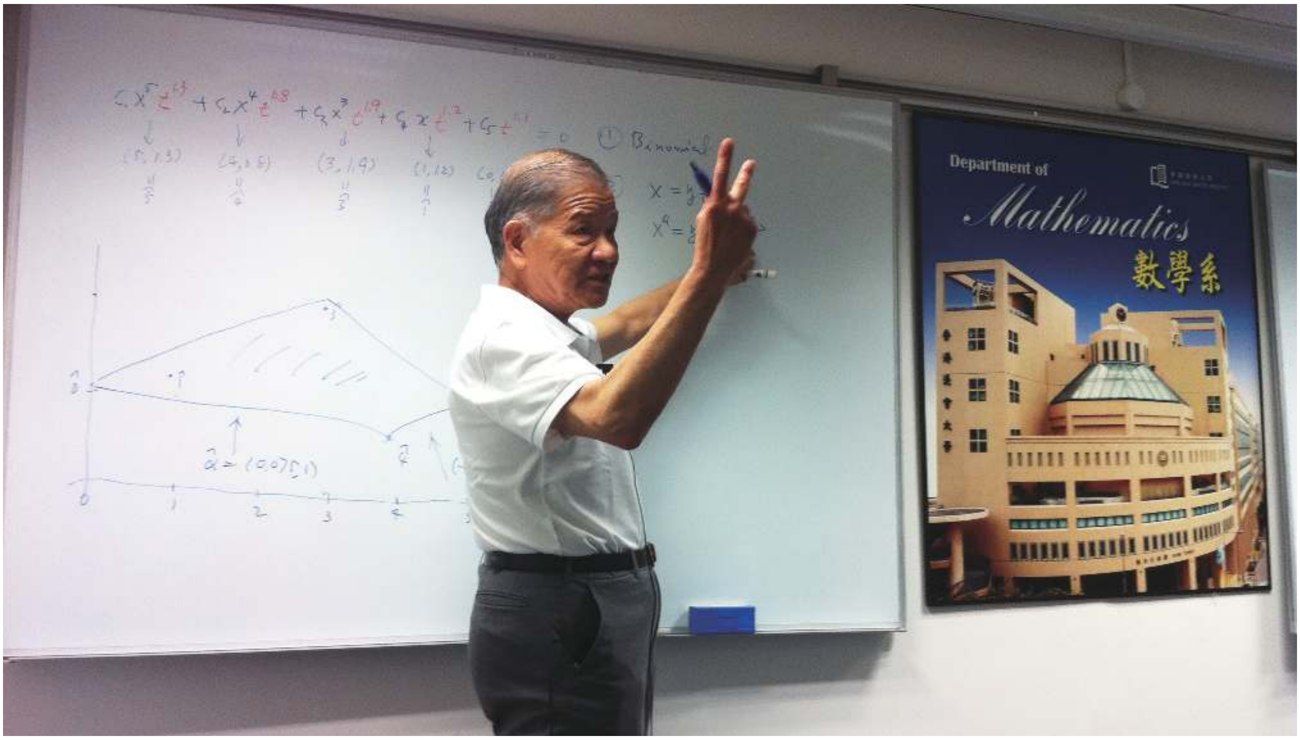
在过去的几十年中，李天岩长期遭受疾病的巨大痛苦，然而他在逆境中全力拼博，以乐观的大无畏精神一次次战胜病魔。至今，他全身麻醉的大手术已超过十次，局部麻醉手术则不计其数，全身都是开刀的伤痕。他是一个在逆境中求突破，“与病斗其乐无穷”的人，凭藉着一股坚强的毅力及终极的信念去克服一切困难，在最艰难的环境下作出了第一流的研究工作。他常对他的研究生们说，若他们在学习、研究中遇到困难，只要想到他是怎样克服病痛的巨大困难，一切困难就容易迎刃而解了。正是因为这种超人的精神，尽管直至今日依然病痛缠身，李天岩一直在从未间断过的美国国家科学基金会资助下高效多产地工作着、工作着。

李天岩 60 岁生日时和老师学生合影（二排中为博士导师 Yorke）

著名计算数学学者 Herbert Keller（右）参加了 60 岁生日聚会

治学之道

李天岩几十年如一日具有严谨的治学态度。他常认为，他的成功之道除了有象约克教授这样的好导师，其不二法门无它，就是坚持。他常常对他的学生说，自己并不聪明，而是否聪明过人其实并不重要，能将问题弄个水落石出才重要。他常强调他对问题的看法只不过是比别人多坚持了一分钟。那宝贵的一分钟可能就是造就成功之路的一分钟。一个问题，大人物解决不了，并不表示小人物也解决不了，大人物思考问题的路径也不等于解决问题的路径。“凭着一股牛劲，凡事坚持到底，绝不轻言放弃”，是他叮咛学生们的名言。他也常说读书做学问一定要作彻底的理解，尤其是作数学，一知半解地记忆表面上的逻辑过程是没有用的。他曾举例说，一个矩阵的行秩为什么会等于列秩呢？其实学过线性代数的大二学生都会证明。然而它实际上所代表的几何意义是什



2011 年 6 月李天岩教授在香港浸会大学讲学

么？物理上的涵义又是什么？从不同的角度来看这个问题时，你将会得到意想不到的结果。

李天岩对应用数学家和计算数学家的培养有独特的见解。一方面他极端看重在纯粹数学上下苦功，在理论分析上打下坚实的基础。记得当年笔者到达密西根州立大学第一天就听本系的中国同学说，要成为李教授博士研究生的一个必要条件（而非充分条件）是修过或考过卢丁（W. Rudin）的《实分析与复分析》。另一方面，他又特别强调学生们养成上机计算的好习惯，坚决反对“纸上谈兵”赵括式计算数学学习法。纵观科学发展史，许多激动人心的伟大发现起源于计算上的“好奇心”。十九世纪初，数学王子高斯曾花费大量的时间从事数值方面的计算，如数论中的质数之分布，科学计算中的最小二乘法的基本思路都可以追溯到他。上世纪下半叶，乌拉姆的蒙特卡洛法，洛伦茨的蝴蝶效应、梅的人口动力学、李天岩的同伦延拓，也无一不是“计算好奇心”催生的产儿。难怪约克在 2005 年参加完他弟子六十岁生日庆祝活动后被台湾数学界采访时语重心长地说：研究就是去发现叫人赞叹的想法，而动手计算则可能导致伟大发现。

李天岩在台湾上的大学，所以对中国高等教育中普遍存在的填鸭式教学深有体会，并深恶痛绝。他曾讲过这样的故事：一位数学研究生在博士资格考试的口试时，教授要考她证明特殊的吉洪诺夫（A. Tychonoff）定理：两个紧集的乘积也是紧的。她央求教授让她证明一般的吉洪诺夫定理：任意个数紧集之乘积也是紧的，因为她记得证明的每一个细节而不知道怎样证明更简单的两个紧集的情形。无独有偶，刚刚去世不久的俄罗斯领军数学家阿诺德（V. I. Arnold）在 2003 年一篇谈论他的老师、伟大的数学家柯尔莫果洛夫（N. Kolmogorov）的文章中，也讲到他 2002 年面试数学教授候选人时，问了一下二次型 *xy* 的符号差为几。那位已教线性代数多年并已发表几十篇论文的专家迟迟疑疑地解释道，他的电脑程序一小时可算出任何二次型的符号差，但他的人脑在十五分钟的时间内无法算出该题。

李天岩在发表于台湾《数学传播》杂志 31 卷 4 期上一篇基于在母校台湾清华大学两次讲演稿，题为“回首来时路”的文章中以颇具幽默的口吻回忆起当年大学同窗们如何像少年维特烦恼于恋爱那样对高深数学的烦恼，甚至有人差点留下“不想活下去”的遗书，藉以抨击教科书越难越好的教学方针。笔者曾听他清华学弟提到他当年成绩全班第三，但是他“回想起来，当时实在是一窍不通。”到美国求学以后他才知道，数学上的逻辑推理和对数学结构性的认知有相当大的差距。他认为抽象数学的出发点多半起始于对实际问题所建立的数学模型，

李天岩和学生摄于美国西佛罗里达大学数学系。从左至右：李奎元，李天岩，黄良椒，王筱沈，曾钟钢，丁玖

然后将解决问题的方式抽象成一般理论，以解决更普遍的同类问题。他觉得学习“高档次”的数学理论，绝对必须从低档次数学的理解出发，否则就会像上述两人那样“精通”高深理论而不能回答基于同一想法的初等问题。因此在学习一般的抽象理论之前，对原始概念的历史发展和来龙去脉要有基本的认识。否则，一开始就面对一大堆莫名其妙的抽象定义，推些莫名其妙的抽象定理，学生如坠迷雾，不知所云，只好背定义、背定理、背逻辑，应付考试。

李天岩坚决反对学生死记硬背，不求真懂。参加过他为自己学生设计的数学讨论班的历届研究生都不会忘记他对每一个报告者的基本要求：不要光讲“爱泼西龙—代尔它”语言，那仅仅是逻辑，要讲思想，要讲基本思想（basic idea）。他对弟子们生活上关心，学问上严厉。笔者记忆犹新的是某一学期“李天岩小组讨论班”第一周，他在“训话”中以幽默的口吻谆谆告诫大家：“我不希望你们今后在麦当劳快餐店端盘子！”在讨论班，他要求学生在演示证明一个一般定理时，要先将具体的或特殊的情形解释清楚，坚决反对一开始就在抽象的概念里捉迷藏。几乎所有学生都因讲得不得要领而被他“挂黑板”，但“平时多流汗，战时少流血”的学生们后来大都成为会讲课的大学教授。李天岩坚信，若是真正了解一门学科，就会讲得连高中生也能听得懂。他这样认为，也用这样的准则来训练他的学生，同时也是这样身体力行。他在世界各地应邀所做的数学演讲总是从最初等的概念入手，用最直观的观察引导，听众无不被他深入浅出的生动报告所折服。1986 年，当刚到美国攻读博士学位的笔者在他办公室里准备给他报告菲尔茨奖得主斯梅尔（Stephen Smale）的学生、美国康奈尔大学数学系雷列加（J. Renegar）教授的论文“关于逐片线性道路追踪算法平均情形的复杂性理论”之时，他的第一句话便是“你要把我当成笨蛋，我什么也不知道。”当时笔者十分纳闷，自己慕名而来求学的堂堂大教授，居然“什么也不知道”。正因为面对的是一个“什么也不知道”的数学家，他的弟子们学会了什么是研究数学，什么是讲数学。

正因为李天岩独特的研究方法和讲课艺术，他不光获得密西根州立大学的杰出教授奖和杰出教学奖，也影响了他一批又一批的研究生在研究与教学上齐头并进。他的治学之道对一个数学家的成长具有典型的启发性。

2010 年 8 月 17 日写于美国哈蒂斯堡

2011 年 5 月 11 日定稿于香港

LINK 相关链接

回首来时路

李天岩

当初第一志愿考进位于新竹的清华大学数学系，当然号称是因为对数学感兴趣。其实中学时代对数学的所谓兴趣多半也只是建立在钻研和解决数学难题时所得到的‘快感’上吧。有时能解出些“难题征答”性的题目，得意的不得了。没想到一进了大学，差点就被初等微积分里那些莫名其妙的 ε-δ 语言给逼疯了。记得那时同寝室的另三位室友都是大一数学系的新生。那时我们多在晚间 11 点左右就熄灯就寝。但是常常在半夜一、二点钟时，发现大家都被那些鬼 ε-δ 的抽象概念搞得睡不着觉。记得我隔壁书桌的一位同学常常在打草稿写“遗书”，遗书的内容基本上是什么都搞不懂，不知怎么办好，不想活下去了，等等。

后来到了美国才知道，我们并不是天字第一号笨蛋。

李天岩就读的位于台湾新竹的清华大学

LINK 相关链接

好比说，在我目前任教的密西根州立大学，系里根本禁止在一、二年级初等微积分的课程里灌输学生这些 ε-δ 的抽象概念。其实在牛顿、莱布尼兹发明微积分时，‘逼近’、‘渐近’、‘无穷小’的概念并没有非常严格的定义。也只有到 19 世纪中期，数学界的“领导们”才开始对所有数学概念要求严格地定义（rigorously defined）。比如说，请告诉我到底什么是“1”？什么是“2”？为什么 1 + 1 = 2？（在这个意义上，到底什么是“+”？）若在初等微积分入门那个阶段就要用 ε-δ 去严格刻画逼近、渐近、无穷等抽象概念，就好像在小学生学基本算术加乘法之前，要求他们先严格定义什么是“1”，什么是“2”什么的。果真如此，少年维特对数学的烦恼肯定要提早发生了，不是吗？中学时代对数学难题的钻研根本上和数学概念上的所谓直觉（intuition）没啥关系，因此大家都好像严重忽略在引入抽象概念之前，先介绍直觉的重要性。我也是到美国以后才知道，数学上的逻辑推理和对数学结构性的认知有相当大的差距。

记得有次在南京时，和一位南京大学数学系的年轻教授午餐，这位教授那时并没有喝过洋墨水，他听说东方学生到美国读研究生一、二年级时成绩多半杰出，可是过了选课期到研究作论文的阶段就逐渐落后老美了，不知是真是假？其实这位教授所听说的大致正确。一般较用功的东方学生，在国内受教育时大都下很大功夫在记忆数学上的逻辑推论：这一步为什么导致了下一步，下一步为什么再

李天岩攻读博士的马里兰大学数学系

LINK 相关链接

推出了下一步；等等；然后再把所有习题都拿来钻一钻。在这种情况下，一般的笔试是很难考倒这帮学生的。

可是美国学生所不同的是，在他们早期的数学教育里却已很普遍的在问：它想表达什么（What it says）？以及它为什么可行（Why it works）？这些问题在笔试时几乎不太可能遇到。但在做研究时却是非常非常重要。我有一个台湾来的博士生，有次我请他把我在专题讨论班里讲过的一篇很重要、很复杂的文章用他自己的数学语言仔细写出来。从他后来交来的报告里，可以看出他的确下了很大的功夫把文章中被省略的逻辑细节严密地补足了。我把他的报告改后还给他，然后他又交了来，我又改了改再还给他。他再交来时，我请他告诉我，这篇文章到底在干什么？没想到他却一个字都答不上来。其实在一般的数学研究论文里，我们最常见的是作者用些莫名其妙的定义推些最一般性的定理。我们若只是非常用力地去了解它的逻辑推理，而轻易忽略去搞清楚作者脑袋瓜里到底在想些什么，那么我们对文章的了解将是非常有限，也很难由此做出杰出的工作。非常遗憾的是，极多数重要论文的作者都不会轻易把他们脑袋瓜子里真正的观点和想法花功夫写出来。你必须自己去问这些问题，自己去追求它的答案。

我经常举的一个例子是，我对一个矩阵的‘行秩’和‘列秩’为什么会相等的好奇。其实在任何基本的线性代数书里，我们都可以找到它们为什么相等的证明。但是从那些逻辑推理的外表，我实在看不出它们为什么会巧合地相等。在我真正了解到它们为什么会一样的过程中，这个好奇却帮我了解了许多广义逆矩阵的几何意义。又比方说，上过大学数学的都会矩阵运算里的高斯消去法，对吧？有一次我问台湾南部一所大学数学系的一位教授（这位教授在大学念书时，好像还赢过台湾线性代数比赛的“银牌”）高斯消去法的几何意义到底是什么？他说，这年头谁要去想这种问题？！语言简单的东西（好比‘拓扑熵’）懂不懂好像不那么重要。管它懂不懂老子照样可以挤出在 SCI 杂志发表的文章。可是遇到较复杂的语言时，好比近代代数几何里的基本语言‘scheme’，若对它整个的来龙去脉缺乏一个整体性的理解，一般人恐怕连定义都无法轻易记忆。记得我在自修交换代数时，遇到所谓局部环（local ring），当时只是好奇，为什么称它局部环？从它定义（只有唯一的一个 maximal ideal 的环）的表面实在看不出凭什么称它为‘局部环’。可是在我试图真正去了解为什么要称它局部环的过程里，这个好奇却帮我了解了许多代数几何上的概念。

这一路过来，这种对数学的‘好奇’以及对这些‘好奇’问题答案的追逐的确给我带来对研读数学的极大乐趣。在这里我想强调的是，对这些好奇的追寻（chase）毫无争取在 SCI 的期刊上发表论文的意图。

当初去马里兰大学（University of Maryland）读研究生是一个巧合，遇到后来的指导教授约克（James A. Yorke）更是一个极大的巧合。记得约克教授头一次看了我当初在清华念书的档案时，显然是吃了一惊。以为我是那路杀来的高手，功力无比深厚。现在回想起来那个档案里所记录的实在是有极大的误导性（misleading；英文这字有时是指人欺诈的礼貌性用词）。看那！我在念大二的三高时，高等微积分用的是 Apostol 的数学分析；高等几何用的是 Halmos 的有限维向量空间；高等代数用的是 N. Jacobson 的抽象代数讲义；微分方程用的是 Coddington 的常微分方程导读。大三念近世代数时，用的是 van der Waerden 的现代代数；念复变函数论用的是 Ahlfors 的复分析。另外，大三还念了拓扑学、数论；大四念了泛函分析、李群、实变函数论（用的是 Royden 的实分析），微分几何(用的是 Hicks 的微分几何讲义)。这些课不但都修过，而且成绩都不错（大四修的课都在 90 分以上）。在表面上看来，这个记录的确是相当牛了，不是吗？可是今天把那些教科书拿出来翻一翻，实在很难想象当初是怎么混过来的。好比说，Ahlfors 那本书的水平不低。它决不适合做初学复变数函数论的教科书。记得我们大二学高等微积分时，教授根本就跳过了线积分（现在想来，大概根本的原因还在于 Apostol 那本书过于高深，教授不可能教完书里大部分的材料。）可这本教材基本上是假设阁下已经清楚地掌握了所谓的复数面上的线积分（contour integral）。若是对线积分都不甚了解，我很难想象当时怎么去理解柯西积分定理（Cauchy integral theorem）等基本概念。那时的老师们好像都觉得能用愈深的教科书（其实每本书都号称是‘self contained’即自成一体）学生自然就会变得‘高档次’吧！

其实抽象数学的出发点多半起始于对实际问题所建立的数学模式，然后将解决问题的方式建立理论，再抽象化，希望能覆盖更一般性的同类问题。因此在学习较高深的抽象数学理论之前，多多少少要对最原始的出发点和工具有

LINK 相关链接

些基本的认识。要不然，若是一开始就搞些莫名其妙的抽象定义，推些莫名其妙的抽象定理，学生根本无法知道到底是在干些什么。可是为了考试过关，只好跟着背定义，背定理，背逻辑，一团混战。对基础数学实质上的认识真是微乎其微。我们那时的学习环境大致如此。

虽然我那时档案里的记录极为出众，但如今回想起来当时实际上可以说是一窍不通，不知自己到底在干什么。念书时背定理，背逻辑最多只能应付考试。毕业服完兵役以后，绝大多数以前所学当然都忘了。老实说，在出国前，我真想放弃数学，不干算了。后来在美遇到了导师约克教授。从他那里，我才慢慢对学数学和研究数学有了些初步的认识，而这些认识大大助长了我以后学习数学的视野和方式。需要强调的是，学习'高档次'的数学理论，绝对必须从对'低档次'数学的理解出发。

我常常觉得老天在我数学之旅上实在是给了我太大的幸运。记得那年在凯洛格（Bruce Kellogg）教授所开非线性数值分析的课上听他讲微分拓扑学家赫希（M. Hirsch）用微分拓扑的反证法证明布劳威尔不动点（Brouwer fixed point）的存在定理。其实我觉得只要把证明稍稍做些变动（这个变动大概不超过原来证明的百分之一吧），就可以轻易地把反证法（"若不动点不存在，则天下会大乱"什么的）变成一个构造型方法，即找这些不动点的实际方法。后来和约克教授提起了我的看法。记得那时摆在我面前的研究课题有好几个，没想到导师却坚持要我全力以赴地去实践这个算法的构想。老实说，那时我心里最不想做的就是这一个问题。首先，我那时根本不懂计算（连基本的编程语言都不会）。要知道我们那时并没有什么工作站、手提电脑什么的，所有计算程式都必须打在卡片上（一行一张卡），然后把它们送去计算机中心，他们用学校仅有的二台机器替你跑程式。剩下来的就看你的运气了，有时二十分钟之后就有结果。有时要等二、三小时甚至更长。还有一个不想做这个题目的理由：那时总以为数学研究总要证些定理什么的，搞些 ε-δ 这些玩意儿，我对布劳威尔不动点算点的构想即使可以顺利运作，好像也无法挤出什么鬼定理来。不管怎样吧，在我们那个年代，好像老师叫你做什么，你照着做就是了。虽然我自己心中极不热衷这个题目，但是从里到外都毫无排斥的意识。

记得我是在 1974 年 1 月中开始着手这个问题。至于写程式，甚至打卡什么的，都只好边做边学。几乎每天在清晨 6 点半就送卡片去计算机中心，然后就是等结果，改程式，等结果，改程式，循环进行，常常弄到半夜 12 点多。每次等到的结果都因程式或算法的错误，基本上拿到的都是一大叠废纸。后来，去计算机中心拿（或等）一叠废纸好像已经变得习以为常了。记得是 3 月 15 日那天早上，我到计算机中心所拿到的结果却只有薄薄的几页。起先心中颇为疑惑：今天怎么回事？计算中心缺纸了吗？没想到打开一看，居然算出不动点来了！那可是一个 100 维（100 dimension）的问题啊！

李天岩的博士导师 Yorke 教授（左）

LINK 相关链接

说实在的，我那时心中并没有很大的成就感。这就好像老师要我去扫厕所，我终于把厕所打扫干净了，如是而已。没想到，大约在一个月后，约克教授在《美国数学学会通讯》上看到一个将在当年 6 月 26 至 28 日在南卡罗来那州的 Clemson 大学举行的一个“不动点计算和应用国际会议”的信息。完全出乎我们意料的是，从 1967 年开始就有一大群人在研究布劳威尔不动点的算法，这些人多半是出自名校经济系、商学院、工业工程等系所的教授，因为许多经济学里的模式的均衡点（Equilibrium）都可以用布劳威尔不动点的方式来表达，因此其运算变成了实际应用中的一个重要工具。这样一个国际会议显然邀请了那个门派所有的‘大老’和‘天王’们去做报告。约克教授得知这个会议的讯息之后，立刻打电话给会议的主办人 S. Karamardian，告诉他我们有一个新的算法。当时这位主办人也只是半信半疑地勉强答应提供我们两张来回机票。后来我和凯洛格教授一起参加了那个国际会议。我们在那里居然一鸣惊人。后来耶鲁大学经济系的讲座教授 H. Scarf（他是 1967 年最先提出布劳威尔不动点算法的开山祖师爷）在大会论文集的序言里指出：参会人员惊奇地知道了凯洛格 - 李 - 约克的开创性工作，他们的方法并不是用传统的组合数学技巧，而是用了微分拓扑的方法。

附带一提的是，我们算法中所引用的微分拓扑概念，后来在解非线性问题数值计算的同伦算法中起了革命性的作用。

前一阵子，我在美国一个期刊上读到一篇成功企业家在退休后所写的感言。其中让我一直无法忘却的一句话是：人们必须对幸运有所准备（One must prepare to be lucky）。回想当初我在为不动点计算奋斗时，如果像我曾经接触过的一些学生一样总是在拖宕，躲闪，自己骗自己，或拒绝干活，那这个从天上掉下来的‘万年火龟’不是就轻易擦身而过了吗?

有一次和约克教授闲聊起关于智商的事。一般来说，他并不太看重智商的高低。记得那时他说，“加州伯克莱大学那些人根据书面定义来看是高智商的，但你很难相信这些家伙在做一些多么无聊的问题。我们要通过选择正确的问题来超越他们 20 个智商点。”这些话虽然略显邪门，但是这些年来，每次遇到该选什么研究题目时，我总会想起他这些话。回想当初若给我一个选择，我绝不会拼老命去算那些不动点。那时心里真正想搞的倒是在偏微分方程领域里相当时髦的单调算子（Monotone Operator），当时许多大腕人物（比如 Hartman, Stampacchia, Minty, 老 Lions）都在搞那一套。可是现在看来，那个时期单调算子领域里的工作，几乎没有一个里程碑性的成果能够保留到今天。

有一次和波兰科学院院士 A.Lasota 教授闲聊（他现在已过世），记得他当时说：“有人可以解决一个无聊的问题而获得费尔兹奖。”后来我拿这句话去征求约克教授意见，他完全同意这个说法。我也曾向 1966 年费尔兹奖得主斯梅尔（Steve Smale）教授提起这句话，他当时只是笑笑，好像并没有反对。是的，阁下解得出天下武林高手都解不出的问题，那您当然是武林第一高手。请问阁下给武林到底留下什么？是“九阴真经”呢？还是“归元秘籍”呢?

这些年来，我个人曾正面接触过一些数学界的顶尖高手，但是若谈到判断研究题目意义的本领，约克教授在这方面的功力的确深厚，绝不输那些“顶尖高手”。遇到他也许是我一生中最大的幸运吧！

我离开大学学习生活已经 40 多年了。有时常常想，若是重新再给我一次学习的机会，我将做什么，怎么做？但是正如我中学时看过的一场由华伦比提和娜妲丽华领衔主演的电影“天涯何处无芳草”中所提的：“没有人能使时光倒流，草原再绿，花卉再放。只有在剩余部分，争取力量！”重新给我一次机会的事只是幻想吧。

我希望我的经历能给大家在数学研究、学习、甚至教学上有所启发。

2011 年 6 月修改于香港

我国少数民族生活中的数学文化

张维忠

我国少数民族生活中蕴藏着丰富的数学文化，它们主要表现在建筑、服饰、绘画、计量单位及天文历法、宗教等方面，不同的民族因其地理环境和历史发展过程不同而具有不同的数学文化特征，使之成为具有自己特色的文化现象，这些特征体现了数学文化随着民族的产生、生存、进步的进程而发生和发展。正如曾任国际数学教育委员会秘书长的Howson教授所言："不管是发达国家还是发展中国家的大多数人民，民族数学对于他们一生的需要和应用是必不可少的。"[1] 本文将对国内近20年民族数学文化研究做出综述，这不仅能让人们感受到民族数学文化的魅力，而且民族数学文化的进一步挖掘会使我们数学的教与学变得更加丰富多彩。

1 维吾尔族人生活中的数学文化

早在公元9世纪，在吸收我国中原文化、阿拉伯和印度文明的优秀文化基础上，具有悠久历史的维吾尔族人创造出了自己的数学文化，它广泛体现在新疆各民族的现实生活与实践当中。比如新疆做馕的土炉灶形状"托努尔"（Tonur）或"塔努尔"（Tanur）就是典型的台体，清真寺庙建筑、吐鲁番的高昌高塔、维吾尔族人的坟墓地建筑、乌鲁木齐二道桥国际大巴扎等都包含着丰富多彩的多面体、旋转体和球体等立体图形，砍土镘(Ketman，用来挖地的工具)、坎儿井(Kariz)水道工程、窑洞房（Kemer oy）、阿拉巴(Araba或Arava或Harva)车轮等也都蕴藏着丰富的几何知识。

此外，维吾尔民族的传统服饰、家庭装饰品以及手工工艺品中无处不在的几何纹样，乃至其本民族的乐器都包含着丰富的数学文化。凡此种种，不一而足[2]。

二道桥国际大巴扎

坎儿井

唐卡

2 藏族人生活中的数学文化

众多学者对藏族特有的算术、代数、几何在其传统生活中的体现进行了分析探讨，诸如林林总总的记数方法与藏文数字，三阶纵横图与数字喜好，西藏地名与数字，藏族文学作品与数字，节日、丧葬、名字、建筑等等。对藏族古代的对称图形进行的研究，反映出藏族先民很早就有了对称的观念，及对对称图形的喜爱。现有研究表明在唐卡、壁画的制作过程中采用了大量轴对称、中心对称、等腰三角形等，甚至在现实生活中广泛使用了“三角形的稳定性”等数学原理。藏族佛教中充满了函数思想和数理逻辑。黄明信的《西藏的天文历算》以及黄明信、陈久金的《藏历的原理与实践》, 运用了大量的代数、三角等数学专业知识。从中可以看出藏族丰富的数学文化知识 [3-7]。藏族人生活中的数学文化更多地体现在藏族与汉族的文化交流和互通中。比如，由汉族地区传入西藏的“三阶纵横图”大量存在于西藏的唐卡、壁画中，且对西藏的天文、历算、藏医学、数学等产生了深远的影响，在西藏数学史上占有重要的地位。藏族九宫图来源于汉族地区的九宫图，这表明九宫算在向藏族的传播过程中出现了本土化的情况。藏族数学文化充分反映了中华民族的智慧和古代数学成就 [8]。

蒙古包

3 蒙古族人生活中的数学文化

代钦对蒙古族传统生活中的数学文化进行了挖掘。黄金比例在蒙古包、蒙古服饰及图案中多有应用：蒙古族的传统建筑——蒙古包，本身就具有黄金比例结构，至于其民族服饰制作和图案艺术创作不仅要遵循黄金比例的要求，更要符合数学的简单、对称、和谐等标准，有较高的美学价值。其中一些数字的宗教哲学意义，鹿棋盘、建筑、图案艺术等所运用的几何知识以及生活中的数学计算，也都很好地体现了数学的简洁美、对称美。这不是偶然的巧合，而是客观规律使然。在蒙古族天文历法运算的纵横图中，从 1 到 9 的每一个数字不但有运算作用，还有着哲学、宗教、天文和美学意义；在某些方面受到了各民族的数学文化影响 [9]。

4 苗族人生活中的数学文化

苗族人生活中的数学文化主要突出表现在苗族人服饰中。肖绍菊等从研究苗族服饰的过程中发现，服饰中有许多基本几何图形，如三角形、正方形、长方形、平行四边形、五边形、六边形、菱形、圆、螺旋线、星形线、玫瑰线等等。通过进一步深入访谈得知，刺绣的苗族妇女师傅们有些根本不知道什么是菱形，什么叫几何，她们是从前辈们那里学来的刺绣方法。由此可见，数学文化在苗族人民的生活中早已存在。不仅如此，他们还把这些最基本的图形通过连接、堆积、组合，又构成了复杂的纹样，如太阳纹、锯齿纹、网纹、菱形八角花、回纹、水波纹、卷蔓、鱼纹、蝶纹、龙纹等等，从而形成一道独特、亮丽的黔东南苗族服饰风景线[10]。

此外，周开瑞等对苗族十二路酒歌中历史最长、篇幅最大、内容最多、流传最广的《开亲歌》所反映的数学知识进行了探讨。主要为歌棒上的刻木记数和降聘礼过程中的算术四则运算，体现出苗族先民在很早以前就具有颇强的心算能力和一定的数学修养[11]。

苗族服饰

5 侗族人生活中的数学文化

侗族文化又称为“鼓楼文化”，不仅因为鼓楼是侗族所特有而其他民族所没有的建筑，更主要的是鼓楼是侗族古代建筑的杰出代表，是侗族的全部精神性的文化结晶，是最具有象征性的文化符号，以鼓楼为中心几乎可以统观侗族文化的全部。鼓楼建筑(包括侗族民居)属于浙江余姚县河姆渡村发现的新石器时代遗址——河姆渡文化的“干栏式”建筑。鼓楼是侗族先辈在广泛吸收其他民族建筑精华的基础上融合本民族的文化特征和理念，与自身的风格渗透、交织在一起，形成的既有完美而成熟的建筑技艺，又有浓郁的民族气息的古代建筑。鼓楼建筑雄伟、壮观，占地面积百余平方米，高数十米不等。如此高大的建筑，其整体以杉木做柱、枋，凿榫衔接，横空斜套，纵横交错，结构严谨牢固，不用一钉一铆。一般鼓楼，整栋楼自下而上每层翘檐递缩，从而构成一个等差数列。从鼓楼的楼体外形

侗族鼓楼

（或角）分主要有：六角形（银潭鼓楼）、八角形、四角形、七角形（三宝鼓楼）等，还有一些特殊形状的鼓楼，如纪堂鼓楼是下四角、上八角形。鼓楼的建造涉及三角形、多边形、多面角、扇形、勾股定理、数列、比例和三角函数等数学知识，鼓楼简直就是一部经典数学，而这部典籍是中华民族之瑰宝，她由没有文字的侗族人民像传承侗族大歌那样口传心授顽强地传承了下来，这就是鼓楼数学文化，这就是侗族数学文化。进一步的研究表明，由于侗族古老的乘法计算中 2 与 1/2 起到了关键性的作用，既克服了没有“九九表”的困难，又不陷入乘法意义中的连加运算，侗族的这些计算在鼓楼建筑中留下更多的印记，它折射出了中华民族早期的数学文化，是人类文明童年时期数学文化的结晶 [12]。

此外，欧明杰的研究表明侗族鼓楼不论是其外观或是其内部结构都蕴涵了丰富的数学知识，涉及了对称、相似、旋转、平移、数列等几何和代数的基本知识。鼓楼似乎就是一部有待于人们进一步“翻译”的古典数学。这说明侗族人们已经掌握了相当的数学知识 [13]。

傣族织物

毕摩法器：签筒、法冒、法扇

黎族黎锦

6 彝族人生活中的数学文化

彝族人生活中的数学文化主要表现在毕摩文化艺术中。彝族毕摩从事的宗教仪式活动中插枝图首当其冲，插枝法依据所从事内容形式各异，错综复杂。独具特色的各类插枝图有算术和几何方面的诸多数学思想。阿牛木支从数学角度逐一对其进行了辨析。在算术方面，其“以一而九、反本归一、以生倍数”的数理起源，特别是用数项级数求有限和的“消患仪式插枝图”及应用奇偶性确定分检竹条数目的占卜卦算等形式中的数理逻辑，是相当有趣和明晰的。在几何图形方面，净灵仪式场中的插枝图以中间小长方形为中心，四方构成了对称的几何图形，展示了数学的对称美。训导仪式中的内位核心图围成一个椭圆形，中间三种符号说明了该椭圆图形树枝数及其插枝的过程。同时，从该椭圆图中也可以看出，彝族毕摩对基本几何图形的巧妙组合能力，已达到较高的艺术境界。

祝福仪式中的插枝图构成一个矩形，让四角的四簇树枝数目分别对应相等，充分显示出对称性、均衡美和稳重感，给人以直观的平面视觉效果。彝族毕摩从事宗教活动中，都要通过插枝仪式，达到与神灵沟通的目的。从表面上看，这是属于封建迷信思想，但实质上却深深潜藏着天文、算数和几何方面的诸多科学思想。由此而来，彝族毕摩插枝仪式活动既是数码游戏网络和运算法则的简单描摹，又是各种几何图形能力的传承和延拓 [14]。

7 云南西盟佤族、德宏傣族生活中的数学文化

余开龙等及周长军等分别对西盟佤族及德宏傣族的数学进行了调查，分析了佤族、傣族数的概念和构造规律，生活中运用的长度、等计量单位和加减运算，在傣族的数的进位制中，有二进制、三进制、六进制、十二进制、二十进制、四十进制等等，但十进制与汉族一样被各民族广泛应用。佤族、傣族生活中的数学文化主要是通过建筑、服饰、餐具等上所反映的几何知识，其主要以对实体的再现为主 [15-16]。

8 黎族数学文化

王奋平与陈颖树通过对海南黎族数和度量衡（黎族的结绳、刻木记数的方法一直延用至解放前夕）；历法（由于海南岛黎族聚居的南部地区属于热带气候，四季不分明，一年中随时都可耕种，24 节气是中国古代以长安（今西安市）地区的气候特点为标准制定的气候变换规律，对地处热带的黎族同胞影响很小，季节只划分为“热月”和“冷月”）；数的进制（黎族人民在收割水稻时把两把水稻放在一起成为“一束”，还有数量计算单位“部”和“攒”之间的关系，“二部”为“一攒”等）；几何知识（黎族同胞的生产、生活中很多地方都体现出对几何知识的应用，如黎锦图案、纹面图案、新石器时代的石器形状等）等方面的研究探讨了黎族数学文化 [17]。

9 其它少数民族生活中的数学文化

水族作为一个民族，有着自己的文化。在他们的风俗习惯、语言和民间工艺中反映出了数学文化。水族中的原始数学概念就反映在流传于民间的水族古歌，水语系统具有一套较为完整的自然数计数词汇，最高计数单位可达“万万”，但无“亿”这一词汇。水族的铜鼓、古墓、民间工艺品等上有着丰富的几何图形 [18]。

布依族数学文化随着民族的产生、生存、进步的进程而发生和发展，它找到了本民族民间故事、民间歌谣等作为传承的载体，显示了顽强的生命力。充满概率论原理的鸡骨占卜，比汉民族商代烧灼龟甲或牛、羊、鹿等动物的肩胛骨得兆更为简便易行，是布依族先祖的智慧结晶 [19]。

吴志丹对鄂伦春族文化中呈现出来的数学倪端进行了数学文化的初步整理和探讨，内容包括：几何图形、日期计算、计数计量方法以及数学在建筑、狩猎、绘制地图中的简单运用，并揭示出这些数学文化建构与该民族的生存关系 [20]。此外，景颇族、土家族等富有特色的少数民族锦缎中也蕴含着丰富的几何图形等等。

参考文献

1. 张奠宙，丁尔升，李秉彝等编译 . 国际展望：九十年代的数学教育 . 上海教育出版社 . 1990: 81-82.

2. 阿力木 • 阿不力克木 . 多元文化整合数学教育理论 . 数学教育学报 , 2010，19(4): 31-35.

3. 周开瑞 , 周一勤 , 王世芳 . 藏族远古数学述略 . 西南民族学院学报，1992(3): 42-48.

4. 大罗桑朗杰，华宣积 . 藏族喜用纵横图 . 西藏大学学报，2001，16(4) : 37-42 ; 藏族古代的对称图形——雍仲符号和菱形研究 . 西藏民族学院学报 (哲学社会科学版)，2003 (6): 19-22 ; 藏族史前文化中的几何图形 . 西

藏大学学报，2003，18(1): 28-34.

5. 王琼 . 藏族传统生活中的数字文化 . 西藏大学学报，2007(2): 39-43.

6. 索朗 . 藏族传统数学初探 . 西藏研究，2008(4): 80-85.

7. 王琼，罗布 . 藏族传统文化中蕴含的数学思想 . 西藏研究，2009(1): 52-58.

8. 夏吾才让 . 论藏族历算与周边数学文化的交融. 西北民族大学学报 (自然科学版)，2005，26(1): 17-20.

9. 代钦 . 蒙古族传统生活中的数学文化 . 内蒙古师大学报 (哲学社会科学版)，1996(2): 42-47.

10. 肖绍菊 . 苗族服饰的数学因素挖掘及其数学美 . 贵州民族研究，2008(6): 106-112.

11. 周开瑞 , 周群体 , 周一勤 . 苗族《开亲歌》与数学 . 西南民族学院学报 (哲学社会科学版)，1993(5): 28-31.

12. 罗永超 . 鼓楼人类文明“童年时期”数学文化的结晶 . 数学通报，2007，46(11): 9-11; 侗族数学文化中的 2 与 1/2 及相关计算 . 凯里学院学报，2008，26(3): 13-15.

13. 欧明杰 . 侗族鼓楼中的数学知识 . 凯里学院学报，2008(3): 8-12.

14. 阿牛木支 . 试谈彝族天文学与数学之间的联系 . 凉山民族研究，1995(4): 160-164；略论彝族几何的形成 . 凉山民族研究，1996(6): 168-173；彝族毕摩插枝仪式中数学知识的应用 . 西昌学院学报 (自然科学版) 2005(4): 75-77.

15. 余开龙，李胜平，哪嘎 . 西盟佤族传统民族数学调查报告 . 思茅师范高等专科学校报，2008(2): 11-13.

16. 周长军，申玉红，杨启祥 . 云南德宏傣族文化中的数学因素调查分析 . 数学教育学报，2010，19(3): 56-59.

17. 王奋平，陈颖树 . 聚焦黎族数学文化 . 数学教育学报 2010，19(4): 70-72, 91.

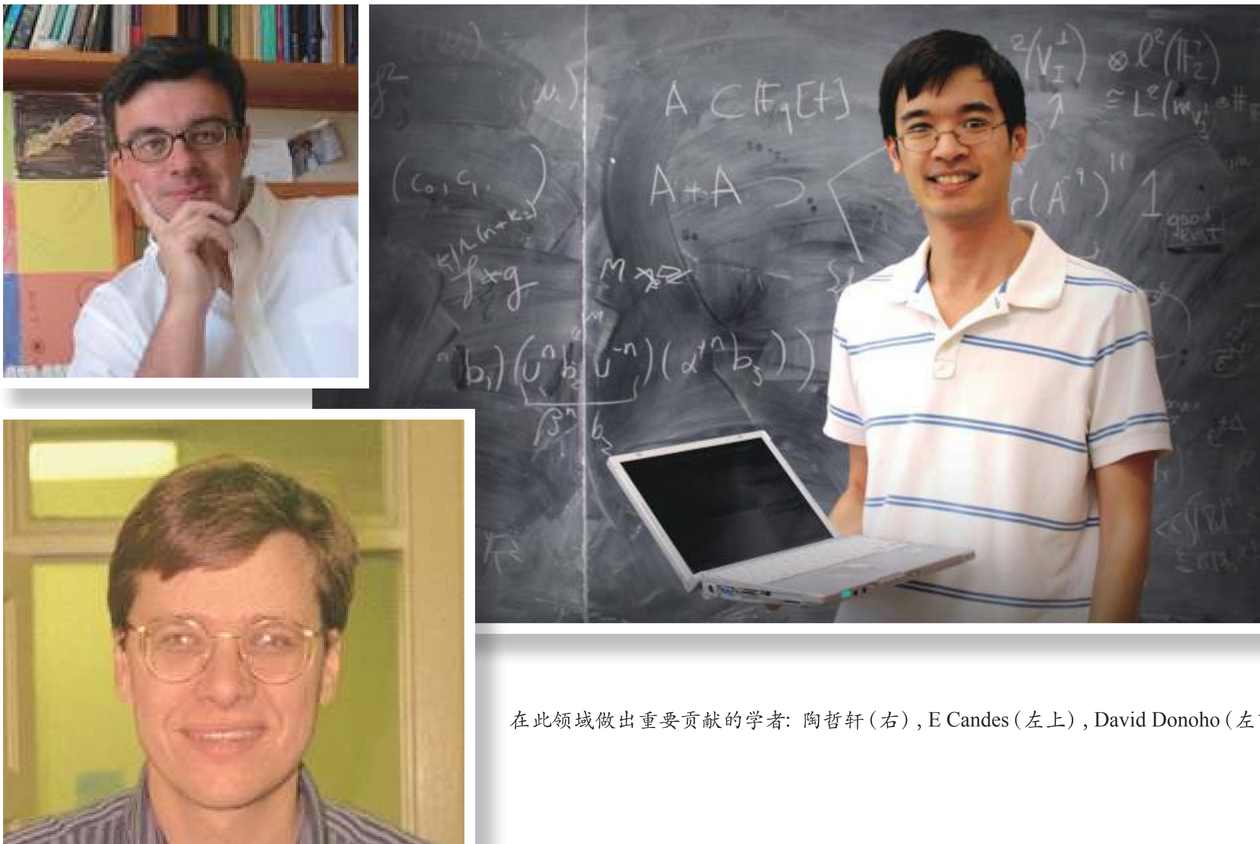
18. 吕传汉 . 文化背景与民族教育 . 贵州教育出版社，1991.

19. 张洪林，蔡金法，汪秉彝 . 数学教育的跨文化研究. 重庆大学出版社，1999.

20. 吴志丹 . 鄂伦春族生存发展与数学文化构建 . 沈阳师范大学学报 (社会科学版)，2008，32(3): 160-162.

作者介绍:

张维忠，教育学博士。现为浙江师范大学教师教育学院教授，主要研究方向为数学课程与教学论。本文的写作获得教育部 2010 年人文社会科学一般项目——“多元文化数学课程的理论与实践研究（10YJA880179）”资助。电子邮箱：lzzwz@zjnu.cn



在此领域做出重要贡献的学者：陶哲轩（右），E Candes（左上），David Donoho（左下）

压缩感知

木遥

压缩感知是近年来极为热门的研究前沿，在若干应用领域中都引起瞩目。关于这个题目，松鼠会已经翻译了两篇文章，一篇来自于压缩感知技术最初的研究者陶哲轩，一篇来自威斯康辛大学的数学家艾伦伯格（见本文后面的链接）。这两篇文章都是普及性的，但是由于作者是专业的研究人员，所以事实上行文仍然偏于晦涩。因此我不揣冒昧，在这里附上一个画蛇添足的导读，以帮助更多的读者更好了解这个新颖的研究领域在理论和实践上的意义。

压缩感知从字面上看起来，好像是数据压缩的意思，而实则出于完全不同的考虑。经典的数据压缩技术，无论是音频压缩（例如 mp3），图像压缩（例如 jpeg），视频压缩（mpeg），还是一般的编码压缩（zip），都是从数据本身的特性出发，寻找并剔除数据中隐含的冗余度，从而达到压缩的目的。这样的压缩有两个特点：第一、它是发生在数据已经被完整采集到之后；第二、它本身需要复杂的算法来完成。相较而言，解码过程反而在计算上比较简单，以音频压缩为例，压制一个 mp3 文件的计算量远大于播放（即解压缩）一个 mp3 文件的计算量。

稍加思量就会发现，这种压缩和解压缩的不对称性正好同人们的需求是相反的。在大多数情况下，采集并处理数据的设备，往往是廉价、省电、计算能力较低的便携设备，例如傻瓜相机、或者录音笔、或者遥控监视器等等。而负责

处理（即解压缩）信息的过程却反而往往在大型计算机上进行，它有更高的计算能力，也常常没有便携和省电的要求。也就是说，我们是在用廉价节能的设备来处理复杂的计算任务，而用大型高效的设备处理相对简单的计算任务。这一矛盾在某些情况下甚至会更为尖锐，例如在野外作业或者军事作业的场合，采集数据的设备往往暴露在自然环境之中，随时可能失去能源供给或者甚至部分丧失性能，在这种情况下，传统的数据采集 - 压缩 - 传输 - 解压缩的模式就基本上失效了。

压缩感知的概念就是为了解决这样的矛盾而产生的。既然采集数据之后反正要压缩掉其中的冗余度，而这个压缩过程又相对来说比较困难，那么我们为什么不直接「采集」压缩后的数据？这样采集的任务要轻得多，而且还省去了压缩的麻烦。这就是所谓的「压缩感知」，也就是说，直接感知压缩了的信息。

可是这看起来是不可能的事情。因为压缩后的数据并不是压缩前的数据的一个子集，并不是说，本来有照相机的感光器上有一千万个像素，扔掉其中八百万个，剩下的两百万个采集到的就是压缩后的图像，这样只能采集到不完整的一小块图像，有些信息被永远的丢失了而且不可能被恢复。如果要想采集很少一部分数据并且指望从这些少量数据中「解压缩」出大量信息，就需要保证：第一：这些少量的采集到的数据包含了原信号的全局信息，第二：存在一种算法能够从这些少量的数据中还原出原先的信息来。

有趣的是，在某些特定的场合，上述第一件事情是自动得到满足的。最典型的例子就是医学图像成像，例如断层扫描（CT）技术和核磁共振（MRI）技术。对这两种技术稍有了解的人都知道，这两种成像技术中，仪器所采集到的都不是直接的图像像素，而是图像经历过全局傅立叶变换后的数据。也就是说，每一个单独的数据都在某种程度上包含了全图像的信息。在这种情况下，去掉一部分采集到的数据并不会导致一部分图像信息永久的丢失（它们仍旧被包含在其它数据里）。这正是我们想要的情况。

上述第二件事就要归功于陶哲轩和坎迪斯几年前的工作了。他们的工作指出，如果假定信号（无论是图像还是声音还是其他别的种类的信号）满足某种特定的「稀疏性」，那么从这些少量的测量数据中，确实有可能还原出原始的较大的信号来，其中所需要的计算部分是一个复杂的迭代优化过程，即所谓的「L1- 最小化」算法。

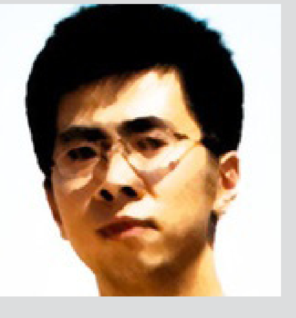
把上述两件事情放在一起，我们就能看到这种模式的优点所在。它意味着：我们可以在采集数据的时候只简单采集一部分数据（「压缩感知」），然后把复杂的部分交给数据还原的这一端来做，正好匹配了我们期望的格局。在医学图像领域里，这个方案特别有好处，因为采集数据的过程往往是对病人带来很大麻烦甚至身体伤害的过程。以 X 光断层扫描为例，众所周知 X 光辐射会对病人造成身体损害，而「压缩感知」就意味着我们可以用比经典方法少得多的辐射剂量来进行数据采集，这在医学上的意义是不言而喻的。

这一思路可以扩展到很多领域。在大量的实际问题中，我们倾向于尽量少地采集数据，或者由于客观条件所限不得不采集不完整的数据。如果这些数据和我们所希望重建的信息之间有某种全局性的变换关系，并且我们预先知道那些信息满足某种稀疏性条件，就总可以试着用类似的方式从比较少的数据中还原出比较多的信号来。到今天为止，这样的研究已经拓展地非常广泛了。

但是同样需要说明的是，这样的做法在不同的应用领域里并不总能满足上面所描述的两个条件。有的时候，第一个条件（也就是说测量到的数据包含信号的全局信息）无法得到满足，例如最传统的摄影问题，每个感光元件所感知到的都只是一小块图像而不是什么全局信息，这是由照相机的物理性质决定的。为了解决这个问题，美国莱斯（Rice）大学的一部分科学家正在试图开发一种新的摄影装置（被称为「单像素照相机」），争取用尽量少的感光元件实现尽量高分辨率的摄影。有的时候，第二个条件（也就是说有数学方法保证能够从不完整的数据中还原出信号）无法得到满足。这种时候，实践就走在了理论前面。人们已经可以在算法上实现很多数据重建的过程，但是相应的理论分析却成为了留在数学家面前的课题。

但是无论如何，压缩感知所代表的基本思路：从尽量少的数据中提取尽量多的信息，毫无疑问是一种有着极大理论和应用前景的想法。它是传统信息论的一个延伸，但是又超越了传统的压缩理论，成为了一门崭新的子分支。它从诞生之日起到现在不过五年时间，其影响却已经席卷了大半个应用科学。

作者介绍：



木遥，北京大学数学系本科毕业，美国加州大学洛杉矶分校数学博士。是本刊特约撰稿人。

扩展阅读 >>>

数字图像的压缩与恢复

校对：拟南芥、剃刀、木遥　译者：Armeny

原文作者 Jordan Ellenberg (ellenber@math.wisc.edu)，是威斯康辛大学的数学副教授。原文发表在《连线》杂志三月号上。

2009 年早春，斯坦福大学露西尔·帕卡德儿童医院的一组医生把一名两岁男孩送进磁共振成像扫描仪。这个将被我称为布赖斯的男孩身处巨洞般的金属仪器中，看上去是那么弱小无助。他被施以全身麻醉，一根弯弯曲曲的管子从他的咽喉联接到扫描仪旁的呼吸机上。十个月前，布赖斯接受了肝脏移植术，来自捐献者的部分肝脏取代了他自己的已坏死的肝脏。他的康复情况一度不错。但是，最近的实验室测试结果令人担忧，他的身体出现了问题——可能一条或者全部的两条胆管被堵住了。

帕卡德医院的儿童放射科医生施里亚斯·瓦萨纳瓦拉需要高精度的扫描结果来告诉他问题出在哪，但是这将意味着他的小病人在扫描过程中不得不保持绝对静止。哪怕布赖斯只是呼吸了一次，成像结果都会变得模糊。要避免上述情况，就需要进行足够深的麻醉让病人停止呼吸。进行一次标准的磁共振成像检测需要两分钟时间，但如果麻醉师真的让布赖斯在这么长时间里停止呼吸，那么带来的问题将远远超过他肝脏的小毛病。

不过，瓦萨纳瓦拉和他的电子工程师同事迈克尔·勒斯蒂格打算使用一种快得多的新扫描方法，名曰“压缩感知”。这种技术可能是当今应用数学界最热门的话题了。未来，它可能会改变我们寻找遥远星系的方式。而现在，这种技术使得瓦萨纳瓦拉和勒斯蒂格只需要 40 秒就可以采集到精确重建布赖斯肝脏图像所需的数据。

压缩感知的发现纯属偶然。2004 年 2 月，伊曼纽尔·坎迪斯正在自己的电脑上看着 Shepp-Logan 图像（译注：这是医学图像处理领域用来进行仿真测试的标准模拟图像，由一些大大小小的椭圆模拟生物器官）打发时间。这幅通常被计算机科学家和工程师用于测试成像算法的标准图像，看起来就像《第三类接触》里那个搞笑地将眉毛扬起的外星人。坎迪斯，斯坦福大学教授，曾在加州理工学院工作过，打算用一个严重失真的模型图像作为磁共振成像仪不能精确扫描而产生的非清晰图像来进行实验。他想到一种名为 L1，范数极小化的数学技术可能有助于清除小部分斑痕。他按下一个键，算法运行起来了。

坎迪斯希望屏幕上的模型图像变得稍微清晰一些。但是，他突然发现用残缺的数据渲染出来的图像是那么细腻完美，对每个细节而言都是如此，这简直就像变魔术一样。太不可思议了。“这就好像你给了我十位银行账号的前三位，然后我能够猜出接下来的七位数字。”他尝试在不同类型的模型图像上重新进行这个实验，结果都非常好。

在博士后贾斯廷·龙伯格的帮助下，坎迪斯提出了一个粗略的理论。之后，他在黑板上向加州大学洛杉矶分校

没经过处理的图（左）和经过处理的图（右）

的数学家陶哲轩介绍了自己的理论。坎迪斯在结束讨论离开的时候觉得陶哲轩对此持怀疑态度，毕竟，图像清晰度的提高也太离谱了。然而，第二天晚上，陶哲轩给坎迪斯送去关于他们之前讨论的问题的一叠笔记。这叠笔记为他们共同发表的第一篇论文奠定了基础。在随后的两年中，他们写了更多文章。

上面介绍的是压缩感知技术的开端，这个数学界的全新领域改变了人们处理大规模数据集的方式。仅仅六年时光，它为上千篇论文提供了灵感，吸引了数百万美元的联邦基金。2006 年，坎迪斯在这一领域内的工作为他赢得了奖金值 50 万美元的沃特曼奖，这是美国国家科学基金授予研究者的最高荣誉。其原因是显而易见的。想象一下，磁共振成像仪可以在几秒钟的时间里生成原本需要花费一个小时才能生成的图像；军用软件截获敌方通信的能力得到极大加强；传感器能够解析遥远星际的无线电波。突然之间，数据的采集、操作以及解析都变得容易了。

压缩感知的原理是这样的：你有一张图片，假设是总统的肾脏图片，这不是关键。图片由一百万个像素构成。对传统成像来说，你不得不进行一百万次量度。而采用压缩感知技术，你只需要量度一小部分，好比说从图像的不同部分随机抽取十万个像素。从这里开始，有大量的实际上是无穷多的方式填充那剩余的九十万个像素点。

寻找那个唯一正确的表示方式的关键在于一种叫稀疏度的概念。所谓稀疏度，是描述图像的复杂性或者其中所缺的一种数学方法。一幅由少数几个简单、可理解的元素（例如色块或者波浪线构成的图片）是稀疏的；满屏随机、散乱的点阵则不是稀疏的。原来在无限多的可能性中，最简单、最稀疏的那幅图像往往就是正解，至少很接近正解。

但是，怎样进行数字运算，才能快速获得最稀疏的图像呢？分析所有可能的情况太费时间。然而，坎迪斯和陶哲轩知道最稀疏的图像是用最少的成分构成的，并且，他们可以用 L1 范数极小化技术迅速找到它。

这样，在输入不完整的图像后，算法开始试着用大色块来填充空白区。如果有一团绿色的像素点聚集在一起，算法可能会用一个大的绿色矩形填充它们之间的空间；而如果是一团黄色的像素点，那么就用黄色的矩形来填充。在不同颜色交错散布的区域，算法会使用越来越小的矩形或其他形状填充各种颜色之间的空间。算法会重复这样的过程，最终，得到一幅由最少的可能的色块构成的图像，它的一百万像素都已被彩色填满。

并不能绝对保证这样的图像就是最稀疏的，或者正是你所试图重建的那个。但是坎迪斯和陶哲轩已经从数学上证明了，它的错误率是无穷小的。算法运行可能还是需要几个小时，但是，让电脑多跑一个小时，总好过让孩子在额外的一分钟里停止呼吸。

压缩感知已经产生了令人惊叹的科学影响。这是因为每一个有趣的信号都是稀疏的，只要你能够正确定义它的稀疏性。例如，钢琴和弦的乐音是一小组不超过五个纯音符的组合。在所演奏的音频中，只有少部分频率包含有效的音乐信息，而其余大部分频段是一片无声地带。因此，你可以用压缩感知技术从“欠采样”的老旧唱片中重建出当时的乐章，而不用担心失去了由特定频率构成的声波的信息。只需要你手头的材料，就可以用 L1 范数极小化法以稀疏方式填补空白，从而获得与原音一般无二的旋律。

带着建筑师式的眼睛，顶着略显蓬松的头发，坎迪斯散发着时尚极客的气息。这个 39 岁的法国人语气温和，但是面对他认为不达标的事情绝不妥协。“不，不，他说的没有道理。”当我提到压缩感知领域某个和他有些观点有着细小差别的专家的工作时，他立刻说，“不，不，不，不。那没有道理，没道理，是错的。”

坎迪斯曾经预见，将来会有大量应用技术是以他的研究成果作为理论基础的。他举例说道，在未来，这项技术不会仅仅用在磁共振成像仪上。例如，数码相机收集了大量信息，然后压缩图像。但是，至少在压缩感知技术可用的情况





下，压缩是一种极大的浪费。如果你的相机记录了大量的数据，却在压缩时丢弃了其中的 90%，那么为什么不在一开始就只记录 10% 的数据从而节省电池电量和内存？对于您的孩子的数码快照，费电可能没什么大不了，你只要插上电源为相机充电就可以了。“但是，当废电池多到可以环绕木星，”坎迪斯说，“结果就不是那么简单了”。同样，如果你希望自己的相机能够拍摄万亿像素的照片而不是几百万像素，你就必须使用压缩感知技术。

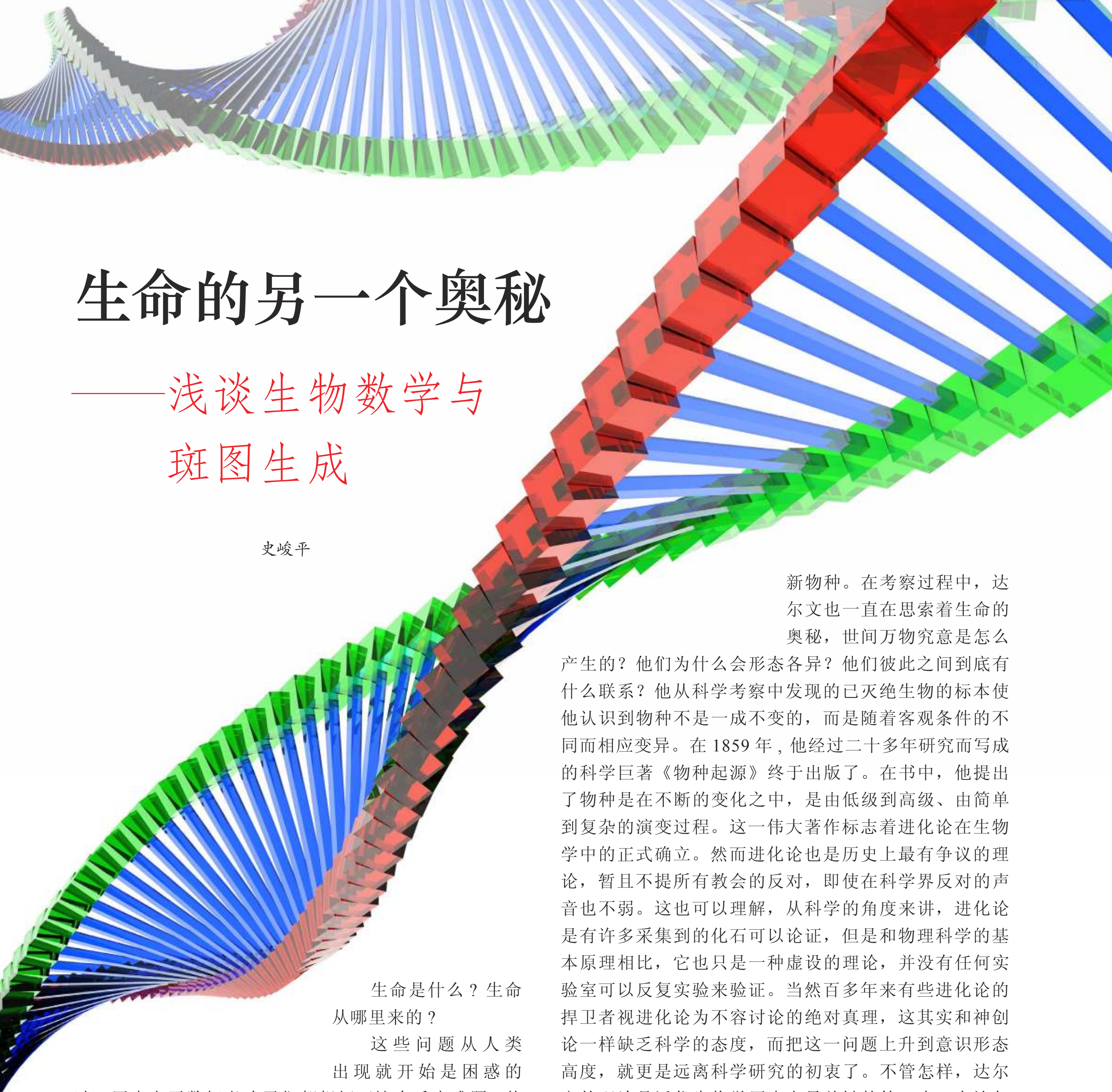
从信息的小样本中收集有用数据的能力也引起了军方的重视：比如，敌方通信可能从一个频率跳到另一个频率。但是，还没有一种硬件设备能以足够快的速度扫描整个频域。但是无论在什么情况下，对手的信号都是稀疏的，是由频段内极少数的某种简单信号构成的，出现在一些相对较小却未知的频段。这意味着压缩感知可以用来从“噼啵”声中区分来自任意波段的敌人的交谈。所以，美国国防部先进计划研究署正在支持压缩感知技术的研究就不足为奇了。

压缩感知不仅可以用于解决现在的技术难题。将来，它还将帮助我们处理已存储的大量信息。每天，全世界都要产生数不清的数据，我们希望这些数据安全、有效、可恢复地保存起来。目前，我们大部分的视听信息都是用复杂的压缩格式存储起来的。如果有一天，这种格式被淘汰了，你不得不进行痛苦的格式转换。但是坎迪斯相信，在拥有压缩感知技术的未来，对于采用高成本红外技术拍摄的天文图像，只需要拍摄到 20%的像素就可以了。因为我们一开始就只记录了极少部分的数据，所以不需要再进行压缩。那么我们只需要逐步改进数据的解析算法，而不是数据的压缩算法，就可以精确地恢复出原始图像了。

上面说的都是将来的事情。今天，压缩感知技术已经改写了我们获取医学信息的方式。在 GE 医疗集团的参与下，威斯康辛大学的一个研究小组正在把压缩感知技术与 HYPR 和 VIPR 技术结合，以提高特定种类磁共振扫描的速度，在某种情况下可以达到原来的几千倍。GE 医疗集团还在实验一种新的方法，有希望利用压缩感知技术大大改善对癌症病人代谢动力学的观测。同时，帕卡德医院应用了压缩感知技术，使磁共振成像仪的图像记录速度提升为传统扫描仪的三倍。

这对于两岁的布赖斯来说恰好够用。瓦萨纳瓦拉在控制室发出工作信号，麻醉师给男孩注射了一点镇静剂，然后关掉了呼吸机。男孩的呼吸立刻停止了。瓦萨纳瓦拉开始扫描，而麻醉师监视着布赖斯的心率和血氧水平。40 秒钟之后，扫描结束，布赖斯没有出现明显的缺氧情况。当天晚些时候，压缩感知算法从粗略的扫描中生成了清晰的图像，能让瓦萨纳瓦拉看清双侧胆管的堵塞情况。一名介入放射科医生将一根弯曲的导线依次插入双侧胆管中，轻轻清除淤塞，并为男孩安装了让胆汁恰当流出的细小导管。正是数学与医学的完美结合，才使得布赖斯的检测结果又恢复了正常。

注：本文曾刊于科学松鼠会网站



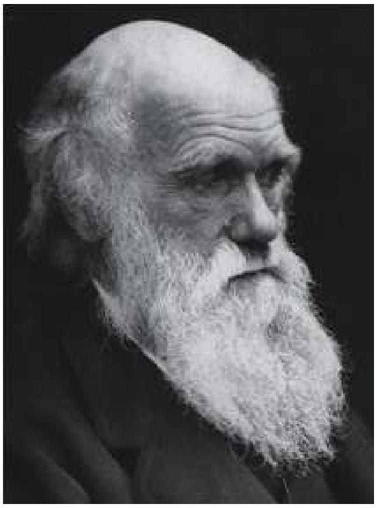
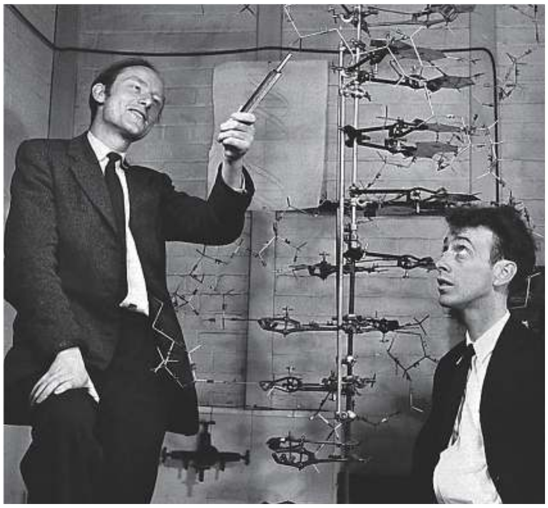
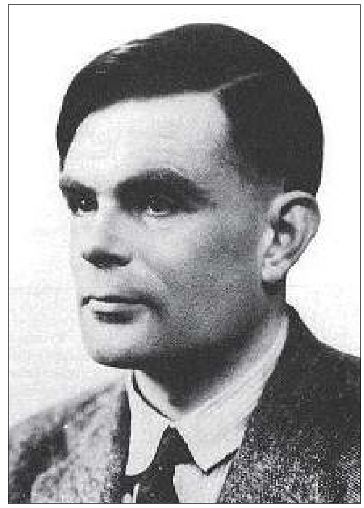
生命的另一个奥秘

——浅谈生物数学与斑图生成

史峻平

生命是什么？生命从哪里来的？这些问题从人类出现就开始是困惑的谜。历史上无数智者才子们都想解开这个千古难题，从而不知衍生了多少诗歌，神话和宗教。几乎每一个神话传说或者宗教都认为自然万物是由神创造的，而且每种生命被创造出来后形态特征和生理特点就一成不变。 随着时代的发展，神创论的说法不断被新的理论所挑战，而最有力的挑战者就是英国的博物学家查尔斯•达尔文（Charles Robert Darwin, 1809-1882）。青年时代的达尔文跟随着英国的科学考察船“贝格尔号”军舰的环球考察遍游了南美，非洲和大洋洲。他爬山涉水，采集矿物和动植物标本，挖掘生物化石，发现了许多没有记载的新物种。在考察过程中，达尔文也一直在思索着生命的奥秘，世间万物究意是怎么产生的？他们为什么会形态各异？他们彼此之间到底有什么联系？他从科学考察中发现的已灭绝生物的标本使他认识到物种不是一成不变的，而是随着客观条件的不同而相应变异。在 1859 年，他经过二十多年研究而写成的科学巨著《物种起源》终于出版了。在书中，他提出了物种是在不断的变化之中，是由低级到高级、由简单到复杂的演变过程。这一伟大著作标志着进化论在生物学中的正式确立。然而进化论也是历史上最有争议的理论，暂且不提所有教会的反对，即使在科学界反对的声音也不弱。这也可以理解，从科学的角度来讲，进化论是有许多采集到的化石可以论证，但是和物理科学的基本原理相比，它也只是一种虚设的理论，并没有任何实验室可以反复实验来验证。当然百多年来有些进化论的捍卫者视进化论为不容讨论的绝对真理，这其实和神创论一样缺乏科学的态度，而把这一问题上升到意识形态高度，就更是远离科学研究的初衷了。不管怎样，达尔文的理论是近代生物学历史上最关键的第一步。在达尔文的年代，他所不能回答的问题是，生物究竟是怎样真正演化形成的，他也不敢想象这一过程是否能有一天象工厂里的生产线一样设计出来，毕竟那个时代物理，化学等学科和现代工程学都还在萌芽阶段。生命的奥秘是什么？这个问题在达尔文时代还没有答案。

从进化论的诞生之日向前推移近一百年，在二十世纪中期，另一个生物学上的里程碑被树立了，那就是生物体中的 DNA 基因的发现。二十世纪的前五十年可以说是物理学的黄金时期，物理学的发展推动了整个科学

左图：查尔斯•达尔文；中图：詹姆斯•沃森和弗朗西斯•克里克；右图：阿兰•图灵

技术的前进，也潜移默化地促成了生物学的这一重大发现。1953 年 4 月 25 日，年轻的美国哈佛大学科学家詹姆斯•沃森（James Watson, 1928-) 和英国剑桥大学科学家弗朗西斯•克里克 (Francis Crick，1916-2004) 在英国《自然》杂志发表题为“核酸的分子结构”的短文，正式提出 DNA（脱氧核糖核酸）双螺旋结构模型。这一发现仅仅过了不到十年就获得了 1962 年诺贝尔生理医学奖，也被认为是二十世纪最重要的科学发现之一。在 2003 年，世界范围都有不同形式的活动纪念 DNA 发现五十周年（有兴趣的读者可到《自然》杂志网站下载这一历史性文章。）双螺旋发现五十周年纪念日前夕，多国合作的人类基因组序列图宣告提前绘成，人体 DNA 中三十亿个碱基的排列顺序，已经成为各国科学家免费取用的数据。DNA 基因的发现无疑是人类历史上重要的一刻。

DNA 基因究竟是不是生命的奥秘呢？可以说是，但又不完全是。这里让我们引用英国著名科普作家伊恩•斯图尔特（Ian Stewart）的书《生命的另一个奥秘》（Life's Other Secret）的解释吧：DNA 是生命的第一个奥秘；在地球上每种生命体内，都有这种复杂的 DNA 分子密码，称为基因；这套密码宛如一部“生命之书”，指定了生命体内的形态，生长，发育及行为。但是基因也并非生命的全部奥秘，它并不象工程用的蓝图，而更象是菜谱上的烹饪方法；它会告诉我们要用哪些材料，用多少量，次序如何，但并不完全决定结果……菜谱和真正的美食还是不一样的。在生命诞生过程中，控制生命体成长，告诉生物如何应对遗传指令的，是物理及化学反应中的数学定律。数学如何控制生物体的生长，这就是生命的另一个奥秘！其实人类早就明白生物的成长会依赖于自然环境中的物理和化学因素，中国古语中的“淮南桔，而淮北枳”已经就有这样的思想，然而使用数学来定量定性地分析这样的现象，还是要等到二十世纪后半叶了。

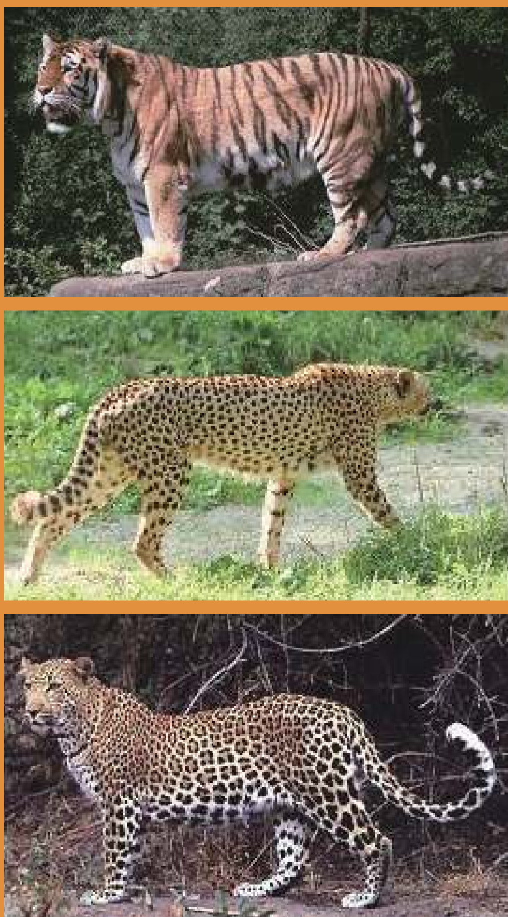
那么生命成长发育的数学定律究竟是什么呢？准确说来目前还没有哪种模型或方程象牛顿力学可以被称为完全精确的数学定律，但是有一些数学模型或方程今天已经被许多生物学家和其他科学家认可。本文中主要介绍的就是描述生物成长发育的反应扩散方程组（Reaction-diffusion systems）。首先我们认为生物成长是一种复杂的化学反应过程，其中可能有几十上百甚至更多的化学物质参加反应。但是在生物体某一局部（象器官，组织，甚至细胞）的反应，可能主要就是少数几种化学成分起决定性作用。我们以两种化学物质参加反应为例。从微观角度来看，两种化学物质的分子都象小球一样在介质中穿梭游弋，而分子间如果碰撞就可能发生化学反应。物理学中分子的随机游弋被称为布朗运动（Brownian Motion），在数学中可以用扩散方程（热传导方程）来描述分子的分布密度函数。而分子间的化学反应则可以用一些反应函数来刻划。如果我们用 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 来代表两种化学物质的分布密度函数，这里 x 代表空间中的一个点，t 代表时间，那么相应的反应扩散方程组是

$$U_t = D_U \Delta U + f(U, V),$$
$$V_t = D_V \Delta V + g(U, V).$$

在方程中，Du 和 Dv 分别是两种化学物质的扩散系数，$f(u,v)$ 和 $g(u,v)$ 是两个二元反应函数，Δ是多元微积分中的拉普拉斯（Laplace）算子，即对于每个空间分量的二阶导数之和。由拉普拉斯算子作为数学表示的扩散

蛇的表皮图案一般是环形，而且横条居多，竖条较罕见

过程在自然科学各个分支都被认可为物质自由运动的方式，既可以是微观世界的分子运动，也可以是大的生物种群的迁徙漫游。热传导方程从十八，十九世纪就被欧拉，拉普拉斯，傅里叶等数学物理学先驱所研究，他们得到的数学结果和实际也很相符：热量（或者任何一种满足这一原理的物质）最终在一个与外界隔绝的空间中均匀分布。所以扩散一般被认为是一种光滑化，平均化的物理过程。这一现象甚至对于一种物质的反应扩散方程都对。然而在沃森和克里克发现 DNA 结构的前一年，1952 年，英国科学家阿兰•图灵（Alan Turing, 1912-1954）发表了一篇题为《生物形态的化学基础》（The Chemical Basis of Morphogenesis）的论文。他提出了上述的反应扩散方程组作为生物形态的基本化学反应模型，并且指出这一方程组可以有非常数平衡解，也就是说两种化学物质最后的分布状态可以是非均匀的，这和热传导方程及一种物质的反应扩散方程的解都大相径庭。图灵可以说是二十世纪科学史上最富传奇性的人物之一。尽管他 1952 年的论文今天被视为生物数学的奠基之作之一，这至多可以算得上他短暂科学生涯中第三大的贡献：第一应该算是他对理论计算机的研究，他是第一个提出利用某种机器实现逻辑代码的执行，以模拟人类的各种计算和逻辑思维过程的科学家。而这一点，成为了后人设计实用计算机的思路来源，成为了当今各种计算机设备的理论基石。今天世界计算机科学领域的最高荣誉就被称为“图灵奖”，相当于计算机科学界的诺贝尔奖；第二是他领导了英国政府破译二战德军 U- 潜艇密码的工作，为扭转二战盟军的大西洋战场战局立下汗马功劳。图灵在数学，逻辑学，神经网络和人工智能等领域也作出了很多贡献。在新旧世纪交替的 2000 年，美国《时代》杂志评选的二十世纪对人类发展最有影响的一百名人物中，图

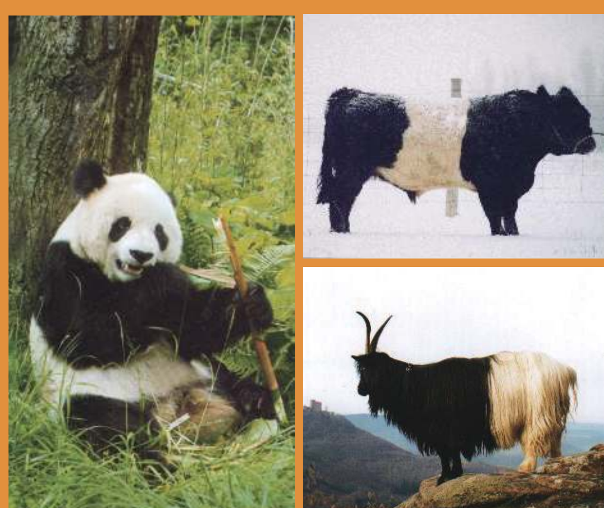


从上至下：东北虎；猎豹 (cheetah)；雪豹 (leopard)

灵和沃森 / 克里克都在仅有二十名的“科学家，思想家”栏中榜上有名。

图灵对于反应扩散方程组的想法基本是这样：如果方程有一个常数平衡解（U，V），也就是代数方程组 $f(u,v)=0$，$g(u,v)=0$ 的解，而且这个解对于下面的常微分方程组 $u'=f(u,v),v'=g(u,v)$ 是稳定的；但是在加上扩散后这个解就变成不稳定的，那么我们称这个解具有扩散所诱导的不稳定性。因为扩散往往给物理系统带来光滑性，稳定性，所以这一想法乍一看可说是有违常理。但是图灵指出如果两个扩散系数相差很大时，这种现象是可能发生的，并且当常数解变不稳定后，也就间接说明依赖空间变量的非常数解的存在性——图灵认为这种非常数解恰好说明生物在生长历程中为什么形态各异，而不是单一结构，甚至也隐含了细胞结构分裂，分化的物理化学过程。图灵的理论在当时恐怕比 DNA 的发现更为大大超前，以至于发表后的前二十年默默无闻，然而在二十世纪七十年代后成了非线性科学发展的重要动力之一。这里我们举一个图灵理论很有意思的应用：猎豹身上的斑点是怎样形成的，或者更广泛的来说，动物皮毛上的斑点和条纹是怎样形成的。这一理论的始创者是英国牛津大学和美国华盛顿州大学现在已经退休的生物数学家詹姆斯 • 默瑞（James D. Murray），他的宏著《数学生物学》在 2002/2003 年出了第三版洋洋洒洒的两册近 1400 页，是生物数学家亦或数学生物学家案头必备的著作。

动物园里最吸引小朋友和大朋友们的就是身上皮毛色彩斑斓的斑马，老虎，金钱豹和熊猫了。为什么有些动物身上有斑点，有些有条纹，而有些就是单色呢？默瑞认为所有哺乳动物身上的斑图形态（pattern）是同一反应扩散机理造成的：在动物胚胎期，一种他称之为形态剂（morphogen）的化学物质随着反应扩散的动力系统在胚胎表面形成一定的空间形态分布，然后在随后的细胞分化中形态剂促成了黑色素（Melanin）的生成，而形态剂的不均匀分布也就造成了黑色素的空间形态。黑色素正是产生肤色或皮毛颜色的基本化学物质，今天大商场里备受女性青睐的各类美白护肤品的原理就是抑制人皮肤上黑色素的生成，而动物们没有福气使用这些产品所以身上只好斑斑点点啦。在这里反应扩散方程组是定义在一个稍扁的



左图：大熊猫；右上：伽罗威奶牛；右下：瓦莱山羊

圆柱体表面（动物表皮）加上一个长长的圆柱体表面（尾巴）上面。这样写成的非线性反应扩散方程组一般是找不出解的表达式的，但是按图灵的想法我们可以判断常数解的稳定性，并得到在常数解附近线性化方程解的公式。这个公式是一个傅里叶级数，但是通常只有前面若干项起决定作用，而方程非常数解也大约可由这几项的相应空间特征函数决定。拉普拉斯算子在圆柱体表面上的特征函数正是两个方向的余弦函数之乘积，即 $\cos(nx/a)\cos(2my/b)$，这里 a,b 分别是动物身体长度和“腰围”，m,n 是自然数或者零，x,y 是两个方向变量。这样的特征函数的图像正好是条纹（如果 $m=0$ 或 $n=0$），或者斑点。究竟哪个特征函数图像出现在动物身上取决于很多自然因素，而最重要的就是 a 和 b 的比例。a/b 不太大或小时，两个方向都容易在特征函数中出现，所以斑图倾向于斑点型；a/b 很大或很小时，特征函数就容易是一个方向的余弦函数，斑图就是条纹。用这么一点简单分析，我们就可以得到生物学两条“定理”了：

“定理”一：蛇的表皮一般总是条纹状，很少斑点状。

不相信这个规律的朋友不妨找一些蛇的图片来验证一下，有名的毒蛇如金环蛇，银环蛇都是条纹状表皮的典型。数学上蛇正是动物身体长度和宽度比例很大的最好例子。另外，根据同样道理，蛇的条纹也大多是横条，很少竖条。

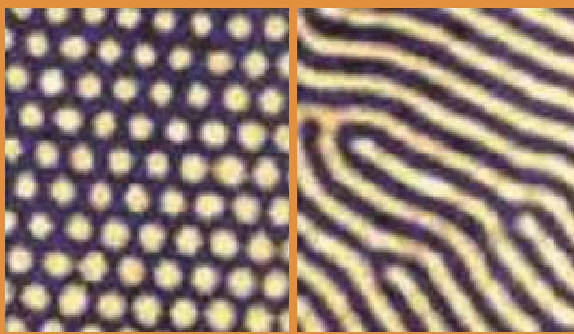
“定理”二：世界上只有条纹尾巴，斑点身体的动物，而没没有条纹身体、斑点尾巴的动物。

大家从左页图中可看到身体和尾巴都是条纹的东北虎，身体和尾巴都是斑点的雪豹（leopard），条纹尾巴，斑点身体的猎豹（cheetah），惟独没有条纹身体，斑点尾巴的动物！因为对同一种动物，在身体和尾巴上的反应扩散方程组是一样的，而尾巴长宽比例远大于身体长宽比例，所以如果尾巴是斑点，身体就不太可能是条纹了。大自然真是根据特征函数来创造世间万物吗？从上面有趣的理论还不能下这样的断言。但是我们真的能在这世界上的动物中找到数学的特征函数。你不相信？看看前页图里这种法国瓦莱山羊（Valais goat）是不是代表了变号一次的 $\cos(x)$，而英国的伽罗威奶牛（Galloway belted cow）和我国的国宝大熊猫（Giant Panda）恰好是正负 $\cos(2x)$，变号两次！

写到这里，你恐怕不能不叹服数学理论的威力，但也恐怕有些怀疑这理论是不是太玄一点了，它是不是真有科学性呢？同样类似的理论也被应用到贝壳图案的生成，热带鱼身体条纹的生成，这些科学研究在过去二十年里可说是方兴未艾。然而这些很有意思的研究和许多今天理论生物学的探索一样，都只是一种理论，或者是假说，生物的复杂性使得这些理论还远未达到可以用实验手段验证的地步，但这也许正是当代生物学引人入胜的地方。例如默瑞动物表皮斑图理论中称作形态剂的化学物质，至今实验生物学家无法找到，以至于默瑞本人也在他的著作新版中谨慎地指出：尽管真正动物皮毛和反应扩散数学计算图形的对比非常诱人，这并不表明这一理论就是正确的，只是目前还没有更好的解释而已。因此人类距离揭开整个生命的奥妙还很遥远。近年来，传承默瑞这一研究思想的很多生物数学学家，生物物理学家在进一步深化探索利用反应扩散方程组来模拟揭示生物生长过程中的形态生成，细胞分裂分化过程，已经取得了更为精细准确的结果。这些最新进展见 Baker 等的 Nonlinearity2008 年和 Kondo, Miura 在 Science2010 年上的综述性文章。

相比之下，过去五十年中，图灵理论在与生物形态学并行发展的化学反应理论中的应用可以说要更加科学一些，毕竟单纯的化学要比无比复杂的生命体更容易在实验室中控制。1951 年当时苏联的化学家别洛索夫（Boris P. Belousov，1893-1970）发现某些化学药品的混合物会有某种振荡反应，也就是化学物质经历一种规则的周期变化。传统的理论是化学反应总是热力学平衡态，周期振荡无疑是离经叛道，所以当别洛索夫想在化学杂志上发表他的研究结果时，审稿人的意见是“这样的反应不可能”。

别洛索夫 - 扎波廷斯基反应中的螺旋波和同心波



CIMA 反应中的斑图照片 (左): 斑点; (右): 条纹

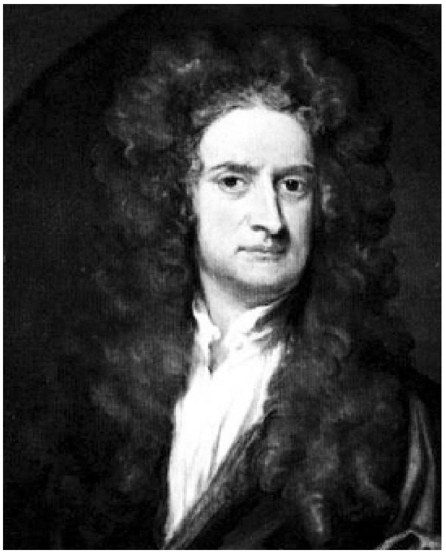
(左) 猎豹身体上的斑点; (右): 斑马身体上的条纹

别洛索夫又花了六年时间完善他的实验，把他的文章投到了另一杂志，而编辑坚持他先把文章缩短为通讯才予以考虑。已经年迈的别洛索夫开始灰心，最后他只在一个不起眼的会议论文集里把他的结果登了一个摘要。幸好他的化学药品混合物的配方流传下来，1961 年莫斯科大学的化学研究生扎波廷斯基（Anatol M. Zhabotinsky）略为改进了别洛索夫的配方，也得到了类似的结果，随后几年他和其他科学家进一步改进简化实验，使得实验结果不仅有时间上的周期变化，还有空间上的自组织形态。别洛索夫 - 扎波廷斯基反应（BZ 反应）在六十年代后期被介绍到了西方世界，很快就引起了强烈反响，许多新的化学振荡系统被发现，到八十年代化学振荡机制已经得到了较为系统的研究。在这一过程中，图灵的文章也逐渐被化学家重新发现，而反应扩散方程组正是可以刻划振荡化学反应的数学工具。在 BZ 反应中观察到的螺旋波（spiral wave）和同心波（target wave）, 恰好也能在反应扩散方程组的某些解中发现。但是化学家也发现他们所设计的各种化学振荡系统都倾向出现波型斑图，而并不是图灵最初预计的斑点和条纹。直到二十世纪八十年代末到九十年代初，法国波尔多大学和美国德克萨斯大学的两组科学家终于设计出了一种空间开放型化学反应器，使得系统内只有反应和扩散过程在进行，而他们的结果提供了第一个图灵斑图的实验例子：CIMA（Chlorite-Iodide-Malonic Acid）反应。从上面两图的对比中 , 可以看到实验室里的化学反应产生的斑图和大自然产生的天然图案何其相似！ 至此图灵对于生物发育理论的奇想，至少用真正的化学反应实现出来了。值得一提的是，我国的科学家欧阳颀是这一研究成果的主创人员之一，他现在是北京大学物理学院的长江特聘教授。

在半个多世纪前的不列颠岛，沃森 / 克里克发现了生命的一大奥秘：DNA 基因结构；而与此同时，在岛的另一边，图灵揭示了生命的另一奥秘：生物发育的数学规律。回顾从生物学这两大里程碑到今天的半个多世纪，我们现在是否掌握了生命的奥秘呢？从斑图形成学说来讲，我们发现反应扩散方程组在计算机模拟下，可产生许多奇妙甚至匪夷所思的时空斑图；在实验科学中，我们能够设计出化学反应具有某些反应扩散方程组所预测的时空斑图；然而它们是不是真的能科学地验证生物世界中千姿百态的神奇现象，中间可能还要经过漫漫长路。当今计算机编程祖师高德纳（Don Knuth）在一次接受记者采访时说，计算机科学经过五十年激动人心的发展，也许大部分伟大的发现都已完成，而生物学呢？他认为还需要未来科学家五百年的 辛勤工作！

想象一下现代物理学从牛顿出生到今天还不足四百年，生物学真的是那么难吗？而数学在生物学的发展中究竟能起什么样的作用呢？让我们来读两段现任英国皇家学会会长罗伯特 • 梅（Robert May）2004 年在美国《科学》杂志一期生物数学专刊上的文章《数学在生物中的使用和滥用》。梅爵士本人正是在二十世纪七十年代研究生物种群模型时，因发现了差分方程的混沌现象而成名。他说：数学在自然科学中的使用，以超简略的方式描述，那就是经典的布拉赫（Tycho Brahe，1546-1601），开普勒（Johannes Kepler，1571-1630）和牛顿（Isaac Newton，1642-1727）序列：观察到的事实，与观察相吻合的潜在规律，解释规律的基本原理。（A paradigmatic account of the uses of mathematics in the natural sciences comes, in deliberately oversimplified fashion, from the classic sequence of Brahe, Kepler, Newton: observed facts, patterns that give coherence to the observations, fundamental laws that explain the patterns.）这里需要解





左图：布拉赫；中图：开普勒；右图：牛顿

释一下，所谓布拉赫，开普勒和牛顿序列是经典天体力学历史上的一段故事。丹麦贵族布拉赫是他的时代中最伟大的天文学家，他花了几十年时间进行天文观测，积累了大量观察数据和资料。德国科学家开普勒是布拉赫晚年助手，布拉赫临终前将自己多年积累的天文观测资料全部交给了开普勒。开普勒潜心研究这些数据，特别是火星轨道运行规律，在 1609 年出版了他的天体运行三大定律。然而开普勒的定律虽然基本正确，但可以说是猜测出来的经验规律。最终是牛顿应用他的微积分在数学上证明了开普勒三大定律，从而奠定了天体力学的理论基础，也完满地完成了从布拉赫开始的这一段科学探索。梅正是引用这段典故来说明科学研究的一般进程。

那么生物学的发展现在到了哪一阶段呢？数学在其中起了什么作用呢？梅教授举了目前倍受关注的人类及其他生物基因组的工作为例。他认为，在这项识别 DNA 的双螺旋结构和它的作用的探索中，经典数学物理起了中枢作用。在下一个关键步骤中，生物化学的进展使得三十亿个碱基长的人类基因组被切割成可处理的分段。而把基因组分段重组得到最后的完整人类基因组，需要难以想象的大量的计算能力和复杂的软件，这本身也需要新的数学。然而这种基因组工程仅仅是生物上的布拉赫阶段而已！目前对各种基因组进行识别整理的工作，正是下一个开普勒阶段，其中也有大量优美的数学参与。我们才刚刚开始（如果确实开始了的话）最终的牛顿阶段，来考虑这些模式和规律背后更加深刻的演化问题。在这牛顿式的索求历程中，数学模型会以与前面阶段不同的方式出现，各种关于生物机理的猜测将用数学术语来明确，而结果会用来与观察到的模式和规律进行比较测试。本文所介绍的反应扩散方程组数学模型正是在从上一世纪后期到今天生物学日新月异大发展的背景下，理论生物学家，数学家，物理学家和化学家一起对于生命的奥秘这一人类最大问题，所做的一种猜想或者模拟。揭开生命真正完全的奥秘，也许悲观如高德纳（他无疑是我们这个时代的智者之一）还要五百年，还是能在二十一世纪这被称为生物学世纪的百年中出现下一个牛顿呢？然而有一个规律是非常清楚的：在新的世纪，面对新的科学挑战，完成这一使命的科学家将不能仅仅是数学家，物理学家，化学家或者生物学家，而必须是各个科学分支的通才全才，……让我们回到牛顿时代，简单地称为科学家。在二十世纪前，科学家并无过于明确的分工，只是随着科学分支的逐渐庞大和细化，才出现了不同称谓，甚至在二十世纪下半叶，各学科间都各自发展，不相往来。然而，合久必分，分久必合，新的科学正是在各个传统科学的交叉点。下一个牛顿也许就在今天的青少年一代中间。

最后我们以牛顿近三百年前的哲言做结语，今天听来仍有其现实意义：我不知道世人对我看法如何，我只觉得我好象是个在海边嘻戏的小男孩，有时钻入水里，找到一块光滑的鹅卵石或者漂亮的贝壳，而真理的广阔海洋就在我的面前仍然未被发现。

本文基于作者2004年和2005年在美国和中国多所大学、高中所做的通俗科普报告；作者的研究工作得到美国国家自然基金DMS-0314736，EF-0436318，威廉玛丽学院及黑龙江教育厅海外学人科研（合作）项目支持。

作者介绍：

史峻平，南开大学数学学士，美国Brigham Young大学数学博士，现为美国William-Mary大学副教授。山西大学"山西省百人计划"特聘教授。

个人网页：http://www.math.wm.edu/~shij/；
电子邮件：shij@math.wm.edu

参考文献

1. Baker, R.E., Gaffney, E.A., Maini, P.K., Partial differential equations for self-organization in cellular and developmental biology. Nonlinearity, 21, (2008), R251-R290.

2. C. Darwin, Origin of Species. Gramercy, 1995 (原作于1859年发表).

3. Doernberg, D. Computer Literacy Interview with Donald Knuth. December 7th, 1993.

4. I. R. Epstein, and J. A. Pojman, An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics. Oxford University Press, 1998.

5. K. Shigeru, and M. Takashi, Reaction-Diffusion Model as a Framework for Understanding Biological Pattern Formation. Science, 329, 1616-1620, (2010).

6. R. M. May, Uses and abuses of mathemtics in biology. Science, 303, 790-793, (2004).

7. J. D. Murray, Mathematical Biology. Third edition. I. An Introduction. Springer-Verlag, 2002; II. Spatial Models and Biomedical Applications. Springer-Verlag, 2003.

8. 欧阳颀，反应扩散系统中的斑图动力学。上海科技教育出版社，2000年。

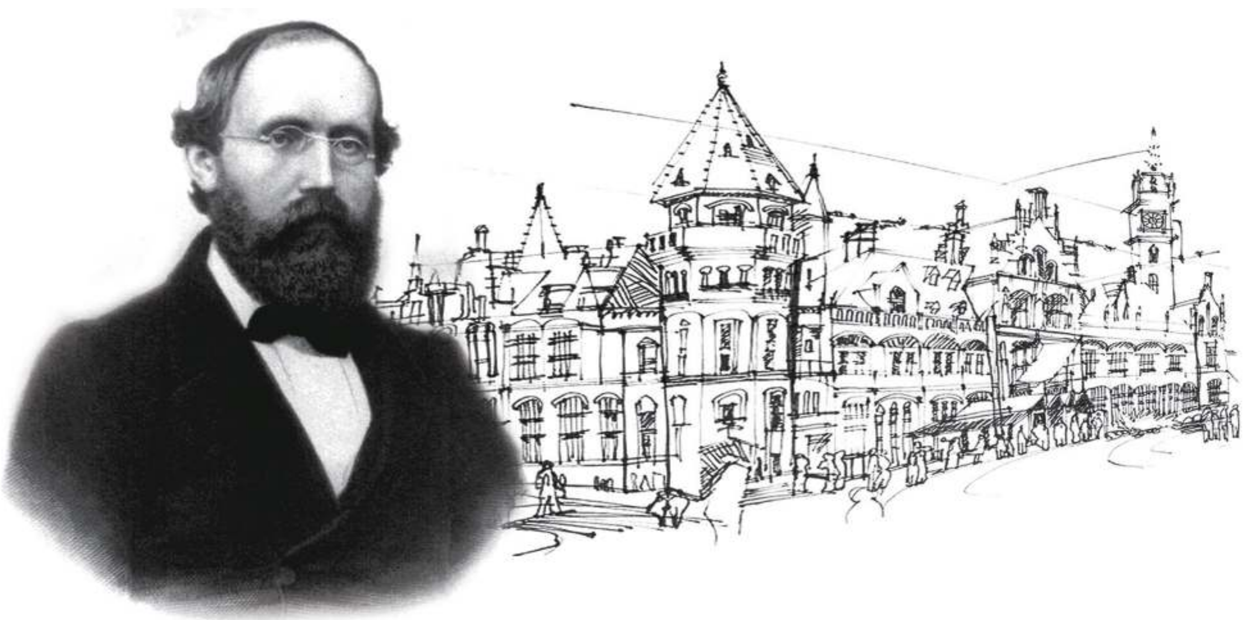
9. 欧阳颀，非线性科学与斑图动力学导论。北京大学出版社，2010年。

10. I. Stewart, Life's Other Secret: The New Mathematics of the Lliving World. Wiley, 1999.

11. Watson, J.D. and Crick F.H.C., A structure for Ddeoxyribo Nucleic Acid. Nature, 4356, 737-738, (1953).

12. Turing, A.M., The chemical basis of morphogenesis. Philosophical Transaction of Royal Society of London, B237, (1952), 37-72.

Riemann



黎曼猜想漫谈(四)

卢昌海

17 茶室邂逅

蒙哥马利（Hugh Montgomery）虽然得到了有关黎曼ζ函数非平凡零点对关联函数的猜测性结果，但这一结果究竟有何深意，对他来说还是一个谜。他觉得这个结果应该预示着什么东西，可那究竟是什么呢？他并不知道，这多少让他感到有些苦恼。

带着他的研究成果，也带着那几分苦恼，蒙哥马利于 1972 年春天飞往美国圣路易（St. Louis）参加一个解析数论会议。那趟旅行对蒙哥马利有着一举数得的意义。除会议本身外，他还到密歇根大学（University of Michigan）所在地安娜堡（Ann Arbor）买了房子，因为此前不久他已接受了一份密歇根大学的工作（蒙哥马利目前仍在密歇根大学数学系）。

至此，那趟旅行可以说已经获得了精神与物质的双重丰收。但在结束旅程前蒙哥马利还有一件事情放心不下。

我们在第三节曾经提到高斯有一个“坏毛病”，那就是常常不发表自己的工作，结果使得同时代的许多数学家在研究课题上与他“撞车”（与高斯这样的大师玩碰碰车，谁的脑袋先碰破就不必说了）。无独有偶，二十世纪的普林斯顿高等研究所也出了一位有同样“坏毛病”的数学家，那便是阿特勒•塞尔伯格（Atle Selberg，1917-2007）。塞尔伯格在黎曼猜想的研究中有着极为重要的地位，我们在后文中将会更多地介绍他，这里就不赘述了。让蒙哥马利放心不下的就是自己会不会与塞尔伯格“撞

Riemann

普林斯顿高等研究所 Fuld Hall（刘建亚 摄）

车”？自己的这项研究工作会不会不幸地在塞尔伯格的某一叠草稿纸上已经有了？当然，除此之外他也很想听听这位黎曼猜想研究中的顶尖高手对自己这项工作的看法，特别是对结果背后含义的理解。

于是在返回英国前他决定在普林斯顿高等研究所做短暂的停留，以便会见一下塞尔伯格。

蒙哥马利如愿见到了塞尔伯格。但塞尔伯格听完了蒙哥马利的介绍只是礼貌地表示了兴趣，却没有提出具体意见。不过他总算也没有说："干得不错，小伙子，但是 N 年之前我已经证明过这样的结果了"，还是让蒙哥马利松了一口气。

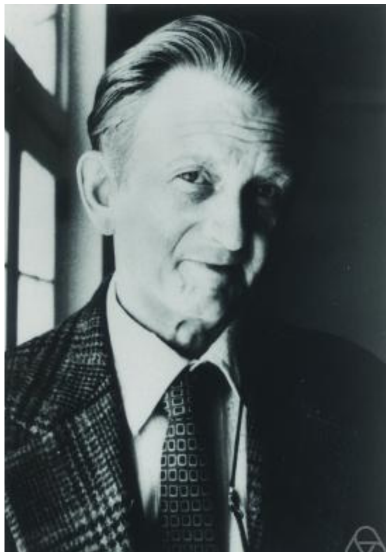
见过了塞尔伯格，蒙哥马利便和朋友周拉（Sarvadaman Chowla，1907-1995）到 Fuld Hall 去喝下午茶。喝下午茶虽是一种休闲，但在普林斯顿高等研究所的学术氛围中却是一个重要的组成部份。在这一时间里，来自世界各地、从事不同研究的学者们互相攀谈，交流看法，往往会撞击出一些意想不到的智慧火花。

蒙哥马利和周拉正在喝茶闲聊的时候，一位物理学家走了进来。

在普林斯顿高等研究所这样一个科学家阵容豪华得近乎奢侈的地方，随便哪个角落碰上的都可能是非同小可的人物。这位漫步走进茶室的物理学家也不例外。此人在二十世纪中叶曾因证明了量子电动力学的几种形式体系彼此等价，而获得了很高的声誉，也为他赢得了普林斯顿高等研究所的终生职位。而这项研究还只不过是他科学生涯中许许多多研究中的一个。他的研究涉及到核物理、凝聚态物理、天体物理，乃至天体生物学等诸多领域。这位物理学家便是弗里曼•戴森（Freeman Dyson，1923-）。在二十世纪物理殿堂的璀璨群星中戴森当然远不是最杰出的，但那个午后他和蒙哥马利的世界线在高等研究所的短暂交汇，却是科学史上一段令人难忘的佳话，对于黎曼猜想的研究来说也是一个奇峰突起的精彩篇章。

周拉是一位交际高手，一边和蒙哥马利喝茶聊天，一边仍能眼观六路、耳听八方。戴森刚一进门就被他发现了，于是他问蒙哥马利是否见过戴森，蒙哥马利说没有，周拉就说我给你引见一下。蒙哥

蒙特哥麦利
Hugh Montgomery



塞尔伯格
Atle Selberg

戴森
Freeman Dyson

马利心想自己做的东西和戴森八杆子都打不着，再说喝完茶就走人了，何必还特意打扰戴森？就说不必了。但周拉却是一个从来不把“不”字当成答案的家伙，当下二话不说就把蒙哥马利拽到了戴森跟前（谢谢周拉！）。

就这样戴森和蒙哥马利攀谈了起来。戴森问蒙哥马利最近在研究什么？蒙哥马利就把自己对黎曼 ζ 函数非平凡零点分布的研究叙述了一下。戴森礼貌地听着，他对这一领域并不熟悉。连塞尔伯格都没有发表具体的看法，蒙哥马利也并不指望这番泛泛介绍会得到比礼貌地点点头更多的回应。

但是当他介绍到自己所猜测的密度函数 $\rho(t)=1-[\sin(\pi t)/\pi t]^2$（详见第十六节）时，戴森的眼睛猛地睁大了！

因为这个让蒙哥马利找不到北，甚至连塞尔伯格也看不出端倪来的密度函数对戴森来说却一点也不陌生，那正是随机厄密特矩阵（Random Hermitian matrices）本征值的对关联函数。物理学家们研究这类东西已经有二十年了！

而戴森本人也早在十年前就系统地研究了随机矩阵理论，是这一领域公认的先驱者之一。即使找遍整个世界，也不可能找到一个比戴森更合适的人来和蒙哥马利共喝那杯下午茶了。他们的相遇本身就是一个幸运的奇迹。

有意思的是，在与蒙哥马利的这次“茶室邂逅”的前一年（即 1972 年），戴森刚写过一篇题为“Missed Opportunity”（“错过的机会”）的文章，叙述了科学史上由于数学家与物理学家交流不够而错失发现的一些事例。

18 随机矩阵理论

身为理论物理学家的戴森如何会研究起随机矩阵理论来的呢？这当然还得从物理学说起。

我们知道在物理学上可以严格求解的问题是少之又少的。而且物理理论越发展，可以严格求解的问题就越少。举个例子来说，在牛顿引力理论中二体问题可以严格求解，但一般的三体问题就不行[注 18.1]；到了广义相对论中连一般的二体问题也解

注 18.1

这里“单体”、“二体”、“三体”指的都是点状分布或可视为点状分布的体系。

不出了，只有单体问题还可以严格求解；而到了量子场论中更是连单体问题也解不成了。

另一方面，现实物理中的体系往往既不是单体，也不是二体或三体，而是多体，少则十几、几十（比如大一点的原子、分子），多则 10^{23} 或更多（比如宏观体系）。很明显，对现实物理体系的研究离不开各种近似方法。这其中很重要的一类方法就是统计方法，由此形成了物理学的一个重要分支：统计物理。

在统计物理中，人们不再着眼于对物理体系的微观状态进行细致描述（因为这种细致描述不仅无法做到，而且对于确定体系的宏观行为来说是完全不必要的），取而代之的是"系综"的概念。所谓"系综"，指的是满足一定宏观约束条件的大量全同体系的集合，这些体系的微观状态具有一定的统计分布，我们感兴趣的体系的宏观状态就由相应物理量的系综平均值所给出。

在传统的统计物理中，组成系综的那些全同体系具有相同的哈密顿量（Hamiltonian），只有它们的微观状态才是随机的。但是随着研究的深入，物理学家们开始接触到一些连这种方法也无法处理的物理体系，其中一个典型的例子就是由大量质子中子组成的原子核。这种体系的相互作用具备了所有可以想象得到的"坏品质"（比如耦合常数很大，不是二体相互作用，不是有心相互作用等），简直是"五毒俱全"。对于这种体系，我们甚至连它的哈密顿量是什么都无法确定。这样的体系该如何处理呢？很显然还是离不开统计的方法。只不过以前在系综中只有各体系的微观状态是随机的，现在却连哈密顿量也不知道了，既然如此，那就一不做二不休，干脆把哈密顿量也一并随机化了。由于哈密顿量可以用矩阵来表示，因此这种带有随机哈密顿量的量子统计系综可以用随机矩阵理论来描述。这一点最早是由尤金•维格纳（Eugene Wigner，1902-1995）于 1951 年提出的。当然，在这一领域中数学家还是要先于物理学家。随机矩阵理论在数学中最早是由威沙特（J. Wishart，1898-1956）于 1928 年提出的。

把哈密顿量随机化不等于说对哈密顿量的结构就没有任何限制了。二十世纪六十年代初，与蒙哥马利在茶室里偶遇的这位戴森对随机矩阵理论进行了深入的研究，并在 1962 年一连发表了五篇非常漂亮的论文。这些论文在随机矩阵理论的发展中具有奠基性的作用。在这些论文中戴森证明了随机矩阵理论可以按照体系在时间反演变换 T 下的性质分为三种类型：

- 如果体系不具有时间反演不变性，则演化算符为幺正矩阵（Unitary Matrices）。
- 如果体系具有时间反演不变性，且 $T^2=I$，则演化算符为正交矩阵（Orthogonal Matrices）。
- 如果体系具有时间反演不变性，且 $T^2=-I$，则演化算符为辛矩阵（Symplectic Matrices）。

这里戴森用演化算符 U 取代了哈密顿量 H，这两者之间由 $U=\exp(-iHt)$ 相联系。用演化算符的好处是它的参数空间是紧致的。

除了按照对称性对演化算符的结构进行分类外，还有一个需要解决的问题就是哈密顿量的分布函数。戴森引进的是高斯型分布，这是数学物理中比较常见的一种分布。在这种分布下具有上述三种对称性的系综分别被称为：Gaussian Unitary Ensemble (GUE)，Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE) 和 Gaussian Symplectic Ensemble (GSE)。

戴森在得知了蒙哥马利的密度函数时猛然想起的"随机厄密矩阵"所描述的正是这三种系综中的一种——Gaussian Unitary Ensemble——的哈密顿量（幺正演化算符对应的哈密顿量是厄密的），它的几率测度定义为高斯型分布：

$$P(H)dH = C\exp\left(-\frac{tr\left(H^2\right)}{2\sigma^2}\right)dH,$$

其中 C 为归一化常数，H 为体系的哈密顿量，σ 为标准差，通常取为 $2^{-1/2}$。

对于一个量子体系，能级分布是在理论与观测上都极其重要的性质。这也是随机矩阵理论中物理学家们最感兴趣的东西之一。物理学家所说的能级用数学术语来说就是哈密顿量的本征值。那么随机厄密矩阵的本征值是怎样分布的呢？分析表明，一个 N 阶随机厄密矩阵的本征值分布密度为：

Riemann

$$P(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)=C\exp\left(-\sum_i\lambda_i^2\right)\prod_{j>k}\left(\lambda_j-\lambda_k\right)^2,$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ 为本征值，C 为归一化常数。

通过对这一分布密度的积分，我们可以计算出随机厄密矩阵本征值的各种关联函数。但是这些关联函数的表观复杂程度与本征值的平均间距有很大关系，因此我们要先对本征值做一点处理，以便简化结果。这一处理所依据的是维格纳曾经证明过的一个结果，那就是当矩阵阶数 $N\to\infty$ 时，n 阶随机厄密矩阵的本征值趋向于区间 $[-2(2n)^{1/2},\ 2(2n)^{1/2}]$ 上的半圆状分布，即

$$P(\lambda)d\lambda=\sqrt{8n-\lambda^2}\frac{d\lambda}{4\pi},$$

其中 $P(\lambda)d\lambda$ 为区间 $(\lambda,\ \lambda+d\lambda)$ 上的本征值个数。这一规律被称为维格纳半圆律（Wigner Semicircle Law）。利用这一规律，我们可以对本征值做一个标度变换，引进

$$\mu=\frac{\lambda\sqrt{8n-\lambda^2}}{4\pi},$$

可以证明（请读者自己证明），这一变换就象我们在第十六节中对黎曼 ζ 函数零点虚部所做的处理那样，将本征值的间距归一化为：$\Delta\mu\sim1$。在这种间距归一化的本征值下，关联函数的形式变得相对简单，其中对关联函数的计算结果为：

$$P_2(\mu_1,\mu_2)=1-\left(\frac{\sin(\pi|\mu_2-\mu_1|)}{\pi|\mu_2-\mu_1|}\right)^2.$$

看到这里，大家想必也和戴森一样看出来了，随机厄密矩阵本征值的对关联函数正是我们在 第十六节 中介绍过的，蒙哥马利所猜测的黎曼 ζ 函数非平凡零点的对关联函数！当然那时候蒙哥马利用的不是象“对关联函数”这样摩登的术语，事实上“对关联函数”这一术语蒙哥马利在和戴森交谈前连听都没听说过，他自己用的是象“我正在研究零点间距”这样土得掉渣的“白话文”。

有的读者可能会提出这样一个问题，那就是哈密顿量的分布为什么要选择成高斯型分布？对于这个问题，实用主义的回答是：高斯型分布是数学上比较容易处理的（不要小看这样的理由，当问题复杂到一定程度时这种理由有时是最具压倒性的）；稍为深刻一点的回答则是：高斯型分布在固定的 |H|2 系综平均值及标准差下具有最大的熵，换句话说它描述的是在一定约束下具有最大随机性的体系；但是最深刻的回答却是：我们其实并不需要特意选择高斯型分布！ 随机矩阵理论的一个非常引人注目的特点便是：在矩阵阶数 $N\to\infty$ 的极限下它的本征值分布具有普适性（即不依赖于哈密顿量的特定分布）。正是这种普适性使得随机矩阵理论在从复杂量子体系的能级分布到无序介质中的波动现象，从神经网络系统到量子混沌，从 $N_c\to\infty$ 的 QCD 到二维量子引力的极为广阔的领域中都得到了应用。

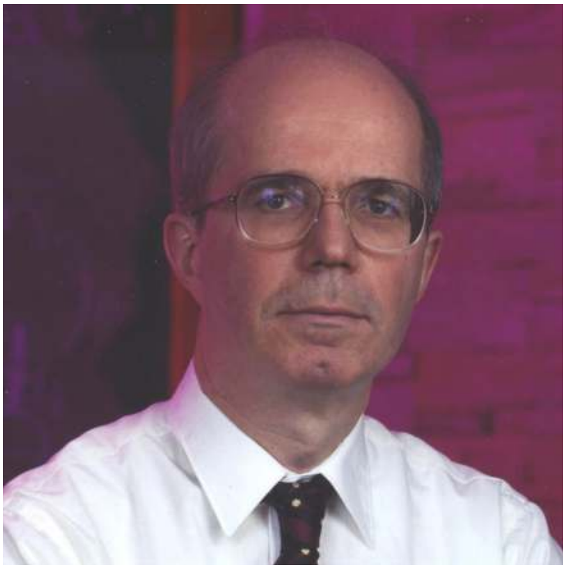
但是把随机矩阵理论的所有这些不同尺度、不同维度的应用加在一起，也比不上它与黎曼 ζ 函数非平凡零点分布之间的关联来得神奇。蒙哥马利曾经为不知道自己的结果预示着什么而苦恼，现在他知道了那样的结果也出现在由随机矩阵理论所描述的一系列物理现象中。

但这与其说是解惑，不如说是一种更大的困惑。象黎曼 ζ 函数非平凡零点分布这样最纯粹的数学性质，怎么会与象复杂量子体系、无序介质那样最现实的物理现象扯上关系的呢？这种神奇的关联本身又预示着什么呢？

19 Montgomery-Odlyzko 定律

蒙哥马利关于黎曼 ζ 函数非平凡零点分布的论文于 1973 年发表在美国数学学会的 Proc. Sym. Pure Math. 上。但最初几年里它并不曾吸引多少眼球，因为无论这种存在于零点分布与随机矩阵理论间的关联有多奇妙，在当时它还只是一个纯粹的猜测，既没有严格的数学证明，也没有直接的数值证据。我们曾在第 十三、十四 节中介绍过零点计算的简史。在蒙哥马利的论文发表之初，人们对零点的计算还只进行到几百万个，而且——如我们在第十五节中所说——那些计算大都只是验证了“前 N 个零点”位于 critical line 上，却不曾涉及零点的

Riemann



欧德里考
Andrew Michael Odlyzko

具体数值。既然没有具体数值，自然就无法用来检验蒙哥马利的对关联假设。更何况——如我们在第十六节中所说——为了检验后者，我们需要研究虚部很大的零点，这显然也是当时的计算所远远不及的。因此当时就连蒙哥马利自己也觉得对他的猜测进行数值验证将是极为遥远的将来的事情。

但是蒙哥马利和我们在第十四节中提到的输掉葡萄酒的查基尔（Don Zagier，1951-）一样大大低估了计算机领域的发展速度。在他的论文发表五年之后的一天，他又来到了普林斯顿。不过这次不是为了觐见塞尔伯格，而是来做一个有关黎曼 ζ 函数零点分布的演讲。在那次演讲的听众中有一位来自 32 英里外的贝尔实验室（Bell Labs）Murray Hill 研究中心的年轻人，他被蒙哥马利讲述的零点分布与随机矩阵理论间的关联深深地吸引住了。而他所在的实验室恰好拥有当时著名的 Cray 巨型计算机。这位年轻人便是我们在第十六节中提到的欧德里考（Andrew Michael Odlyzko，1949-）。

普林斯顿真是蒙哥马利的福地，五年前与戴森在这里的相遇，使他了解到了零点分布与随机矩阵理论间的神秘关联，从而为他的研究注入了一种奇异的魅力。五年后又是在这里，这种魅力打动了欧德里考，从而有了我们在第十六节中介绍的他对黎曼 ζ 函数零点的大规模计算分析。这些计算为蒙哥马利所猜测的零点分布与随机矩阵理论间的关联提供了大量的数值证据[注 19.1]。这种关联，即经过适当的归一化后黎曼 ζ 函数非平凡零点的间距分布与 Gaussian Unitary Ensemble（参阅第十八节）的本征值间距分布相同，也因此渐渐被人们称为蒙哥马利 - 欧德里考定律（Montgomery-Odlyzko Law）[注 19.2]。蒙哥马利 - 欧德里考定律虽然是用 Gaussian Unitary Ensemble 来表述的，但我们在第十八节 中曾经提到，随机矩阵理论的本征值分布在矩阵阶数 N → ∞时具有普适性。因此蒙哥马利 - 欧德里考 定律所给出的关联并不限于 Gaussian Unitary Ensemble。不仅如此，这种本征值分布的普适性还有一层含义，那就是它不仅在各种系综下都相同，而且对系综中任何一个典型的系统——即任何一个典型的随机矩阵——都相同。换句话说，我们不仅不需要指定系综的分布函数，甚至连系综本身都不需要，只要随便取出一个随机矩阵就可以了[注 19.3]。因此蒙哥马利 - 欧德里考 定律实际上意味着**黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布可以用任何一个典型随机厄密矩阵的本征值分布来描述。**

蒙哥马利当初的研究——如我们在第十六节中介绍的——只涉及零点分布的对关联函数。在他之后，人们对零点分布的高阶关联函数也作了研

注 19.1

这种数值证据之一便是我们在第十六节中给出的关于 Montgomery 零点对关联函数的拟合曲线。

注 19.2

这“定律”二字通常在物理学中用得比在数学中多，它很贴切地表达了这一命题虽有大量的数值证据，却缺乏数学意义上的严格证明这一特点。

注 19.3

当然，别忘了 $N\to\infty$，以及矩阵为幺正（对演化算符而言）或厄密（对哈密顿量而言）这些条件。

究。1996 年，Z. Rudnick 与 P. Sarnak 及 E. B. Bogomolny 与 J. P. Keating 分别“证明”了零点分布的高阶关联函数也与相应的随机矩阵的本征值关联函数相同。美中不足的是，我们不得不对这种“证明”加上引号，因为它们和蒙哥马利的研究一样，并不是真正严格的证明，它们或是引进了额外的限制条件（如 Z. Rudnick 与 P. Sarnak 的研究），或是运用了本身尚未得到证明的黎曼猜想及强孪生素数猜想（如 E. B. Bogomolny 与 J. P. Keating 的研究）。

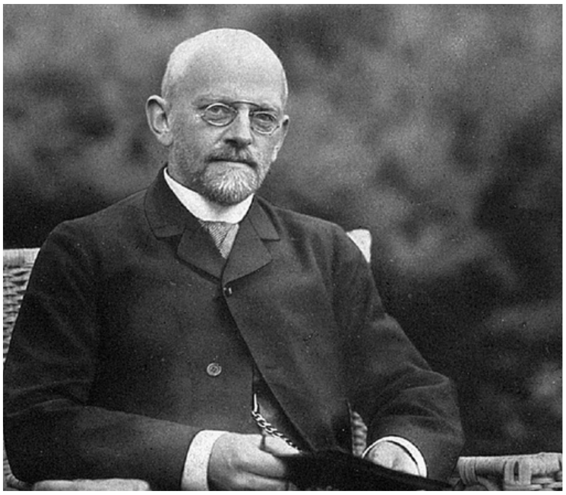
但即便如此，所有这些理论及计算的结果还是非常清楚地显示出黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布与随机矩阵的本征值分布——从而与由随机矩阵理论所描述的一系列复杂物理体系的性质——间的确存在着令人瞩目的关联。蒙哥马利 - 欧德里考定律在“经验”意义上的成立几乎已是一个毋庸置疑的事实。

20 希尔伯特－波利亚猜想

那么在黎曼 ζ 函数非平凡零点这样的纯数学客体与由随机矩阵理论所描述的纯物理现象之间为什么会出现象蒙哥马利 - 欧德里考定律那样的关联呢？这却是一个我们至今也未能完全理解的谜团。但有意思的是，虽然在距离蒙哥马利的论文发表已有三十余年的今天我们仍未能彻底理解蒙哥马利 - 欧德里考定律的本质，可是远在蒙哥马利的论文发表六十余年前的二十世纪一二十年代，数学界就流传着一个与蒙哥马利 - 欧德里考定律极有渊源的猜想——希尔伯特 - 波利亚猜想：

> **希尔伯特－波利亚猜想**：黎曼 ζ 函数的非平凡零点与某个厄密算符的本征值相对应。

更确切地讲，希尔伯特 - 波利亚猜想指的是：如果把黎曼 ζ 函数的非平凡零点写成 $\rho = 1/2 + it$，则所有这些 t 与某个厄密算符的本征值一一对应（自第十一节引进 t 以来，当我们提到黎曼 ζ 函数的非平凡零点时往往指的是 t，这一点读者应该很容易从上下文中判断出来）。我们知道，厄密算符的本征值都是实数。因此如果所有的 t 都与某个厄密



希尔伯特
David Hilbert

算符的本征值相对应，则它们必定全都是实数，从而所有非平凡零点 $\rho = 1/2 + it$ 的实部都等于 1/2，这正是黎曼猜想的内容。因此如果希尔伯特 - 波利亚猜想成立，则黎曼猜想也必定成立。

我们在上节中提到，蒙哥马利 - 欧德里考定律表明黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布可以用任何一个典型随机厄密矩阵的本征值分布来描述。这种描述虽然奇妙，终究只是统计意义上的描述。但是如果希尔伯特 - 波利亚猜想成立，则黎曼 ζ 函数的非平凡零点干脆直接与某个厄密矩阵的本征值一一对应了。这是严格意义上的对应，有了这种对应，统计意义上的对应自然就不在话下。因此希尔伯特 - 波利亚猜想虽然比蒙哥马利 - 欧德里考定律早了六十余年，却是一个比蒙哥马利 - 欧德里考定律更强的命题！

从二十世纪初开始流传的希尔伯特 - 波利亚猜想在无形之中与半个多世纪后才出现蒙哥马利 - 欧德里考定律做了跨越时间的遥远呼应。

但是这一呼应委实是太过遥远了，蒙哥马利的论文尚且因为缺乏证据而遭冷场，希尔伯特 - 波利亚猜想就更无人问津了。这种冷落是如此地彻底，以至于当蒙哥马利的论文及后续研究重新燃起人们对希尔伯特 - 波利亚猜想的兴趣，从而开始追溯它的起源时，大家惊讶地发现不仅希尔伯特（David Hilbert，1862-1943）和乔治•波利亚（George

Riemann

波利亚
George Pólya

Pólya，1887-1985）不曾在人们找寻得到的任何发表物或手稿中留下过一丝一毫有关 希尔伯特 - 波利亚猜想的内容。而且在蒙哥马利之前所有其他人的文字中竟也找不到任何与这一猜想相关的叙述。一个隐约流传了大半个世纪的数学猜想竟似没有落下半点文字记录，却一直流传了下来，真是一个奇迹！

1981 年 12 月 8 日，欧德里考给波利亚发去了一封信，询问希尔伯特 - 波利亚猜想的来龙去脉。当时波利亚已是九十四岁高龄，卧病在床，基本不再执笔回复任何信件，但欧德里考的信却很及时地得到了他的亲笔回复。毕竟，对一位数学家来说，自己的名字能够与伟大的希尔伯特出现在同一个猜想中是一种无上的荣耀。波利亚在回信中写道：

> 很感谢你 12 月 8 日的来信。我只能叙述一下自己的经历。
>
> 1914 年初之前的两年里我在哥廷根。我打算向兰道学习解析数论。有一天他问我："你学过一些物理，你知道任何物理上的原因使黎曼猜想必须成立吗？"我回答说，如果 ξ - 函数的非平凡零点与某个物理问题存在这样一种关联，使得黎曼猜想等价于该物理问题中所有本征值都是实数这一事实，那么黎曼猜想就必须成立。

s 波利亚提到的 ξ- 函数应该是指我们在第五节的 [注 5.1] 中提到的黎曼本人所定义的 ξ 函数。黎曼猜想等价于那个 ξ 函数的零点为实数。

三年后波利亚离开了人世，他的这封信便成了迄今所知有关希尔伯特 - 波利亚猜想的唯一文字记录。至于早已过世的希尔伯特在什么场合下提出过类似的想法，则也许将成为数学史上一个永远的谜团了。

21 黎曼体系何处觅？

如上所述，假如希尔伯特 - 波利亚猜想成立，则黎曼 ζ 函数的非平凡零点将与某个厄密算符的本征值一一对应。我们知道厄密算符可以用来表示量子力学体系的哈密顿量，而厄密算符的本征值则对应于该量子力学体系的能级。因此如果希尔伯特 - 波利亚猜想成立，则黎曼 ζ 函数的非平凡零点有可能对应于某个量子力学体系的能级，非平凡零点的全体则对应于该量子力学体系的能谱。我们把这一特殊的量子力学体系称为黎曼体系，把这一体系的哈密顿量称为黎曼算符。

严格讲，量子力学中所有的可观测量都是由厄密算符表示的，哈密顿量只是其中之一。不仅如此，由厄密算符的本征值所描述的物理量甚至并不限于量子力学中的物理量。从波利亚给欧德里考的信中也可以看到，波利亚当年并没有对与黎曼 ζ 函数非平凡零点相对应的"物理问题"做具体的猜测。因此从希尔伯特 - 波利亚猜想到黎曼 ζ 体系是后人所做的进一步猜测。之所以做这种猜测，除了哈密顿量对物理体系所具有的重要性外，或许是因为随机

注 21.1

Bohigas 猜想的原始表述是只针对 Gaussian Orthogonal Ensemble 的。

矩阵理论最初是在研究原子核能级时被引入物理学中的。另一方面，量子体系的能级是自然界中含义最为深刻的离散现象之一，这或许也是人们把注意力集中到这一方向上的原因之一。

那么这个黎曼体系——如果存在的话——会是一个什么样的量子力学体系呢？

有关这个问题最重要的线索显然来自蒙哥马利 - 欧德里考定律。由于这一定律表明黎曼 ζ 函数的非平凡零点分布与随机厄密矩阵的本征值分布相同，因此我们不难猜测，黎曼算符是一个随机厄密矩阵。那么由随机厄密矩阵所描述的量子力学体系具有什么特点呢？这个问题自二十世纪七十年代末以来有许多人研究过。1984 年，O. Bohigas 提出了一个猜想，即由随机矩阵理论描述的量子体系在经典近似下对应于经典混沌体系[注 21.1]。这一猜想已经有了许多数值计算的支持，但至今仍未得到严格的证明。不过从物理角度上讲，与经典混沌体系相对应的量子体系的波函数会在一定程度上秉承经典轨迹的混沌性，从而使得哈密顿量的矩阵元呈现随机性，这正是随机矩阵的特点。

由此看来黎曼体系很可能是一个与经典混沌体系相对应的量子体系。那么这个与黎曼体系相对应的经典混沌体系又会具有什么样的特征呢？这个问题人们也做过一些研究。由于我们所知有关黎曼体系最明确的信息是黎曼 ζ 函数的非平凡零点，即黎曼体系的能谱。因此寻找黎曼体系的努力显然要从能谱入手。描述量子体系能谱的一个很有用的工具是所谓的能级密度函数：

$$\rho(E)=\sum_n \delta(E-E_n)\ .$$

早在二十世纪六十年末和七十年代初，M. C. Gutzwiller 就对这一能级密度函数的经典极限做了研究，得到了一个我们现在称为 Gutzwiller 求迹公式（Gutzwiller Trace Formula）的结果。在对应的经典体系具有混沌性的情形下，Gutzwiller 求迹公式为：

$$\rho(E)=\bar{\rho}(E)+2\sum_p\sum_k A_{p,k}\cos\left(\frac{2\pi k S_p}{h}+\alpha_p\right)\ ,$$

其中 h 为普朗克常数，$\bar{\rho}(E)$ 是一个平均密度。我们感兴趣的是第二项，它包含一个对经典极限下所有闭合轨道 p 及正整数 k（沿闭合轨道的绕转数）的双重求和。求和式中的 S_p 是闭合轨道 p 的作用量，α_p 是一个被称为 Maslov phase 的相位。而 $A_{p,k}$ 与闭合轨道的性质有关，可以表示为：

$$A_{p,k}=\frac{T_p}{h\sqrt{\det\left(M_p^k-1\right)}}$$

其中 T_p 是闭合轨道 p 的周期，M_p 则是描述闭合轨道 p 稳定性的单值矩阵（monodromy matrix）。

另一方面，我们也可以计算黎曼 ζ 函数非平凡零点的密度函数：

$$\rho(t)=\sum_n \delta(t-t_n)\ .$$

1985 年，M. V. Berry 给出了这一计算的结果：

$$\rho(t)=\bar{\rho}(t)-2\sum_p\sum_k \frac{\ln(p)}{2\pi}\exp\left(-\frac{k\ln(p)}{2}\right)\cos\left[kt\ln(p)\right]$$

要注意的是，这里的 p 是素数而非一般的自然数！将这个结果与前面有关量子体系能级密度的计算相比较，我们发现为使两者一致，必须：

$$\alpha_p=\pi,\quad T_p=\ln(p),\quad S_p=\frac{ht}{2\pi}T_p\ ,$$

$$A_{p,k}=\frac{T_p}{2\pi\exp\left(kT_p/2\right)}$$

这其中最简洁而漂亮的关系式就是 $T_p=\ln(p)$，它表明与黎曼体系相对应的经典体系具有周期等于素数对数 $\ln(p)$ 的闭合轨道！这无疑是这一体系最奇异的特征之一。

研究黎曼体系的努力仍在继续着，在一些数学物理学家心目中，它甚至已经成为了一种证明黎曼猜想的新的努力方向，即物理证明。会不会有一天人们在宇宙的某个角落里发现一个奇特的物理体系，它的经典基本周期恰好是 ln2, ln3, ln5, ...？或者它的量子能谱恰好包含 14.1347251, 21.0220396, 25.0108575, ...？我们不知道。也许并不存在这样的体系，但如果存在的话，它无疑将是大自然最美丽的奇迹之一。只要想到象素数和黎曼 ζ 函数非平凡零点这样纯粹的数学元素竟有可能出现在物理的天空里，变成优美的轨道和绚丽的光谱线，我们就

Riemann

玻尔
Harald August Bohr

兰道
Edmund G. H. Landau

不能不惊叹于数学与物理的神奇，惊叹于大自然的无穷造化。而这一切，正是科学的伟大魅力所在。

22 玻尔－兰道定理

在前面的 21 节里，我们介绍了黎曼 ζ 函数的定义及其零点，介绍了它们与素数分布之间的关联，也介绍了黎曼 ζ 函数非平凡零点的计算。沿着零点计算这一方向，我们介绍了人们对零点分布的统计研究，以及由此而发现的零点分布与物理之间出人意料的关联。这无疑是整个旅程中最令人惊叹的风景，事实上也正是这一段风景使我萌生了写作这一系列的念头，从而使得整个旅程成为可能。

看过了这些风景，现在让我们重新回到纯数学的领地中来。从纯数学的角度讲，对一个数学猜想最直接的研究莫过于是寻求它的证明（或否证）。可惜的是，黎曼猜想直到今天也还没有一个得到数学界公认的证明（或否证）。因此我们所能介绍的只是数学家们试图逼近黎曼猜想——或者说逼近 critical line——的过程。

在前面各节中，我们曾经介绍过两个具有普遍意义的零点分布结果。一个是第五节中提到的：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ 的区域内。这是欧拉乘积公式 的一个简单推论。另一个则是第七节中提到的：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 的区域（即 critical strip）内。这是在证明素数定理的过程中由阿达马（Jacques Hadamard，1865-1963）与 de la Vallée-Poussin 所证明的，比前面的结果略进一步，时间是 1896 年。这两个结果与黎曼猜想虽然还相距很远，但它们是普遍而严格的结果，适用于所有的零点，在这一点上远远胜过有关

注 22.1

在 1914 年之前也有过一些值得一提的结果，比较著名的一个是 Ernst Lindelöf (1870-1946) 于 1908 年提出的有关虚部 t 趋于无穷时 $|\zeta(\sigma+it)|$ 渐进行为的猜想——Lindelöf 猜想 。1918 年 Backlund 证明了 Lindelöf 猜想等价于这样一个命题：黎曼 ζ 函数在复平面上 $\{1/2<\sigma\le\mathrm{Re}(s)\le 1, T\le t\le T+1\}$ 的非平凡零点数目为 $N(\sigma,T)=o(\ln T)$。读者们可以对比第五节中黎曼三个命题中的第一个来思考一下这一猜想的含义。不过 Lindelöf 猜想虽然远比黎曼猜想弱，其证明却困难得出乎意料，直到今天也还只是一个猜想 (1998 年 N. V. Kuznetsov 曾提出过一个长达 89 页的证明，但后来被发现是错误的)，因此我们只在这里简略地提一下。

Riemann

零点的数值计算。

在阿达马与 de la Vallée- Poussin 之后的第十八个年头，即 1914 年，数学家们在零点分布的研究上又取得了两个重大进展[注 22.1]。取得这两个重大进展的数学家正是我们在旅程伊始提到的哈代（Godfrey Harold Hardy，1877-1947），玻尔（Harald August Bohr，1887-1951）和兰道（Edmund Georg Hermann Landau，1877-1938）。在本节中我们先来介绍玻尔与兰道的工作，即玻尔 - 兰道定理。

但是在介绍玻尔 - 兰道定理之前，让我们先对零点分布的基本对称性做一个简单分析。我们在 [注 8.1] 中曾经提到黎曼 ζ 函数在上半复平面与下半复平面的非平凡零点是一一对应的。具体地讲，这种一一对应是通过以 s=1/2（即实轴与 critical line 的交汇点）为原点的反演对称性实现的。这种对应性来源于零点与黎曼 ζ 函数非平凡零点重合的函数 $\xi(s)$ 所满足的关系式 $\xi(s)=\xi(1-s)$（参阅第五节）。除了这一反演对称性外，黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布还满足一个对称性，那就是关于实轴的反射对称性。这是由于 $\xi(s)$ 除满足 $\xi(s)=\xi(1-s)$ 外，还满足一个关系式：$\overline{\xi(s)}=\xi(\bar{s})$（请读者自行证明）。由这两个对称性可知黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布相对于 critical line 也具有反射对称性。这些对称性的存在表明：要研究零点的分布，只需研究 critical strip 的四分之一，即 $\{\mathrm{Re}(s)\geq 1/2,\ \mathrm{Im}(s)\geq 0\}$ 的区域就行了。我们以前介绍过的零点计算就是针对这一区域的，下面要介绍的玻尔 - 兰道定理的表述也是如此。

玻尔与兰道所证明的是这样一个定理：

玻尔 - 兰道定理：如果 $|\zeta(s)|^2$ 在直线 $\mathrm{Re}(s)=\sigma$ 上的平均值对 $\sigma>1/2$ 有界，且对 $\sigma\geq\sigma_0>1/2$ 一致有界，则对于任何 $\delta>0$，位于 $\mathrm{Re}(s)\geq 1/2+\delta$ 的非平凡零点所占的比例为无穷小。

注 22.2

玻尔与兰道实际证明的结果比这更具体，他们证明了对于任何 δ>0，位于 $\{\mathrm{Re}(s)\geqslant 1/2+\delta, 0\leqslant t\leqslant T\}$ 的非平凡零点的数目不超过 KT(从而所占的比例为无穷小——请读者思考这是为什么？)。

这里我们所用的表述与玻尔与兰道所用的略有差异。他们的表述是针对 $(1-2^{1-s})\zeta(s)$ 的平均值而给出的。在进一步讨论之前，我们先来解释或定义一下定理中所涉及的一些术语。首先解释一下什么叫做“$|\zeta(s)|^2$ 在直线 $\mathrm{Re}(s)=\sigma$ 上的平均值”。这个平均值是由

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T-1}\int_1^T\left|\zeta(\sigma+it)\right|^2 dt$$

来定义的。这个定义与函数平均值的普遍定义 —— 即函数在区间上的积分除以区间的长度 —— 是完全一致的。只不过由于 $\mathrm{Re}(s)=\sigma$ 的长度无限，因此在定义中涉及一个极限。此外由于我们真正关心的是 t 很大的区域，因此积分下限的选择并不重要，为了避免 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 处的极点对定理的表述造成不必要的麻烦，我们选了一个非零的积分下限。

其次，什么叫做 $|\zeta(s)|^2$ 在直线 $\mathrm{Re}(s)=\sigma$ 上的平均值“对 $\sigma>1/2$ 有界，且对 $\sigma\geq\sigma_0>1/2$ 一致有界”？“对 $\sigma>1/2$ 有界”很简单，就是说对任何 $\sigma>1/2$，存在常数 T_0 及 C 使得：

$$\frac{1}{T-1}\int_1^T\left|\zeta(\sigma+it)\right|^2 dt<C$$

对所有 $T>T_0$ 成立。而“对 $\sigma\geq\sigma_0>1/2$ 一致有界”是说对任何 $\sigma_0>1/2$，存在与 σ 无关的常数 T_0 及 C 使得上式对所有 $\sigma\geq\sigma_0$ 及 $T>T_0$ 都成立。

最后，“位于 $\mathrm{Re}(s)\geq 1/2+\delta$ 的非平凡零点所占的比例为无穷小”指的是位于 $\{\mathrm{Re}(s)\geq 1/2+\delta,\ 0\leq t\leq T\}$ 的非平凡零点的数目与位于 $\{\mathrm{Re}(s)\geq 1/2,\ 0\leq t\leq T\}$ 的非平凡零点的数目之比在 $T\to\infty$ 时趋于零[注 22.2]。

现在我们对玻尔 - 兰道定理的字面含义已经有了一些了解。它实质上是在 $|\zeta(s)|^2$ 的平均值与 $\zeta(s)$ 的零点分布之间建立了一种联系。这种存在于复变函数的模与零点之间的关联并不鲜见，1899 年 J. L. Jensen 提出的 Jensen 公式就是一例，它把一个亚纯函数（Meromorphic Function）在一个圆域内的零点和极点与函数的模在圆域边界上的性质联系在了一起。这一公式也正是玻尔与兰道在证明他们的定理时用到的主要公式。

Riemann

很明显，我们感兴趣的是玻尔 - 兰道定理中有关非平凡零点分布的叙述，即“对于任何 $\delta>0$，位于 $\mathrm{Re}(s)\geq 1/2+\delta$ 的非平凡零点所占的比例为无穷小”。但是这一叙述是否成立还有赖于玻尔 - 兰道定理的前提，即“$|\zeta(s)|^2$ 在直线 $\mathrm{Re}(s)=\sigma$ 上的平均值对 $\sigma>1/2$ 有界，且对 $\sigma\geq\sigma_0>1/2$ 一致有界”的成立与否。

幸运的是，这一前提可以证明是成立的。为了看到这一点，我们来分析一个比较简单的情形，即 $\sigma\geq\sigma_0>1$ 的情形。用我们在上文提到的关系式 $\overline{\xi(s)}=\xi(\bar{s})$，及 $\sigma>1$ 时 $\zeta(\sigma+it)$ 的级数展开式 $\sum_n n^{-\sigma-it}$ 可得：

$$|\zeta(\sigma+it)|^2=\zeta(\sigma+it)\zeta(\sigma-it)=\sum_n\sum_m n^{-\sigma-it}m^{-\sigma+it}\ .$$

另一方面，由于 $\sigma\geq\sigma_0>1$ 时 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 处的极点对计算没有影响，因此我们可以将 $|\zeta(\sigma+it)|^2$ 的平均值定义中的积分下限取为 $-T$（相应的将 $1/(T-1)$ 改为 $1/(2T)$）以利于计算积分（这里再次用到了 $\overline{\xi(s)}=\xi(\bar{s})$）。将上面有关 $|\zeta(\sigma+it)|^2$ 双重求和表达式代入平均值的定义，并先交换积分与求和的顺序，再交换求和与极限 $T\to\infty$ 的顺序（请读者自行证明这样做的合理性），可以发现只有 $m=n$ 的项才对结果有贡献，而它们的贡献一致收敛于 $\sum_n n^{-2\sigma}=\zeta(2\sigma)$（请读者自行证明）。这表明对所有 $\sigma\geq\sigma_0>1$ 玻尔 - 兰道定理中的前提都是成立的。

显然这样的简单证明不适用于 $\sigma\leq 1$ 的情形（因为 $\zeta(\sigma+it)$ 的级数展开式不再适用），但我们可以注意到证明结果中的 $\zeta(2\sigma)$ 对所有 $\sigma>1/2$ 都有意义。因此读者们也许会猜测这一结果的适用范围可以由 $\sigma\geq\sigma_0>1$ 拓展到 $\sigma\geq\sigma_0>1/2$。事实也正是如此。可以证明，对于任何 $\sigma_0>1/2$ 及 $\varepsilon>0$，存在与 σ 无关的常数 T_0 使得：

$$\left|\frac{1}{T-1}\int_1^T|\zeta(\sigma+it)|^2dt-\zeta(2\sigma)\right|<\varepsilon$$

对所有 $\sigma\geq\sigma_0$ 及 $T>T_0$ 都成立。这一结果显然表明（请读者自行证明）玻尔 - 兰道定理中的前提成立。这一点在玻尔 - 兰道定理之前就已经被证明，并出现在 1909 年出版的兰道的名著《素数分布理论手册》中。

既然前提成立，那么玻尔 - 兰道定理的结论也就成立了。这样我们就得到了继阿达马与 de la Vallée-Poussin 之后又一个有关零点分布的结果：对于任何 $\delta>0$，位于 $\mathrm{Re}(s)\geq 1/2+\delta$ 的非平凡零点所占的比例为无穷小。或者换句话说，在包含 critical line 的无论多小的带状区域中都包含了几乎所有的非平凡零点。

看到这里，有些读者也许会问：既然包含 critical line 的无论多小的带状区域都包含了几乎所有的非平凡零点，那么通过将这个带状区域无限逼近 critical line，我们是不是就可以把那些零点“逼”到 critical line 上，从而证明几乎所有的非平凡零点都落在 critical line 上呢？很遗憾，我们不能。事实上单单从玻尔 - 兰道定理所给出的描述中我们不仅无法证明几乎所有的非平凡零点都落在 critical line 上，甚至无法证明哪怕有一个零点落在 critical line 上！零点的分布完全有可能满足玻尔 - 兰道定理所给出的描述，却没有一个真正落在 critical line 上（请读者想一想这是为什么）。这是数学中与无穷有关的无数微妙细节中的一个。

但尽管如此，玻尔 - 兰道定理对非平凡零点分布的描述比十八年前阿达马与 de la Vallée-Poussin 所证明的结果还是要强得多。它虽然没能直接证明 critical line 上有任何零点（阿达马与 de la Vallée-Poussin 的结果也同样不能证明这一点），但它非常清楚地显示出了 critical line 在非平凡零点分布中的独特地位，即 critical line 起码是黎曼 ζ 函数非平凡零点的汇聚中心。这是一个沉稳而扎实的进展，数学家们正在一步步地逼近着 critical line。

未完待续

我们与数学强国的差距

——关于我国数学发展的点滴思考

马志明

很高兴今天能够有机会来到北京交通大学，跟我们的老师们、同学们做一点学术交流。在今年6月4日天元基金成立20周年的纪念会上，我在会上做了这个汇报，讲我们中国数学目前在世界上的地位，以及我们的差距。讲下来好像反响还不错，大家觉得听了我的报告后对中国数学在国际上的学术地位有了更多的了解。我现在是国际数学联盟的副主席，参与了国际数学联盟的一些活动，所以我了解的一些情况也比较多一些，可以多给大家提供一点信息。

目前我们中国的数学在国际上是个什么地位？总起来说，我认为中国的数学已经取得了很大的进步，我们在国际数学界已经有了一定的地位，在一些研究方向上达到国际先进水平或者居于国际领先地位。我们可以回顾一下，8年以前，2002年我们开了一个非常盛大的国际数学家大会，有4000多人来参会，江泽民主席亲自出席了我们的开幕式并且为Fields奖颁奖。我们的2002年国际数学大会（ICM2002），确实得到了党和国家的高度重视，全国数学家也很争气，会议办得非常成功。2002年的北京国际数学家大会，凝聚了数辈华人数学家的愿望和心血。ICM2002的成功，是全国数学界，包括政府各部门和海外华人齐心努力的结果。ICM2002对中国数学发展的深远影响已经展现并将继续展现，将永远载入中国数学发展的史册。

2002年数学家大会以后，我被选为国际数学联盟的委员，任期四年，四年之后，我又被选为国际数学联盟的副主席，任期也是四年，到今年年底。在这期间通过参加国际数学联盟的活动，我深深地感到我们中国数学的地位是在不断提高。首先，我认为我自己能够进入国际数学联盟做委员，做副主席，这就是中国数学地位在国际上提高的一个体现。这不代表我个人有多大的成就，而是体现了我们中国数学界已经强大起来了，国际数学界的朋友看到了中国的数学是一支不可忽视的力量。实际上，环顾全球，在所有的国际数学科学及相关领域的学术会议上都有中国数学家（包括海外的华人华裔）作报告，在国际数学科学及相关领域的杂志上都有中国数学家的文章，不少中国数学家被邀请在国际学术刊物担任编委，在国际学术组织里担任一定职务，等等。这些都说明我们中国数学确实正在走向世界，说明我们的国际影响有了很大的提高。

再举一个例证，2006年12月我收到日本《数学通讯》（由日本数学会主办）的主编发来的邮件，邀请我撰稿介绍中国数学发展现状，因为“中国数学近年来发展迅速，并在国际上产生强烈影响”。这个话不是我们自己说的，而是国际友人说的。这也说明我们在国际数学界的地位已经有了很大的提高。我写了一篇题为“中国数学若干状况”的文章，刊登在2007年的日本《数学通讯》第12卷第1期。文章的基本观点与我前面讲的一样，认为中国数学已有了很大的发展。作为例证，我特别提到我们概率与随机分析的几位同事，我们的严加安、陈木法，和彭实戈。我在文章中说，我为他们而感到骄傲，他们为概率与随机分析的发展而做出贡献，毫无疑问他们是世界知名的具有国际学术水平的概率学者。我提到的这几位同事确实在概率论领域做出了很大成就。例如，彭实戈从倒向随机微分方程，到金融数学，到非线性期望，他发展了一个新的研究方向，在国际上已经有

2002 年的北京国际数学家大会

不少的数学家在他发展的方向上做研究。他今年将在印度国际数学家大会上做一小时报告，这是我们国内本土培养起来的并在国内工作的第一位在国际数学家大会做一小时报告的数学家。再如，陈木法的概率论与随机分析，从王梓坤院士、严士健先生到陈木法，到现在陈木法手下的很多年轻人，北京师范大学的概率论与随机分析学派在国际上被称为中国学派，具有相当的影响。陈木法院士今年当选为第三世界科学院院士。又如，严加安对国内概率论发展的贡献，在我刚进入科学院作研究生时就学习他的专著，受他的影响。在金融数学领域有“Kreps Yan 引理”，另外还有好几个定理或引理都是用严加安命名的。严加安院士今年当选为数理统计学会（IMS）的 Fellow。我们的这些学者都是当之无愧的国际知名学者。我只举了概率领域的例子，实际上在数学的其他分支，不仅仅是数学，还有其他的科学领域，我们都有这样做得非常好的具有国际学术水平的专家、学者。我认为我们应该有这样的胸怀和气魄，应该理直气壮地在国际论坛上讲，我们有世界知名的具有国际水平的专家。我们不要谦虚，要积极地实事求是地宣传我们的成就，让国际学术界了解我们，了解我们中国的数学正在走向世界。我们在国际上作学术交流的时候，应该有自信，应该是平等的、双向的交流；国外有好的，比我们强的，我们要向他们学习；但我们也有好的、也有强的，我们就要积极地在国际上宣传。就目前来说，我们和数学强国还有差距，但中国数学在国际数学界已经有了一定的地位，有了一席之地。

我作为国际数学联盟的执委或副主席，参与了国际数学联盟的一些活动，在这里做一个简略汇报。我最大的体会是，国际数学联盟是一个相当民主的机构。对于国际数学的事务，大家发表各自的看法与建议，有了不同的意见，大家沟通协商解决，或者投票解决。各国数学家都是平等交流，不论投票结果如何，彼此都不伤和气。

2008 年 1 月，在编辑的邀请下，我以国际数学联盟副主席的名义在国际数学联盟办的电子通讯第 27 期发表了一个编辑部前言（Editorial）。文章不长，现照录于此与大家分享（原文见 http://www.mathunion.org/Publications/Newsletter/）。

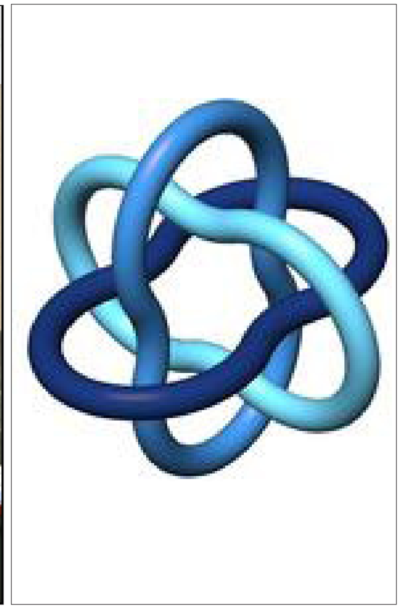
Editorial：

在所有活动中，由国际数学联盟（IMU）支持和协助的国际数学家大会（ICM）是最重要的活动。不必说，每一届 ICM 应反映当今世界最好的数学工作——这已成为 ICM 的显著特点和悠久传统。同时我们必须确保每一届 ICM 应该展现所有数学分支及世界不同地区得到的最好工作。这样，ICM 就名副其实是公认的全世界数学家的最高等级的学术盛会。自然，ICM 的意义并不局限于此，它也提供一个重要机会，以精彩场面展示当代数学最为显著而重要的部分、以及她对人类社会的影响和力量，而这又反过来为数学的进一步发展带来更大的激励。2006 年在 Santiago de Compostela 举行的第十五届会员大会批准了新的程序委员会 / 组织委员会工作条例，该条例规范了筹办 ICM 的各个方面的作用和工作内容。会员大会并授权 IMU 执委会负责适时地修订该条例。在 IMU 执行委员会于 2007 年 11 月 21 日签署的目前执行的工作条例中，将 ICM 的功能描述如下：

“国际数学家大会是最重要的 IMU 活动，需要相应仔细的准备。每一届 ICM 应反映世界当前的数学活动，展现所有数学分支及世界不同地区进行的最好的工作，从而指引未来的数学发展方向。被邀请在 ICM 作演讲的学者应具备最高的数学水平、能向广泛的数学听众介绍当前的研究工作”。

“程序委员会 / 组织委员会工作条例”目前版本的详细内容可见 IMU 网

国际数学家联盟主席(左),秘书长(中)和副主席(马志明,右)宣布 2014 年国际数学家大会在韩国首尔举行



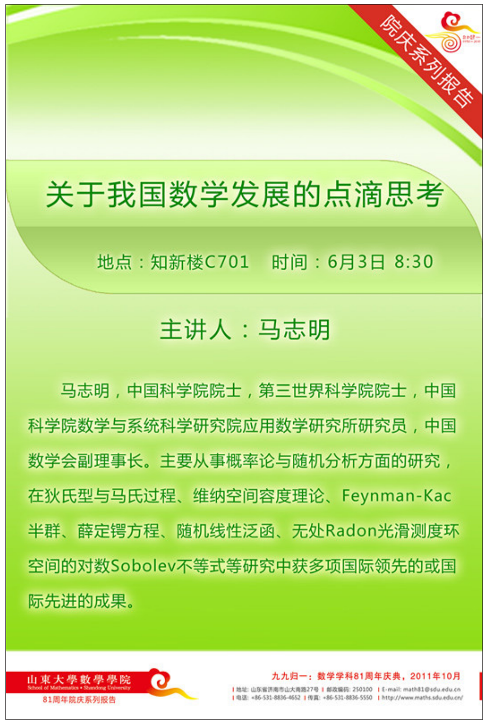
国际数学联盟(IMU)会标

站 http://www.mathunion.org/icm/pc/

马志明
国际数学联盟执行委员会副主席

我在 Editorial 中提到“程序委员会/组织委员会工作条例”(PC\OC Guidelines),是指国际数学家大会的程序委员会和组织委员会的工作条例。程序委员会负责遴选在国际数学家大会上做一小时报告、45 分钟报告的数学家。程序委员会由国际数学联盟执委会确定。我在担任国际数学联盟执委时,参与了“程序委员会/组织委员会工作条例”的修改工作。当时成立了一个以 Martin Groetschel、Ragni Piene 和我三人组成的条例修改小组,修改文本由挪威的女数学家 Ragni Piene 起草。修改小组的文本经过 IMU 执委会讨论通过后,提交 IMU 会员大会投票批准成为正式文本。在修改的条例中关于国际数学家大会的定位,认为数学家大会应该展现所有数学分支及世界不同地区进行的最好的工作。我的理解,不同地区就不能只是欧洲和美洲,在欧洲、美洲、亚洲、澳洲、拉丁美洲、非洲等不同地区的最好数学成果都应该有机会在数学家大会展现,这就是不同地区的含义。还要展现所有数学分支的最好研究成果。事实上当代数学的发展越来越呈现多样性和统一性的特征,不同数学分支相互交叉、融合,而且还不断出现新的研究方向或新的数学分支。因此数学家大会一定要展现所有数学分支的最好成果。新修订的条例对国际数学家大会的定位更加准确和合理。我认为国际数学联盟越来越成熟,越来越民主了。以我们中国为例,大家看到,今年我们中国数学家有 6 位要在国际数学大会上做报告,其中包括彭实戈的一小时报告,还有 5 个 45 分钟报告。过去做 45 分钟报告对于中国数学家来说是非常稀罕的事。记得在 1994 年,我被邀请在国际数学大会上做 45 分钟报告,那时候的报道说我们中国只有 6 位数学家华罗庚,陈景润,吴文俊,冯康,张恭庆,马志明被邀在国际数学大会上做报告。这一方面说明那时候我们的数学不是特别发达,另一方面是由于国际学术界对我们中国的数学不是十分了解,也是因为那时国际数学联盟没有明确国际数学家大会要展现世界不同地区的数学。新的章程还规定在挑选程序委员会成员的时候,一定要包括发展中国家的数学家和女数学家。这样,在组织程序上使得世界不同地区的最好数学成果能被程序委员会注意到。修改的 PC\OC Guidelines 在国际数学联盟的官方网站上已全文发表,有兴趣的老师和同学可以从网上下载。

另外,我还两次参与了国际数学家大会会址的考察。记得当年争取在中国召开世界数学大会时,我们中国的数学界作了非常大的努力。经过激烈的竞争,98 年国际数学联盟会员国大会投票确定 ICM2002 在北京召开,在那之前我们在 94 年也申办过,但没有成功。 为了申办 ICM, 当时全国的数学界作了很大的动员,我那时刚刚研究生毕业,很被当时的气氛所感染。



马志明的相关演讲

申办国际数学家大会，就像申办奥运会一样。申办国的数学家先要提出申请，国际数学联盟成立选址委员会 (site committee)，选址委员会要去申办所在国进行考察。我有幸参加了两次考察工作，第一次是参加了印度和加拿大的考察，考察之后，国际数学联盟决定支持在印度召开 2010 年的国际数学家大会。第二次是我做副主席的时候，参与了韩国的考察，最后国际数学联盟推荐韩国首尔作为 2014 年的国际数学家大会举办地。其实申办 ICM2014 的竞争非常激烈，与韩国同时竞争申办的还有加拿大和巴西。巴西是南美洲国家，ICM 从来没有在南美洲举行，并且巴西的申办准备工作也做的很好。但韩国竞标的力度和准备工作做的非常好，他们动员政府和民众做了充分的准备。我们去考察时，韩国的总理亲自出面接见我们这个考察团。科技部长和首尔市长也都分别接见了我们，而且开了一个很隆重的新闻发布会，请了很多新闻媒体，要我们当场和他们的记者谈我们的考察观感。韩国数学会承诺，如果 ICM2014 在首尔举行，他们将资助 1000 名发展中国家的数学家来参会。韩国数学同事的申办热情深深地感动了我们。国际数学联盟执委经过认真讨论后决定推荐首尔作为 2014 年的国际数学家大会举办地。作为亚洲的数学家，我感到非常高兴，国际数学家大会 2002 年在我们中国开，2010 年在印度开，2014 年将在韩国开。这说明不仅是我们中国，亚洲的数学也在崛起。

还有一件值得一提的事。去年，我们邀请国际数学联盟的执委们来中国福州开执委会，随后我们在厦门召开中国数学会年会，到会的执委都在年会上作了大会报告，这对于我们加强国际学术交流与合作起了很大的促进作用。

总体来说，我们中国的数学正在走向世界，我们应该看到我们的成绩，要实事求是，戒骄戒躁，也不要妄自菲薄。我们要挺起腰杆儿做数学研究。在与国际数学界交往时要不卑不亢。在学术成就上，你做的比我好，我就向你学习，我做的比你好，你应该向我学习。但无论是你的学术比我强，还是我的学术比你强，我们在人格上是一样的，在讨论问题的时候是平等的。即使有些国外的数学家，他的学术水平非常高，可能比我们强，但是在人格上我们是平等的，应该是相互尊重。我们正在走向世界，中国一定会成为数学强国。

前面谈的是我们的成绩，下面谈谈我们的差距。我们不能夜郎自大地说自己已经是数学强国了，不是的，虽然差距越来越小，但我们与数学强国还有距离。最主要的差距是我们缺乏引领国际数学研究方向的强有力的学术领军人物，缺乏大师级的数学家，具有特色的中国学派在国际上的影响还不是很强。

请注意我在这里加了好几个形容词，我说我们缺乏引领国际数学研究方向的强有力学术领军人物，也就是说我们还是有学术领军人物的，比如说彭实戈，他算是国际上的学术领军人物，但还不是那种强有力的，虽然他的威望非常高，可也还没有做到这一点。我们缺乏大师级的数学家，中国学派在国际上的影响还不是很强。对此我有一些亲身的体验，我们现在所做的研究工作，做得好还是不好，做得到位还是不到位，好像总是要听外国人的，外国人说好才是好。我希望今后在一些研究方向上，我们中国人能够并应该做到这样的程度：只要我们说好，外国人也就认为好。比如说微分几何方面的工作，陈省身在世的时候，陈省身说好，学术界都会相信。实际上强有力的学术领军人物是客观存在的，不是选出来的，学术权威是自然而然形成的。比如日本的伊藤清，他是著名的伊藤公式的创始人。又比如说 Malliavan，他是著名的 Malliavan 算法的创始人。这些重量级的学术领军人物，他们对学术方向的判断，对相关学术研究成果的评价，相对来说比较科学（虽然也难免带有个人因素），学术界也比较相信。我希望我们中国本土也能出现这样的学术领军人物，而我们现在就缺乏这样的人——缺乏强有力的学术领军人物。举例来说，在数学界谁要是得了菲尔兹奖，那可是非常了不起。而菲尔兹奖的评奖委员会，是由国际数学联盟来决定的；还有阿贝尔奖，被誉为是数学界的诺贝尔奖，每届的阿贝尔奖评选，国际数学联盟可以推荐两位给阿贝尔奖的评奖委员会。国际数学联盟还要推举国际数学家大会的程序委员会。在 IMU 执委会上，我非常想把我们中国的数学家推荐到相关的委员会里，但是常常苦于我们没有合适的人选。这也说明我们还不是数学强国，这就是我们与数学强国的一个差距。

著名数学家吴文俊院士

在这里我愿意用吴文俊先生的一段语重心长的非常重要的话，与我们的老师和同学共勉。吴文俊先生在不同场合多次说：“我们做的很出色，可是领域是人家开创的，问题也是人家提出来的，我们做出了非常好的工作，有些把人家未解决的问题解决了，而且在人家的领域做出了使人家佩服的工作。可是我觉得还不够，我们应该开创我们自己的领域，我们要提出我们自己的问题来。从长远看我们要创新，我们要有自己的路，我们要有自己的方向，自己的思路，不能完全跟着别人。”吴文俊先生的教诲，对中国数学的发展具有极强的现实的指导意义，也真正指出了我们与数学强国的差距。我们要想真正成为数学强国，就要做到吴文俊先生说的，要有我们自己的方向，自己的思路，我们一定要努力开创我们自己的领域，使中国的数学真正进入国际先进的行列。

具体要怎样做才能在较快的时间达到数学强国，我谈一下自己的点滴想法，主要讲两个方面，一个是外部环境，我们希望有一个好的外部环境，营造出良好的科研氛围；另一个方面就是从我们自己的角度来谈，不论外部环境怎么样，我们自己应该淡泊明志，潜心科研。

从外部环境来说，我认为首先要拒绝浮躁。目前我们国家科研环境的物质条件有了很大的改善。与 10 年 20 年前相比，我们的科研经费，科研环境，科研人员的生活条件都比以前提高了很多。特别是我们现在的科研经费已有大幅度增长。10 年前科研经费还是一个瓶颈问题，现在则不是大问题了。比如科研人员出差开会的经费，现在一般都不会短缺。但是物质条件的改善，并不等于我们的科研环境就好了，我们的科研环境还有很多不尽如人意的地方。主要表现为急功近利和不恰当的评价体系。

关于急功近利，我们现在有各种各样的奖项，有各种各样的评估，博士学位点，重点学科、一级学科，还有百篇优秀博士论文，有长江计划，百年计划，千年计划，层出不穷，还不断的翻新。而我们的科研人员，很多时候是在浪费时间，在填写各种各样的表格，写计划写汇报，争取各种各样的名目和奖项，应付各种各样的评估和答辩，等等。这些都是浮躁的表现，急功近利的表现。这一切都不



左起依次为：S.Albeverio，马志明，M.Roeckner

同程度地影响到我们的科研和教学。事实上，在当前社会浮躁的环境下，我们的科研人员时常不得不做这些无用功。比如博士学位点，与学校或学院的许多其它利益都挂钩。我曾经是学科评定委员会的委员，我很体谅我们的校长们、院长们。他们身在其位，为了学校或学院的利益，不得不想尽办法跑学位点，他们真的很苦。

关于评价体系。我认为不恰当的科研评价体系 , 包括不恰当的教学评估，妨碍了我们正常的教学，妨碍了我们正常的科研。这与目前我国科技界出现的一些问题有十分密切的联系。例如，最近出现很多学术造假的现象，这主要是评价机制单纯追求论文数量和引用数量的结果。在科技部公布的国家自然科学奖定量评价指标体系中，专门列有一条"主要论文发表刊物和专业著作"的影响，权威杂志 5-4 分，一般学术刊物 2-1 分，如此等等。这样的评价指标不仅不合理，而且有害。目前我们国内的学术刊物，例如《中国科学》、《数学学报》，苦于不能吸引高质量的优秀学术论文，这个错误的评价指标就是诱导原因之一。我举个例子，这是个尽人皆知的事，佩雷尔曼证明了庞加莱猜想，并获得了菲尔兹奖，克雷研究所还给了他一百万美元的奖金。而他的文章并没有发表，只是挂在网上。国际数学界并没有因为他的文章没发表，就不承认他的巨大贡献。要放在我们中国的环境，如果佩雷尔曼要报我们的国家奖，肯定不合格，因为文章都没有正式发表。

真正好的学术成果不一定要在国际顶尖杂志上发表。反过来，在国际顶尖杂志发表的文章也不全是很好的文章。我国著名概率统计学家许宝騄大师经常说："一篇文章的价值不是在他发表的时候得到了承认，而是在后来不断被人引用的时候才得到证实"。他还说："我不希望自己的文章登在有名的杂志因而出了名。我希望一本杂志因为刊登了我的文章而出名"。 他的这些言行和教诲，对于目前国内存在的一些不良学术风气，浮躁的科研态度，急功近利，不恰当的评价体系，等等，都具有极强的现实的教育意义。记得在我最初求学的时候，一位我很敬重的老师曾经对我说，许多在杂志上发表的文章，世界上只有三个人看过，一个是作者，另外两个是审稿者，之后就再也没人看了。请我们的老师和同学们查点一下，在你们为应付各种评估而发表的文章中，有多少是世界上只有三个人看过的文章？

再举一件荒唐的例子，一些学校的研究生院规定博士后出站时至少要有两篇以第一作者发表的文章，而以第二作者发表的文章都不算数。

不同的学科领域，对于文章署名的排序有不同行规。我们与微软亚洲研究院合作发表在信息领域的文章，是按照信息领域的行规不依字母排序。而我与合作者在数学领域发表的文章，包括我指导学生在数学领域发表的文章，作者都是以字母为序，此时强调第一作者究竟有什么意义呢？数学领域的文章依作者字母为序署名，是很科学的行规。我们在科研工作中鼓励合作，合作的目的是促进科学发展。在数学研究中也许有的问题你想了很久想不出来，可是你跟同事讨论时，他的一句话或者半句话就能启迪思维，产生突破性的新思想，你能分清他这句话的贡献大小吗？在这样的合作过程中，你一定要分清谁是第一作者谁是第二作者，那真正是影响合作，影响科研。对此我有亲身体会，自从我在 1986 年底到德国洪堡以后，我与我的洪堡导师 S. Albeverio 和他的学生 M. Roeckner 合作的非常成功。我们的合作不分彼此，发表文章从来都是按字母排序，Albeverio 永远排第一，我排第二，Roeckner 排最后。在 1992 年我与 Roeckner 合作写了一本关于拟正则狄氏型的书，此书现在已成为狄氏型领域被经常引用的文献。当时 Springer 排版时把我的名字马志明搞错了，z 成了我的首字母，因此在校样中把 Roekner 排在前面，我排在了后面。我发现这一错误后立刻在国内打长途电话告诉出版商，要他们一定要纠正，要以正确的字母为序把我排在前面。我坚持如果不纠正过来我就不同意出版书。我们坚持以字母为序，也就是不想分彼此，我们互相从来不比谁是第一贡献。所以我们一直合作的很好，

到现在20年了，我们的学生每年都会去德国学习几个月，他们的学生也来中国。这样的合作就是一个对科学的促进。

学术评价的问题不仅在中国有，在国际上也有，是一个普遍的问题，已经引起国际学术机构的关注。前不久，国际数学联盟、国际工业与应用数学委员会和国际数理统计学会联合公开发表了一个《引文统计》报告，对当前科学界盛行的用引文数据评价研究质量的做法提出严重警告。三大国际组织的调研报告认为，在评价科研质量时，引文统计数据可以提供部分有价值的信息。但引文统计数据只能提供有局限的不完整的信息，并且有时被误解或误用。“研究太重要，不能只用单一的粗糙的工具来衡量它的价值。”

我认为对科研工作的评价一定要综合地考察。比如说数学方面的评价，可以综合考虑获国际大奖的情况，参加国际高级学术会议的情况，论文被引用的情况，同行评议情况等等。同时这几个方法也要综合起来用，因为没有哪一个指标能够单独衡量一个科学家或研究机构的研究水平。

不恰当的科研评价体系不仅影响我们现在的科技发展，而且会对我们下一代科研人员的培养造成非常不良的影响。所以，在任何场合我都是大声地疾呼：我们评价的体系一定要改。今年3月，我在全国政协发言时就谈到这个问题。一位记者根据我的发言写成一篇简短报道“科研评价机制改革是为下一代科学家成长铺路”，发表在3月4日的《科学时报》，大家可以找来看看。

前面谈的是外部环境，现在我把话题拉回来，谈谈我们自己应该怎么做。我刚才说了我们的环境是一个浮躁的环境，有一些不利于科研发展，不利于同学们安心学习的因素，主要谈了两个方面。其实还有别的因素，如目前找工作也是一个因素，也影响我们的学习。但我想告诉我们的老师们、同学们，世界上永远没有理想的环境，我们永远不会有完全心满意足的环境。任何时候，环境都会有不尽如人意的地方。所以我们应该以平常心看待不尽如人意的科研环境，不论在什么环境下我们都应该是淡泊明志，宁静致远。潜心做好数学科研和人才培养工作。只要我们自己心静，我们就能做出好的科研成就。

其实包括前面提到的佩雷尔曼，包括我们随机领域所熟悉的伊藤（Kiyosi Ito，高斯奖获得者，在第二次世界大战期间，他在日本的一个统计局里做小职员），都是在逆境当中做出了很多杰出的科研工作。真正给你一个很舒适的环境你还不一定发奋了。最重要的是我们在任何环境下，自己要安心搞科研，安心学习。作为同学们来说，要心静，要在学校里面抓紧时间，学好本领。学好本领不是说一定要学会很多很多的知识，是一定要学会将来进入社会之后怎样继续积累知识。在学校里面学的知识是永远不够的，一个真正有本事的人，真正能做出成就的人，他是善于不断地学习的，在工作环境当中遇到问题他知道要学什么、从哪里去学并学以致用。实际上真正把科研做的好的，不都是从学校里面学来的，很多是后来自己学的。所以我们要记住即使没有理想的科研环境，我们也要厚积薄发，不能只为眼前的一些利益忙忙碌碌，而是要持之以恒。比如说同学们在学习当中会有一些新的想法，就千万不要放过；或者你对某个学科某个方向感兴趣了，认为那是有意义的，你就深入下去，不要被眼前暂时的利益所蒙蔽。当然还有就是要不怕失败，我们要想做好科研工作，进展往往难以预测，需要在宽松环境下长期积累才能取得突破。我们必须尊重科学规律，摒弃急功近利的思想和浮躁的情绪，淡泊明志，潜心做好数学科研和人才培养。

总起来说，我相信我们一定能成为数学强国。我们要与国际同行要加强学术交流，要在国际上竞争。要尽量争取在ICM多做45分钟报告、1小时报告，要争取得到各种国际奖项。为此我们要尽量努力，并且要让国际同行了解我们的科研工作。但是我们作科研工作最根本的目的还不是这些，我们的最根本目的还是要为数学做出贡献，为科学做出贡献，为国家做出贡献。也就是说，我们不要以国际会议的邀请报告，或者国际奖项作为绝对的目标或唯一的评价标准。如果我们能做45分钟报告、能够做1小时报告，或者能够在国际上拿到大奖，这当然是我们民族的荣幸、是我们的骄傲。但是，一定会有许多优秀的成果，优秀的科学家，由于种种原因而没有被邀请作报告，或没有获奖。对一项科研成果的评价，对一个科学家的评价，归根结底还是由社会实践来确定，由它或他对我们民族和国家，对人类社会的影响和贡献来确定。

本文根据作者6月8日在北京交大的报告录音修改而成，作者感谢《数学通报》编辑部的帮助，感谢王海凤、秦华协助整理录音。本文作者马志明院士是中国科学院数学与系统科学研究院研究员。现任中国数学会理事长，国际数学家联盟副主席。

几何之美 2

宗传明

本文受到国家 973 项目 2011CB302400, 国家自然科学基金项目 11071003 和长江学者奖励计划的资助。
作者感谢贾朝华教授和项武义教授的润色建议。
通讯地址：cmzong@math.pku.edu.cn

引言

按照许多数学先哲（如庞加莱，哈代和冯 • 诺依曼等）的观点，数学不仅是一门科学，也是一门艺术。即数学也是一门追求独创和美的学问。

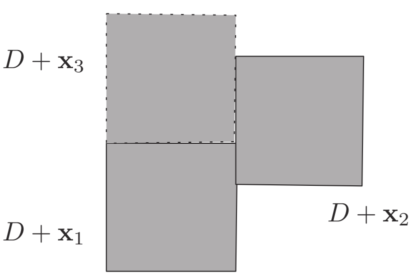
数学中确有一些艺术杰作：自然优美的问题，巧夺天工的构思，荡气回肠的结局。其独创性和优美程度绝不亚于柴科夫斯基的芭蕾舞剧或者雷诺阿的名画，只是对大众来说更难理解和欣赏而已。在这一系列短文中，我们将展示几何学中的几件“艺术珍品”。

对于一个数学家来说，欣赏学习他人的杰作不仅是为了（有可能）直接用到自己的工作中去，更重要的是为了提高修养，开阔眼界。从而使我们远离平庸，接近伟大。

本文将介绍关于立方体的闵可夫斯基猜想和 Keller 猜想。前者由闵可夫斯基（Minkowski，1864-1909）于 1907 年提出，于 1942 年被 Hajós 证明。Hajós 的证明是如此美妙，以至于被 S. K. Stein 比喻为“就像蚕蛹变成蝴蝶的过程一样神奇”。后者由 Keller 于 1930 年提出，是闵可夫斯基猜想的推广，其高维情况于 1992 年被 Lagarias 和 Shor 所否定。Keller 猜想的研究过程比 Hajós 的证明更神奇。

观察

假定 D 是一个单位方块，$X=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots\}$ 是平面 E^2 中的一个离散点集合，$D+X=\{D+\mathbf{x}_i\colon \mathbf{x}_i\in X\}$ 是 E^2 的一个平铺 (tiling)。也就是说，方块 $D+\mathbf{x}_i$ 两两内部互不相交且 $E^2=\bigcup_{\mathbf{x}_i\in X}(D+\mathbf{x}_i)$。如果 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 是 X 中的两个点并且 $D+\mathbf{x}_1$ 与 $D+\mathbf{x}_2$ 有公共点，那么 $(D+\mathbf{x}_1)\cap(D+\mathbf{x}_2)$ 将是 $D+\mathbf{x}_1$ 的一条边或者是一条边的一部分。如果是后者，由于 $D+X$ 是 E^2 的一个平铺，如下图所示一定存在另一个正方形 $D+\mathbf{x}_3$ 与 $D+\mathbf{x}_1$ 相交于一条完整的边。



这样我们证明了如下结论：

> 如果 $D+X$ 构成 E^2 的一个平铺，那么其中必有两个方块具有一条完整的公共边。

在三维欧氏空间 E^3 中。我们假设

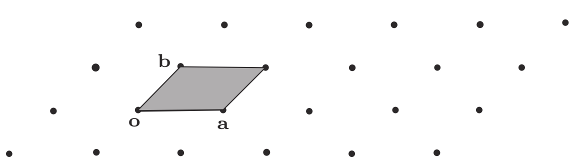
$$C=\{(x_1,x_2,x_3):|x_i|\le 1/2\},$$

X 是一个离散点集合（为了叙述方便，我们假定 $\mathbf{o}\in X$），$C+X$ 是 E^3 的一个平铺。如果 $C+\mathbf{x}$ 碰到 C 的一个顶点 $\mathbf{v}$，那么 $\mathbf{v}$ 可能是 $C+\mathbf{x}$ 的一个面的一个相对内点，或者是它的一条边的一个相对内点，或者是它的一个顶点。如果是第一种情况，通过投影来考虑 $C+X$ 中所有含 $\mathbf{v}$ 的单位立方体（$C+\mathbf{x}$ 除外）可以证明其中必有一个与 C 有一个完整的公共面。这样，假设 $C+X$ 中不存在单位立方体既包含 $\mathbf{v}=(1/2,1/2,1/2)$ 又与 C 共面，那么其中一定存在三个立方体 $C+(1,0,t_1)$，$C+(0,t_2,1)$ 和 $C+(t_3,1,0)$，其中 $0<t_i<1$。这时，$C+(0,t_2,1)$ 的顶点 $(1/2,t_2-1/2,1/2)$ 一定是 $C+(1,0,t_1)$ 的某个面的相对内点。所以 $C+X$ 中一定有一个立方体与 $C+(0,t_2,1)$ 共面。这样我们证明了如下结论：

> 如果 $C+X$ 构成 E^3 的一个平铺，那么其中必有两个立方体具有一个完整的公共面。

2 闵可夫斯基猜想

我们先介绍几个概念。如果 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ 是 n 维欧氏空间中的 n 个线性无关向量，Z 表示所有整数构成的集合，我们称 $\Lambda=\left\{\sum_{i=1}^n z_i\mathbf{a}_i: z_i\in Z\right\}$ 为一个格并记其基本方体 $P=\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i\mathbf{a}_i: 0\le\lambda_i\le 1\right\}$ 的体积为 $d(\Lambda)$。格是由高斯为推广整数而引入的一个概念。显然，它是非常有规律的集合。在平面中，所有的格（局部）都有如下形状：



如果 K 是一个几何体，X 是一个格并且 $K+X$ 是一个平铺，我们就称其为一个格平铺。我们称两个立方体为一个共面对如果它们有且仅有一个完整的公共面，并且定义单位立方体 $C^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n):|x_i|\le 1/2\}$。

1907 年，闵可夫斯基基于以上观察提出了如下猜想：

闵可夫斯基猜想 E^n 的每一个格平铺 $C^n+\Lambda$ 中都有共面对。

依照上一节的观察，这一猜想很自然，甚至还太保守。实际上，相关的历史非常曲折复杂。也许这正是它的美妙所在。早在 1896 年，闵可夫斯基证明了如下结论：

> 如果 $A=(a_{ij})$ 是一个没有整数列且行列式为 1 的实系数 2×2 矩阵，那么
> $$\begin{cases}|a_{11}z_1+a_{21}z_2|<1\\|a_{12}z_1+a_{22}z_2|<1\end{cases}$$
> 一定有非平凡整数解。

在此基础上，他断言类似的结论对 $n\times n$ 矩阵也是正确的。也就是

闵可夫斯基猜想 * 如果 $A=(a_{ij})$ 是一个没有整数列且行列式为 1 的实系数 $n\times n$ 矩阵，那么

$$\begin{cases}|a_{11}z_1+a_{21}z_2+\cdots+a_{n1}z_n|<1\\|a_{12}z_1+a_{22}z_2+\cdots+a_{n2}z_n|<1\\\qquad\cdots\\|a_{1n}z_1+a_{2n}z_2+\cdots+a_{nn}z_n|<1\end{cases}$$

一定有非平凡整数解。

他自己没有给出这一断言的证明。11 年后，他又将这一分析形式的猜想转述为前面所说的几何形式。下面，我们简要说明一下它们的等价性。

首先，我们定义一个格 $\Lambda=\{\mathbf{z}A: z_i\in Z\}$。由于格点 $\mathbf{z}A$ 的第 i 个坐标即

$$x_i=a_{1i}z_1+a_{2i}z_2+\cdots+a_{ni}z_n,$$

$C^n+\Lambda$ 是一个堆积[注 1]当且仅当分析形式中的不等式组没有非平凡的整数解。另一方面，由于

$$\frac{v(C^n)}{d(\Lambda)}=\frac{v(C^n)}{\det(A)}=1,$$

$C^n+\Lambda$ 将是 E^n 的一个平铺一旦它是一个堆积。

如果分析形式成立并假设几何形式在 $n-1$ 维空间也是对的，那么只要 $C^n+\Lambda$ 是 E^n 的一个格平铺 A 就一定有一整数列且满足

$$(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})=1.$$

假设 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 为满足

$$a_{1i}z_1+a_{2i}z_2+\cdots+a_{ni}z_n=1$$

的一组整数[注 2]，我们定义

$$\mathbf{u}=\sum_{j=1}^{n} z_j\mathbf{a}_j,$$

$$U=\bigcup_{z\in Z}(C^n+z\mathbf{u})$$

以及

$$H=\{\mathbf{x}\in E^n : x_i=0\}.$$

由于 $(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})'$ 是一个整列，容易看出 $C^n\cap H+\Lambda\cap H$ 是 H 的一个格平铺。基于前面的归纳假设，容易看出 n 维的几何形式也一定是对的。

反过来，如果几何形式的猜想是对的，那么通过多次递归我们可以导出 Λ 对应着一个如下形式的矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

也就是说，A 一定有一个整数列。所以，如果 A 没有整数列那么 $C^n+\Lambda$ 就不是一个堆积，从而

$$\begin{cases} |a_{11}z_1+a_{21}z_2+\cdots+a_{n1}z_n|<1 \\ |a_{12}z_1+a_{22}z_2+\cdots+a_{n2}z_n|<1 \\ \cdots \\ |a_{1n}z_1+a_{2n}z_2+\cdots+a_{nn}z_n|<1 \end{cases}$$

一定有非平凡整数解。

注 1

K 是一个几何体，X 是一个离散点集合，如果平移体 K + x_i，$x_i\in X$，两两内部互不相交我们就称 K + X 是 E^n 中的一个堆积。

注 2

它们的存在性是初等数论的一个基本结论。

赫尔曼·闵可夫斯基
Hermann Minkowski (1864-1909)

赫尔曼·闵可夫斯基是历史上最著名的天才数学家之一。他以 18 岁荣获巴黎科学院竞赛大奖（确定了将一个自然数表示为五个平方和的不同种数）成就了一位数学天才的美名。在随后的数学生涯中，他以创立了数学分支“数的几何”而名垂青史。在求学时期闵可夫斯基是一个幸运儿：他曾受教于 Weber，Voigt，Kummer，Kronecker，Weierstrass，Helmholtz 和 Kirchhoff，他的获奖论文曾得到 Jordan 和 Bertrand 的推崇，他与希尔伯特结下的友谊更是数学史中的佳话。可惜他与伽罗华（Evariste Galois，1811-1832），阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802-1829）和黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826-1866）一样英年早逝，给数学史留下了悲壮的一页。去世前，他任哥廷根大学教授，成为哥廷根数学名人中的一员（高斯，狄利克雷，黎曼，克莱因，希尔伯特，闵可夫斯基……）。

数的几何起源于拉格朗日，高斯和埃尔米特关于正定二次型在整点取值的研究。闵可夫斯基观察到一个正定二次型确定了一个椭球和一个格（lattice），椭球是凸几何体的特例，格则是所有整点集合的推广。基于天才的几何直觉，他证明了如下结论：

> 假设 C 是 n 维欧氏空间中一个中心对称的凸几何体（以原点为中心）。如果 C 的体积不小于 2^n，那么除原点外它一定还包含一个整点。

这就是数的几何这一数学分支的基石。这一定理不仅可以导出几乎所有经典丢番图逼近的结论以及关于代数数域中单位元的狄利克雷定理，改进埃尔米特常数的估计，也可以导出拉格朗日的四平方和定理。可见其重要性。

3 Hajós 定理

在历史上，许多著名数学家通过分析的方法研究过这一猜想并证明了 $n \le 9$ 的情况，他们包括 T. Schmidt，O.H. Keller 和 O. Perron。然而，这一方法很难在维数上取得突破。基于 T. Schmidt 等人的工作，匈牙利数学家 Hajós 于 1941 年将这一猜想转换成了如下的代数形式并成功地给出了一个完美的证明。

闵可夫斯基猜想* 假设 G 是一个有单位元 $\mathbf{1}$ 的有限阿贝尔群。如果 $\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_n$ 是 G 中的 n 个元素，$q_1, \cdots, q_n$ 是 n 个正整数使得 G 中的每一个元素都可以唯一地表示为

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{g}_i^{z_i}, \quad 0 \le z_i \le q_i - 1,$$

那么 $\mathbf{g}_i^{q_i} = \mathbf{1}$ 对某一个指标 i 成立。

由于形式上的差异，人们很难想象这一代数形式与原来的猜想会是等价的。的确，导出它们的等价性也确实是非常困难。但道理上也不是完全不着边际。

首先，如我们介绍格的定义时所说，格本身是一个阿贝尔群。如果 Λ 是一个有理格，也就是它的基的坐标都是有理数

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{q_{11}}{p_{11}}, \frac{q_{12}}{p_{12}}, \cdots, \frac{q_{1n}}{p_{1n}}\right),$$

$$\mathbf{a}_2 = \left(\frac{q_{21}}{p_{21}}, \frac{q_{22}}{p_{22}}, \cdots, \frac{q_{2n}}{p_{2n}}\right),$$

$$\cdots$$

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{q_{n1}}{p_{n1}}, \frac{q_{n2}}{p_{n2}}, \cdots, \frac{q_{nn}}{p_{nn}}\right) \cdots$$

其中 $(q_{ij}, p_{ij}) = 1$。那么我们定义 [注 3]

$$d_i = [p_{1i}, p_{2i}, \cdots, p_{ni}],$$

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{d_i}\mathbf{e}_i,$$

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in E^n : 0 \le x_i \le \frac{1}{d_i} \right\},$$

以及

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{v}_i : z_i \in Z \right\}.$$

可见 $P + \Gamma$ 是 E^n 的一个格平铺，并且 Λ 是 Γ 的一个子格。所以我们得到了一个商群

$$G = \Gamma / \Lambda = A_1 + A_2 + \cdots + A_n,$$

其中

$$A_i = \left\{ \bar{\mathbf{o}}, \bar{\mathbf{v}}_i, 2\bar{\mathbf{v}}_i, \cdots, (d_i - 1)\bar{\mathbf{v}}_i \right\},$$

$\bar{\mathbf{v}}_i$ 表示 $\mathbf{v}_i$ 产生的陪集。如果某一 A_i 是 G 的一个子群，那么 $C^n + \Lambda$ 中就出现共面对。 这是理解这两种形式的等价性最关键的一点。当然，我们还需要证明：

> 如果存在一个无共面对的格平铺 $C^n + \Lambda$，那么一定存在一个没有共面对的有理格平铺。

这是由 Schmidt 发现的。

要证明闵可夫斯基猜想的代数形式，我们还需要引进一个重要的概念。假设 G 是一个阿贝尔群，在它的基础上我们定义一个环

$$\Re(G) = \left\{ \sum z_i \mathbf{g}_i : z_i \in Z ; \mathbf{g}_i \in G \right\},$$

其中加法和乘法分别定义为

注 3

这里 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数。

$$\sum z_i \mathbf{g}_i + \sum z_i' \mathbf{g}_i = \sum (z_i + z_i') \mathbf{g}_i$$

和

$$\left(\sum z_i \mathbf{g}_i\right)\left(\sum z_i' \mathbf{g}_i\right) = \sum \left(\sum_{\mathbf{g}_j \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_i} z_j z_k'\right) \mathbf{g}_i .$$

通常它被称为由 G 所导出的*群环*（group ring）。Hajós 正是通过对这个环的深刻研究（解方程）从而证明了闵可夫斯基的猜想。在此我们很难介绍证明的细节，也很难进一步介绍它的优美想法。感兴趣的读者可参看 [7]。

本文没有介绍这一猜想的证明，读者感受不到 Hajós 的高超技巧。但是，仅仅从这三种等价形式的互换，也许你已经感受到了这一问题的魅力。按照 S. K. Stein 的评论，这一过程“就像蚕蛹变成蝴蝶的过程一样神奇”。

György Hajós, 匈牙利著名数学家，曾任 Eötvös Loránd 大学教授，匈牙利科学院院士，匈牙利数学会主席，以证明了著名的闵可夫斯基猜想而著称。他曾经是匈牙利数学竞赛的优胜者，从而成为著名数学家 L. Fejer 的学生。相传，当他将博士论文提交给 Fejer 时，后者的评语是“对一个才智一般的学生来讲，它是一篇好的博士论文；而对 Hajós 这样优秀的学生来讲则是一篇不合格的文章”。后来他发奋图强，证明了著名的闵可夫斯基猜想从而奠定了他一个世界著名数学家的地位。我从未考证过这一故事的真实性。但它是我最喜欢的数学故事之一。

4 Keller 猜想

早在 1930 年，O. Keller 在他的博士论文中证明了闵可夫斯基猜想的几个低维情形。同时他提出了如下更为大胆的猜想。其实，许多读者在看到第一节中的实例时可能就已经想到这一猜想了。

Keller猜想 *在n维空间的每一个平铺C^n+X中都有共面对。*

1937 年，Keller 发表了一篇摘要式的文章声称证明了 $n \le 6$ 的情况。1940 年，著名数论学家 Perron 用了 40 多页的篇幅澄清 Keller 文章中的细节。该方法是初等的，但非常复杂，所以难以推广到高维。

Keller-Perron 定理 *如果 $n \le 6$, 那么 E^n 中的每一个平铺 C^n+X 都有共面对。*

Ott-Heinrich Keller 于 1906 年生于德国的法兰克福，曾在法兰克福，维也纳，柏林和哥廷根求学，于 1929 年在 Max Dehn 的指导下获博士学位，于 1933 年取得大学讲师资格。他关于立方体平铺的结果和猜想主要是博士学位期间的工作。二战期间，他就职于柏林工业大学和海军学校。战后，德国被分为西德和东德。Keller 先后任东德的德累斯顿大学和马丁路德大学教授。他发表的论著不多，主要集中在代数和数论领域。他是东德最著名的数学家之一，曾任东德数学会主席，是东德科学院的院士。1990 年 12 月 5 日 Keller 去世。

György Hajós (1912-1972)

Ott-Heinrich Keller (1906-1990)

5 Corrádi-Szabó 判别法

为了证明他的猜想，Keller 对一般平铺 C^n+X 的结构作了深入的研究。他研究了平铺 C^n+X 的周期性和可调整性从而归结为局部团的结构。在这些工作的基础上，与闵可夫斯基猜想类似，Hajós 于 1950 年发现 Keller 猜想也有一个代数形式：

S. Szabó 出版的两本专著

Keller 猜想 * 假设 G 是一个由 $\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_n$ 生成的阿贝尔群，其中 $|\mathbf{g}_i| = 2q_i$ 。如果 G 可以分解为一个直积

$$G = H A_1 \cdots A_n ,$$

其中 $|H| = 2^n$ 以及 $A_i = \{1, \mathbf{g}_i, \cdots, \mathbf{g}_i^{q_i-1}\}$，那么

$$\{\mathbf{h}^{-1}\mathbf{h}' : \mathbf{h}, \mathbf{h}' \in H\} \cap \{\mathbf{g}_1^{q_1}, \cdots, \mathbf{g}_n^{q_n}\} \neq \varnothing .$$

但是，这次他没有能够证明这一代数形式。在几十年无果的正面尝试后，人们开始怀疑该猜想的正确性并试图找出反例。在这一过程中，S. Szabó 做出了本质性的贡献。1986 年，他证明了如下结果：

> 如果 Keller 猜想在 E^n 中存在反例，那么一定存在一个特殊的反例 C^n+X 其中 X 以 $2\mathrm{e}_1, 2\mathrm{e}_2, \cdots, 2\mathrm{e}_n$ 为周期，X 的每个点的坐标都是有理数且分母都是 2 的方幂。

并且导出了代数形式：

> 假设阿贝尔群 G 是 n 个四阶循环群（分别由 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \cdots, \mathbf{g}_n$ 生成）的直积。如果 G 也能表示为
>
> $$G = H A_1 A_2 \cdots A_n ,$$
>
> 其中 $|H| = 2^n$，$A_i = \{1, \mathbf{g}_i\}$，且满足
>
> $$\{\mathbf{g}_i^2 : i = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}\} \cap \{\mathbf{h}^{-1}\mathbf{h}' : \mathbf{h}, \mathbf{h}' \in H\} = \varnothing$$
>
> 那么 Keller 猜想在 E^n 中就有反例。

在此基础上，Corrádi 和 Szabó 于 1990 年发现了一个探测 Keller 猜想反例的图论判别法。用 Γ 表示集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 并定义一个抽象图 G_n 如下：

1. 它的点集合为 $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \Gamma\}$。

2. 两个点 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 相连当且仅当存在两个不同的指标 i 和 j 分别满足 $u_i - v_i \equiv 0 \pmod 4$ 和 $u_j \neq v_j$.

容易看出，G_n 共有 4^n 个点。这时，他们的判别法可以陈述如下：

Corrádi-Szabó 判别法 Keller 猜想在 E^n 中存在反例当且仅当 G_n 有一个具有 2^n 个点的团子图。

6 Lagarias-Shor-Mackey 定理

尽管 Corrádi 和 Szabó 迈出了最关键的一步，但是他们并没能继续走下去。1992 年，贝尔实验室的两位数学家 J.C. Lagarias 和 P.W. Shor 通过计算机辅助找到了这样的图从而对 $n \geq 10$ 的情况否定了 Keller 猜

想。这是那一年最轰动的数学成就之一，发表在 *Bull. Amer. Math. Soc.* 上。十年后，J. Mackey 改进到了 $n \geq 8$。

Lagarias-Shor-Mackey 定理 当 $n \geq 8$ 时，E^n 一定存在没有共面对的平铺 $C^n + X$。

容易证明如果 Keller 猜想在 E^n 有反例，那么它在 E^{n+1} 也一定有反例。所以我们只需证明 $n = 8$ 的情况。

用 J_8 表示 G_8 的具有以下 2^8 个点的子图。

(3,1,1,1,0,2,1,1), (3,1,1,1,1,1,3,2), (3,1,1,1,2,3,0,3), (3,1,1,1,3,0,2,0),
(3,3,2,1,0,2,1,1), (3,3,2,1,1,1,3,2), (3,3,2,1,2,3,0,3), (3,3,2,1,3,0,2,0),
(1,0,0,3,0,2,1,1), (1,0,0,3,1,1,3,2), (1,0,0,3,2,3,0,3), (1,0,0,3,3,0,2,0),
(1,2,3,3,0,2,1,1), (1,2,3,3,1,1,3,2), (1,2,3,3,2,3,0,3), (1,2,3,3,3,0,2,0),

(0,0,0,0,0,0,0,0), (0,0,0,0,0,2,3,0), (0,0,0,0,2,1,1,2), (0,0,0,0,2,3,2,2),
(0,2,3,0,0,0,0,0), (0,2,3,0,0,2,3,0), (0,2,3,0,2,1,1,2), (0,2,3,0,2,3,2,2),
(2,1,1,2,0,0,0,0), (2,1,1,2,0,2,3,0), (2,1,1,2,2,1,1,2), (2,1,1,2,2,3,2,2),
(2,3,2,2,0,0,0,0), (2,3,2,2,0,2,3,0), (2,3,2,2,2,1,1,2), (2,3,2,2,2,3,2,2),

(1,0,1,1,0,2,1,1), (1,0,1,1,1,1,3,2), (1,0,1,1,2,3,0,3), (1,0,1,1,3,0,2,0),
(1,3,3,1,0,2,1,1), (1,3,3,1,1,1,3,2), (1,3,3,1,2,3,0,3), (1,3,3,1,3,0,2,0),
(3,1,0,3,0,2,1,1), (3,1,0,3,1,1,3,2), (3,1,0,3,2,3,0,3), (3,1,0,3,3,0,2,0),
(3,2,2,3,0,2,1,1), (3,2,2,3,1,1,3,2), (3,2,2,3,2,3,0,3), (3,2,2,3,3,0,2,0),

(3,2,1,0,2,2,1,1), (3,2,1,0,1,1,3,0), (3,2,1,0,0,3,0,3), (3,2,1,0,3,0,2,2),
(1,3,0,2,2,2,1,1), (1,3,0,2,1,1,3,0), (1,3,0,2,0,3,0,3), (1,3,0,2,3,0,2,2),
(0,0,2,1,2,2,1,1), (0,0,2,1,1,1,3,0), (0,0,2,1,0,3,0,3), (0,0,2,1,3,0,2,2),
(2,1,3,3,2,2,1,1), (2,1,3,3,1,1,3,0), (2,1,3,3,0,3,0,3), (2,1,3,3,3,0,2,2),

(0,1,3,1,0,2,1,1), (0,1,3,1,1,1,3,2), (0,1,3,1,2,3,0,3), (0,1,3,1,3,0,2,0),
(2,0,2,3,0,2,1,1), (2,0,2,3,1,1,3,2), (2,0,2,3,2,3,0,3), (2,0,2,3,3,0,2,0),
(1,2,1,2,0,2,1,1), (1,2,1,2,1,1,3,2), (1,2,1,2,2,3,0,3), (1,2,1,2,3,0,2,0),
(3,3,0,0,0,2,1,1), (3,3,0,0,1,1,3,2), (3,3,0,0,2,3,0,3), (3,3,0,0,3,0,2,0),

(0,1,0,2,0,0,0,0), (0,1,0,2,0,2,3,0), (0,1,0,2,2,1,1,2), (0,1,0,2,2,3,2,2),
(0,2,2,2,0,0,0,0), (0,2,2,2,0,2,3,0), (0,2,2,2,2,1,1,2), (0,2,2,2,2,3,2,2),
(2,0,1,0,0,0,0,0), (2,0,1,0,0,2,3,0), (2,0,1,0,2,1,1,2), (2,0,1,0,2,3,2,2),
(2,3,3,0,0,0,0,0), (2,3,3,0,0,2,3,0), (2,3,3,0,2,1,1,2), (2,3,3,0,2,3,2,2),

(1,2,1,0,3,1,1,1), (1,2,1,0,3,3,2,1), (1,2,1,0,1,0,0,3), (1,2,1,0,1,2,3,3),
(3,3,0,2,3,1,1,1), (3,3,0,2,3,3,2,1), (3,3,0,2,1,0,0,3), (3,3,0,2,1,2,3,3),
(0,0,2,3,3,1,1,1), (0,0,2,3,3,3,2,1), (0,0,2,3,1,0,0,3), (0,0,2,3,1,2,3,3),
(2,1,3,1,3,1,1,1), (2,1,3,1,3,3,2,1), (2,1,3,1,1,0,0,3), (2,1,3,1,1,2,3,3),

(1,2,1,0,3,0,1,3), (1,2,1,0,3,3,3,3), (1,2,1,0,1,1,0,1), (1,2,1,0,1,2,2,1),
(3,3,0,2,3,0,1,3), (3,3,0,2,3,3,3,3), (3,3,0,2,1,1,0,1), (3,3,0,2,1,2,2,1),
(0,0,2,3,3,0,1,3), (0,0,2,3,3,3,3,3), (0,0,2,3,1,1,0,1), (0,0,2,3,1,2,2,1),
(2,1,3,1,3,0,1,3), (2,1,3,1,3,3,3,3), (2,1,3,1,1,1,0,1), (2,1,3,1,1,2,2,1),

(0,1,3,3,0,2,1,3), (0,1,3,3,3,1,3,2), (0,1,3,3,2,3,0,1), (0,1,3,3,1,0,2,0),
(2,0,2,1,0,2,1,3), (2,0,2,1,3,1,3,2), (2,0,2,1,2,3,0,1), (2,0,2,1,1,0,2,0),
(3,2,1,2,0,2,1,3), (3,2,1,2,3,1,3,2), (3,2,1,2,2,3,0,1), (3,2,1,2,1,0,2,0),
(1,3,0,0,0,2,1,3), (1,3,0,0,3,1,3,2), (1,3,0,0,2,3,0,1), (1,3,0,0,1,0,2,0),

(0,0,0,0,0,0,1,2), (0,0,0,0,0,3,3,2), (0,0,0,0,2,1,0,0), (0,0,0,0,2,2,2,0),
(0,2,3,0,0,0,1,2), (0,2,3,0,0,3,3,2), (0,2,3,0,2,1,0,0), (0,2,3,0,2,2,2,0),
(2,1,1,2,0,0,1,2), (2,1,1,2,0,3,3,2), (2,1,1,2,2,1,0,0), (2,1,1,2,2,2,2,0),
(2,3,2,2,0,0,1,2), (2,3,2,2,0,3,3,2), (2,3,2,2,2,1,0,0), (2,3,2,2,2,2,2,0),

(3,2,1,0,1,0,1,1), (3,2,1,0,1,3,3,1), (3,2,1,0,3,1,0,3), (3,2,1,0,3,2,2,3),
(1,3,0,2,1,0,1,1), (1,3,0,2,1,3,3,1), (1,3,0,2,3,1,0,3), (1,3,0,2,3,2,2,3),

Peter Shor 和 Jeff Lagarias

(0,0,2,1,1,0,1,1), (0,0,2,1,1,3,3,1), (0,0,2,1,3,1,0,3), (0,0,2,1,3,2,2,3),
(2,1,3,3,1,0,1,1), (2,1,3,3,1,3,3,1), (2,1,3,3,3,1,0,3), (2,1,3,3,3,2,2,3),

(3,2,1,0,1,1,1,3), (3,2,1,0,1,3,2,3), (3,2,1,0,3,0,0,1), (3,2,1,0,3,2,3,1),
(1,3,0,2,1,1,1,3), (1,3,0,2,1,3,2,3), (1,3,0,2,3,0,0,1), (1,3,0,2,3,2,3,1),
(0,0,2,1,1,1,1,3), (0,0,2,1,1,3,2,3), (0,0,2,1,3,0,0,1), (0,0,2,1,3,2,3,1),
(2,1,3,3,1,1,1,3), (2,1,3,3,1,3,2,3), (2,1,3,3,3,0,0,1), (2,1,3,3,3,2,3,1),

(3,0,1,3,0,2,1,3), (3,0,1,3,3,1,3,2), (3,0,1,3,2,3,0,1), (3,0,1,3,1,0,2,0),
(3,3,3,3,0,2,1,3), (3,3,3,3,3,1,3,2), (3,3,3,3,2,3,0,1), (3,3,3,3,1,0,2,0),
(1,1,0,1,0,2,1,3), (1,1,0,1,3,1,3,2), (1,1,0,1,2,3,0,1), (1,1,0,1,1,0,2,0),
(1,2,2,1,0,2,1,3), (1,2,2,1,3,1,3,2), (1,2,2,1,2,3,0,1), (1,2,2,1,1,0,2,0),

(0,1,0,2,0,0,1,2), (0,1,0,2,0,3,3,2), (0,1,0,2,2,1,0,0), (0,1,0,2,2,2,2,0),
(0,2,2,2,0,0,1,2), (0,2,2,2,0,3,3,2), (0,2,2,2,2,1,0,0), (0,2,2,2,2,2,2,0),
(2,0,1,0,0,0,1,2), (2,0,1,0,0,3,3,2), (2,0,1,0,2,1,0,0), (2,0,1,0,2,2,2,0),
(2,3,3,0,0,0,1,2), (2,3,3,0,0,3,3,2), (2,3,3,0,2,1,0,0), (2,3,3,0,2,2,2,0),

(1,1,1,3,0,2,1,3), (1,1,1,3,3,1,3,2), (1,1,1,3,2,3,0,1), (1,1,1,3,1,0,2,0),
(1,3,2,3,0,2,1,3), (1,3,2,3,3,1,3,2), (1,3,2,3,2,3,0,1), (1,3,2,3,1,0,2,0),
(3,0,0,1,0,2,1,3), (3,0,0,1,3,1,3,2), (3,0,0,1,2,3,0,1), (3,0,0,1,1,0,2,0),
(3,2,3,1,0,2,1,3), (3,2,3,1,3,1,3,2), (3,2,3,1,2,3,0,1), (3,2,3,1,1,0,2,0),

(1,2,1,0,2,2,1,3), (1,2,1,0,3,1,3,0), (1,2,1,0,0,3,0,1), (1,2,1,0,1,0,2,2),
(3,3,0,2,2,2,1,3), (3,3,0,2,3,1,3,0), (3,3,0,2,0,3,0,1), (3,3,0,2,1,0,2,2),
(0,0,2,3,2,2,1,3), (0,0,2,3,3,1,3,0), (0,0,2,3,0,3,0,1), (0,0,2,3,1,0,2,2),
(2,1,3,1,2,2,1,3), (2,1,3,1,3,1,3,0), (2,1,3,1,0,3,0,1), (2,1,3,1,1,0,2,2).

可以验证，J_8 确实是一个团图。由 Corrádi-Szabó 判别法，Lagarias-Shor-Mackey 定理得证。

Jeff Lagarias 是一位杰出的数学家，在数论，算法，小波，几何，组合等领域都做出过重要贡献。已发表论文 180 余篇。他曾长期在贝尔实验室工作，现任密西根大学教授。Peter Shor 是一位杰出的计算机专家，在量子计算领域做出了杰出贡献，曾荣获 Navanlinna 奖和 Gödel 奖。他曾长期在贝尔实验室工作，本项工作就是两位作者同在该实验室工作时取得的。Peter Shor 现任麻省理工学院教授。Keller 猜想的意外解决是当年轰动数学界的事件。美国数学会 1993 年出版的大事记（What's Happening in the

卡内基梅隆大学的 J. Mackey

Mathematical Sciences）就以 Disproving the Obvious in Higher Dimensions 为题介绍过这一成果。

至此，Keller 猜想只剩 $n = 7$ 的情况没有解决。

也许有人会问：为什么闵可夫斯基没有猜测一般形式，而只是针对格平铺？这里有两种可能的解释。第一，作为数的几何的创始人，他对格情有独钟。第二，作为一位有高超直觉的天才，他可能早就料到一般情况不对。

后记

许多年前，在维也纳的一次舞会上约翰•施特劳斯的夫人遇到了勃拉姆斯。寒暄之余，施特劳斯夫人递给勃拉姆斯一把纸扇，请他题字留念。勃拉姆斯略加思索，在扇面上飞快地写下了《蓝色多瑙河》的主旋律。正当施特劳斯夫人惊愕之际，他又在下面写道“可惜不是我作”。

未完待续

参考文献

G. Hajós, Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, Math. Z. 47 (1941), 427-467.

J.C. Lagarias, P. Shor, Keller's cube-tiling conjecture is false in high dimensions, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 279-283.

J. Mackey, A cube tiling of dimension eight with no facesharing, Discrete Comput. Geom. 28 (2002), 275-279.

S.K. Stein, Algebraic tiling, Amer. Math. Monthly, 81 (1974), 445-462.

S.K. Stein, S. Szabó, *Algebra and Tiling: Homomorphisms in the Survice of Geometry*, Math. Assoc. Amer., Washington DC, 1994.

C.M. Zong, What is known about unit cubes, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (2005), 181-211.

C.M. Zong, *The Cube: A Window to Convex and Discrete Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

聊聊数学家的故事

ukim

（连载六）

写给那些，喜欢数学和不喜欢数学的人们

写给那些，了解数学家和不了解数学家的人们

故事二十七：女数学家故事（2）

话说时光飞逝，转眼间从古希腊来到了18世纪的意大利。尽管从物质生活到文化的各个方面，比起希腊，已经大大的发展了，但是女性的地位相对来说还是一如既往的得不到重视。

有一位被认为是当时欧洲最出色的女数学家，叫做玛丽亚·阿涅西（Maria Agnesi），像她这样出色的数学家，在欧洲还是没有研究机构愿意提供给她职位，尤其是法国这样的国家，更是对她不屑一顾。

她有一篇关于曲线的切线的文章尤为出名。但是意大利语中"曲线"一词叫做"versiera"，好像在拉丁文还是什么文字当中是"avversiera"的缩写，后面这个词的意思是"魔王的妻子"。于是玛丽亚·阿涅西研究过的一段曲线"versiera Agnesi"翻译成英文的时候，就被叫做"Agnesi的女巫"，后来有一段时间大家都这么称呼女数学家。

在关于女数学家的记载当中，很少有关于她们容貌的描述，不过要说的是还是有漂亮mm做了数学家，上个世纪在偏微分方程方面，索菲娅·柯瓦列夫斯卡娅（Sonja Kowalewski）无疑是最优秀的数学家之一。她本人绝对是个一流的美女，据说当初魏尔斯特拉斯（Weiestrass）也被她的美貌深深地吸引。

俄罗斯数学家柯瓦列夫斯卡娅(1850-1891)

故事二十八：女数学家故事（3）

每每读到她为什么选择了数学，总让我心驰荡漾……

在所有的欧洲国家中，法国对女性的歧视（学术上的）尤为严重。索菲·热尔曼（Sophie Germain）就出生在这个国家。索菲·热尔曼当初读过一本讲阿基米德（Archimedes）的书，内容是当初他老人家专心地研究一堆沙子组成的几何图形，以至于一个罗马士兵向他问话他却充耳不闻。那个士兵一怒之下把阿基米德杀死了。热尔曼认为，一个人可以如此的痴迷于一个东西以至于置生死于不顾，那么这个东西一定是世界上最美最迷人的。于是她选择了数学。

最初热尔曼的父母强烈反对，没收了她的墨水蜡烛之类的东西，然而，热尔曼痴心不改，终于感动了父母，此后父亲一直都支持她的数学工作。1794年，巴黎高等理工（Polytechnique）在巴黎建校，尽管这里盛产数学家，但是却只接受男性。于是热尔曼化名为Le Blanc偷

偷偷的混进去旁听，当然，当时确实有一个人叫做 Le Blanc，估计这个人比较喜欢旷课，这就使热尔曼得以在那里好好地读书，几个月之后，她的任课老师拉格朗日（Lagrange）发现了一个很牛的学生，热尔曼不得不说她其实是女儿身。拉格朗日毕竟不同于一般人，他很高兴有这样的一位朋友，并乐于做热尔曼的导师。

热尔曼不久对数论尤为倾心，可能受拉格朗日的影响吧，她年轻的时候靠变分法出名，年长之后在数论方面贡献卓越。热尔曼选择的题目是费马大定理，她把自己的结果寄给高斯，令高斯特别的欣赏。她当年才刚刚 20 岁，而她做出的成果是当时最好的。当然，她还是怕高斯对女性有偏见，于是仍然选择了 Le Blanc 这个名字。后来，拿破仑的军队攻入德国，热尔曼怕高斯重蹈阿基米德之覆辙，于是给自己的朋友，也就是当时统领三军的一位将军写信，这位将军果然对高斯很为关照。

热尔曼后来又在物理上面做了很多东西，尤其是在弹性理论上面。

法国数学家索菲•热尔曼 (1776-1831)

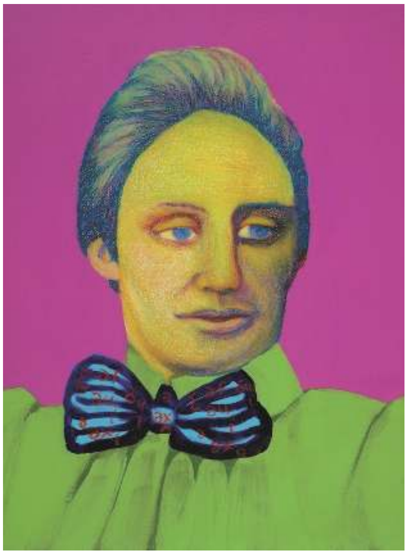
由于她在数学物理上的突出贡献，她最终荣获了法国科学院的金质奖章，并成为第一位不是以某位成员夫人的身份出席科学院讲座的女性。在生命的最后几年，高斯说服了哥廷根大学，授予热尔曼名誉博士学位。在那个时代，这是极大的荣誉。可惜在她的有生之年，未能亲自带上那令人骄傲的帽子。

故事二十九：女数学家故事（4）

这是我说的最后一位 mm 数学家，也是最最伟大的一位，埃米•诺特（Emmy Noether）。她对 20 世纪数学的影响无以伦比，提到抽象代数就不得不提一下诺特。最最著名的一本抽象代数的书范•德•瓦尔登（van de Waerden）的《代数学》就是采用的诺特的讲义。阿廷（E. Artin），范•德•瓦尔登等人都是她的学生。

尽管这样子，诺特在哥廷根的同事 E. 朗道（Edmund Landau）还是拒绝给她讲师的职位，并说“当我们的士兵发现他们在一个女人脚下学习的时候，会怎么想？”不得不说朗道不招人喜欢。最让人不能容忍的是有人问她诺特是否是一个伟大的女数学家的时候，他说：“我可以作证她是一个伟大的数学家，但是对她是不是一个女人这点，我不能发誓。”

不过，伟大如爱因斯坦和希尔伯特这样的人都对诺特推崇备至。爱因斯坦曾经说诺特是“自妇女开始受到高等教育以来最杰出的最富有创造性的数学天才”，希尔伯特则支持诺特去争取一个讲师的职位，并反驳朗道说：“我不认为候选人的性别是反对她成为讲师的理由，评议会毕竟不是澡堂。”看来希尔伯特当时有点怒了。



德国数学家埃米•诺特 (1882-1935)

故事三十：数学家的遗憾

“四年终究有些遗憾”——这是偶的室友的一个签名档，比“遗憾总是难免的”说起来好听，但却是等价的。很多数学家于垂暮之年回首往事，也总是发出这样那样的感慨，与常人无异。

从阿达玛（Hadamard）说起，原来讲过他是个和蔼的老头，数学好的不得了，人也是这个样子，上个世纪初还来清华讲过课。

每每谈及往事，阿达玛总是很惋惜地说一辈子有两件事情特别的后悔。第一个在数学方面，他很早就找到了简森（Jensen）公式，由于没有发现很精辟的应用，一直就没有发表，结果让简森抢先了一步。第二个是物理方面，关于狭义相对论，他也是很早就有了这样的想法，只不过没有时间深入下去，后来爱因斯坦就发表了。

其实阿达玛最不能忘怀的事情，绝不是上面两件，而是关于自己当初考试的事，以致于年纪大了的时候，仍然耿耿于

法国数学家阿达玛（1865-1963）

怀，甚至到俄国和柯尔莫果洛夫（Kolmogorov）都提这件事。就是阿达玛做学生的时候，参加数学的会考（相当于数学竞赛吧），得了第二名，第一名后来也是一个数学家，阿达玛对柯尔莫果洛夫说：“事实证明后来他做得没有我好，其实他一直没有我好。”

当初费马证明不了东西的时候，就写下了“我有一个对这个命题的十分美妙的证明，这里的空白太小，写不下。”后来，希尔伯特也会了类似的技巧，有人问希尔伯特为什么不去证明费马大定理，他说为什么要杀死一只下金蛋的母鹅，因为这样一个对整个数学发展有着如此深远推动的问题太少了。不过个人认为他没有能力杀死这只鹅。

还有另外一个和金蛋有关的事情，不过和数学家没有关系。当初欧洲的反法联军快攻到巴黎的时候，巴黎理工高等（Ecole Polytechnique）的学生要求上战场，保卫国家，拿破仑说：“这怎么可能呢，我不能为了打赢一场战争，杀死一只会下金蛋的母鹅。”

故事三十一：数学和音乐（1）

惠特尼（Hassler Whitney）是很著名的美国数学家，做了很多很重要的工作，譬如说向量丛的Stiefel-Whitney类是用他的名字命名的，还有一个著名的定理，说每一个 n 维的流形都浸入一个 $2n-1$ 维的欧氏空间并嵌入一个 $2n$ 维的欧氏空间，也是他的结果。北大的图书馆里还有他的论文集。很难想象，他本人一开始竟然不是学理科的。

惠特尼本科时候读的不是数学。话说他学业完成到欧洲大陆去玩，大概是到了哥廷根还是什么地方了，反正是个很有名的地方，当时有一个很牛的物理学家（不是海森堡就是薛定谔）正在做一个关于量子力学的讲座。

等到讲座结束之后，惠特尼什么也没听懂，感觉极其不爽，于是找到了那个主讲人说，先生，我觉得你做的讲座很不成功。主讲的教授很纳闷，就问他为什么。惠特尼回答说，我可是耶鲁大学的优等毕业生，你讲的东西我竟然听不懂，这难道不是你讲的有问题吗？那个教授继续问，你是读什么专业的？惠特尼回答说，我是读小提琴的……教授大大的分特了，说这个我也没办法，你要想懂这些东西的话你应该学一点相关的基础课，于是告诉他这个世界上还有数学分析和线性代数等等……

惠特尼回美国之后就开始发奋学习数学，据说半年之后就可以参加很高级的讨论班了。当然他是非常刻苦的，数学的历史上还是有很多这种大器晚成的例子的。

故事三十二：数学和音乐（2）

一个很有意思的事情，很多很多物理学家都特别的喜欢音乐，一个很出名的例子就是爱因斯坦。数学家当中也是这个样子，大家在做完了数学之后，也会醉心于此。譬如说阿廷，一个上个世纪影响最大的代数学家之一，据说钢琴的弹奏水平极高，尤其是特别的严格，好像他做的代数一样；譬如库朗（Courant），钢琴和阿廷比起来路子要野蛮一些，水平也要低些，不过热情毫不逊色，还经常邀请阿廷到家里演奏一番；再譬如说纳什，这个人大家比较熟悉，《美丽心灵》说的就是他，他原来就喜欢绕着普林斯顿大学的数学系大楼Fine Hall游荡，并且嘴里吹着口哨。数学家米尔诺（J. Milnor）还说，他第一次听巴赫的音乐就是通过当时纳什的口哨声。

更有甚者，譬如迪厄多内（Dieudonne），这个法国布尔巴基（Bourbaki）的人，不但喜欢弹琴，更是能记住很多很多的乐谱，据说上千页的乐谱他也能背诵。曾经一

美国数学家惠特尼(1907-1989)

次，迪厄多内和 P.Cartier 去音乐会，他指着手里的节目单说："乐队的演奏漏了一个音符……"

再譬如说福克斯（Fox），一个美国的拓扑学家，在 1960 年代的时候提到这个名字就相当于提到了低维拓扑这个方向，他本人的小提琴演奏水平也相当专业。这个人比较喜欢故弄玄虚，据说，在一次音乐会上，小平邦彦（Kodaira）和他一起，不料这次的演奏时不时地停顿，而且有声音的时间要少于没有声音的。小平邦彦感到特别不好听，福克斯叹息道："这是受了禅影响之后的音乐，我正在试图从无声之中听出有声。"

故事三十三：全身心投入的数学家

上一次说到了很多数学家都喜欢音乐。不过我的看法是比较"古老"一点的数学家的业余爱好似乎要少一些，当然有可能是关于他们的记载要少一些，但我觉得他们更能够集中精力，全身心的投入。从阿基米德、牛顿，到高斯、黎曼，似乎除了研究很少关心别的事情。

譬如说高斯。听说过一件极其变态的事情，但是从另一个侧面我们也可以知道他不仅仅是天分出众，更重要的是努力。高斯中年的时候妻子就死去了，那个时候，高斯就很有名望，家里有保姆。妻子病的一塌糊涂，不过他还是专心自己的研究。这个当然不是一个值得称道的品质。就是妻子的弥留之际，他还是没有去她的身旁，保姆实在看不下去，就去高斯做研究的地方去找他让他赶快过去，高斯随口答应了，但是依然做自己的东西。保姆又来了一次，痛斥了他一番，岂知高斯告诉她说："我马上就过去，你让她再等一会儿……"

再譬如说纳什，大家只是知道他的天才，却很少提到他的努力。钟开莱（Kai Lai Chung）在普林斯顿大学的时候，遇到了这么一件事情。顺便说一下，这个姓钟的人是一个很重要的华人数学家，在概率方面很有作为。他去一个很有名的休息厅，适时恰是秋季的清晨，休息厅里空空荡荡，寂静异常，就像教堂的感觉一样。大厅中间的巨大的桌子上面，乱七八糟，全都是草稿纸，一个人躺在上面，正愣愣的思考。这正是纳什，很显然这又是一个不眠之夜，他一直在考虑数学。

未完待续

诺贝尔奖得主数学家纳什（1928-）

一个时代的怀念

—— 何旭初先生九十周岁祭

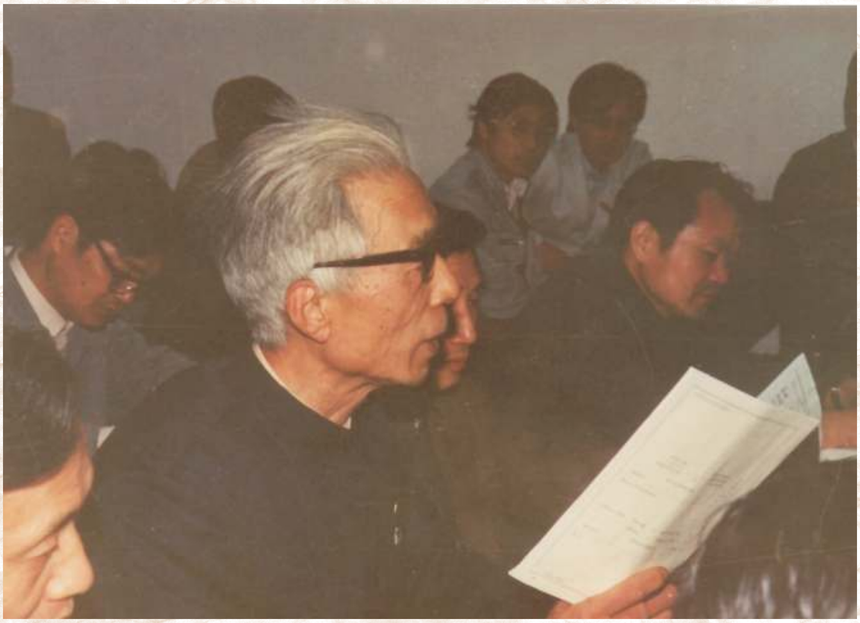
丁玖

2002年5月20日我回母校南京大学参加100周年校庆活动。此前几天，我还在北京学术访问。一天下午，在住所等待一位访客之时，我突然感到有一股激情在胸中澎湃，因为我想起了已经去世十二年的导师何旭初先生。当日，我一气呵成写下了散文《纪念何旭初先生》，并于第二天传真到南京《扬子晚报》编辑部。校庆第三天，一位家乡好友致电说看到了当天报纸上刊登的这篇文章。不久，该文又被收入南京大学百年校庆汇编。当大学同班同学、南大数学教授何炳生特地送我这本有收藏价值的书时，我高兴万分地收下这一意味深长的礼物。

今年是何先生九十周年华诞。我感到有一股新的激情要写下第二篇短文纪念他。这不光是怀念其躯体早已不在人间的一位教授——当年的中国计算数学界“数值代数与最优化”领域的领袖之一，更是怀念其精神已经部分逝去的一个可与“西南联大”时期媲美的年代。

1990年四月底的一个深夜，在美国密西根州立大学读博士学位的我被急促的电话铃声惊醒。这是我南大同学尹光炎从他读书的美国犹他大学处打来的。在电话中他转告了何旭初先生当日病逝的噩耗。听到这个消息，我的悲伤之情难以言表。我以最快的动作告知了在海外的我们那几届南大数学系毕业生，很快就征集到大约十六位同学的唁电签名，传真到母校数学系，表达了我

何旭初 (1921-1990)



1987 年 5 月 7 日，何旭初在他第一个博士生赵金熙的论文答辩会上

们南大海外学子的深深哀悼之情。后来听说，这封唁电在何先生的追悼会上感动了在场的老师们。

1982 年初大学毕业后，我们四位同学，王思运、倪勤、钱迈健和我，考取了何先生的"最优化"专业读硕士学位。我读本科时颇为爱恋"泛函分析"，曾考虑过报考纯粹数学的这个方向，但一位计算机系的老师鼓励我报考何先生的专业，并告诉我说这是南大在国内高校"傲视群雄"的学科之一。在那之前，我从未见过何先生，对他研究的专业也一无所知，但我相信这位关心我成长的外系老师，就这样和其他三人成了何先生的研究生。

两年半的求学阶段，我们几乎每天都能见到导师。从第一个学期起，何先生就和我们融合在"讨论班"之中。他一开始就为我们编辑了一大册本专业历史上最有名的论文，让我们很快就遨游在原始思想的海洋里。读书是争分夺秒的、讨论是激发灵感的、情绪是自由快乐的。在我们的印象中，先生的面容"严肃认真"居多，偶尔也会"宛然一笑"，但从来没有对我们来过一次厉声呵斥，因为他对我们青年学生有一颗慈父般的心肠。拿到硕士学位时，我们突然发现自己已经和过去判若两人，从学问，到做人，深深地受到他的影响，被他潜移默化。因此，我们更加热爱导师。

1986 年赴美后，我一直和何先生保持通信联系，直至他 69 岁时因患上不治之症而离开人世。他的回信我一直保存完好，也许是我日后"激情荡漾"地撰写"一个时代的回忆"时有意义的资料之一。最近，我再一次阅读了先生的来信，倍感亲切。他那苍劲的、在老一辈"文理并茂"的学者手下常见的笔锋中，我读到的是谆谆教导、殷切希望、师生之情、未来展望。当时的我，就仿佛看到万里以外的先生严肃的外表内蕴藏的热忱、紧锁的浓眉下欣慰的笑容。

我最先知道何先生因癌症晚期入住江苏省人民医院是他去世前几个月从何炳生的来信中得知的。当时他被瞒着贲门癌的真相，只被告知是老生常谈的胃病困恼，但同事们都伤心地知道他来日无多了。我也悲伤不已。那是我博士论文快要完成的时刻，由于当时若回国返美签证困难，我能做到的只是在寄去问候的同时也寄了点钱给他，并委托住在扬州的家兄前去代我探望。家兄的回信用散文笔法详细描绘了何先生的欣喜之情，因为先生一眼就认出可能是世界上长相与我误差最小的家兄，他仿佛又看到了自己的昔日弟子就站在跟前。

何先生逝世后三个半月，我获得了博士学位。但是他再也无法听到我向他报告这一喜讯，我再也读不到他笔下流出的勉励之语，再也看不到他慈祥面孔的音容笑貌。二十一年一下子过去了，每当我回到母校，无论是同学相聚，还是学术交流，眼睛里时时浮现出当年我很熟悉的满头白发的他那瘦削、笔直的躯体在雨中撑着伞，从系里独自走回家时的背影；耳朵旁常常回响起多年前去他住处聆听教诲时，脚步下破旧楼梯的吱喳声。如今，物质上安于清贫，精神上追求富有的那些可敬的故人、那个迷人的时代正在离我们越走越远，但留给我们记忆

作者的大学同班同学毕业合照（摄于 1981 年底）。第一排左一为颜起居老师，右二为陈瑞珠老师，右四为包雪松老师，右七为周伯埙教授，右十为叶彦谦教授；第二排右二为邱增煌老师；第四排右四为何炳生教授；第三排右三为作者

深处的亲切感却难以在脑海中抹去。他们平凡而感人的故事也许会让今天的大学生、研究生们大吃一惊的。

我记得当年教我们最重要基础课《数学分析》的颜起居老师。他是何等的认真、何等的负责，一板一眼地反复训练我们大要“ε - δ”之极限语言这把“程咬金的大斧头”。他耐心传授的这一套基本武功让我们无论干什么职业都受益无穷，终生不废。不幸的是，本文初稿刚写完一周后的 4 月 25 日，中风多年、不到 75 岁的颜老师悄悄地离开了人间。我也记得类似于何先生那样瘦高的林成森老师。在隆冬的季节教授我们《线性代数》时，他身披着藏青色的破棉袄，脖子上绕了两圈的旧围巾，但那十分清晰的讲解，抑扬顿挫的语调，像巨大磁铁一般地把我们的好奇目光一下子从他破旧的穿戴上猛地拽到他充满智慧的双眼前。

我记得我们特别尊敬的专业主任苏煜城教授。这位留苏博士是我们扬州人的骄傲。他站在《偏微分方程数值解》课的讲台上，就像是运筹于帷幄之中的元帅，讲解与板书一样从容不迫、行云流水，满腹的知识在他的嘴边结晶成艺术，听他上课真正是享受数学之美妙。但是，长期体弱的苏先生在课堂上“周期性”地不时上提裤腰带，那是因为身体有病皮带不能系紧之故，成为课堂美景中的一道小小风景线，更提升了所有的学生对他的敬佩。我也记得严格得令学生们害怕得“发抖”的王巧玲老师。虽然长相和身高都像个“小女孩子”，演示数学时只写黑板的下半部分，但当神色威严的她一旦接手指导我们的《数学分析》习题课，就把“自以为得意”的一些同学将了一军，大挂黑板，包括现已成长为中国“数学王子”的她的亲密女同事之子。

我记得不摆架子、从不发火的何泽霖老师。他除了率领我们进入《复变函数》像“人造虚数”那样的奇妙仙境，后来那和风细雨式的兼职研究生思想工作也让我们如沐春风。面对这个青年导师，你可以为自己的心扉和盘托出而满心喜悦。我也记得本科时代的辅导员邱增煌老师。他大概是最能和大学生打成一片的“政治委员”，因为


左图为作者和王巧玲老师，右图为作者和苏煜城教授。2002 年 5 月 20 日南大 100 周年校庆时摄于校园

他就好像是我们中间的一分子，除了我们叫他“邱老师”而不会叫他“老邱”或直呼其名，尽管他的年龄比我们最老的同学还要小点。

还有活泼可亲的包雪松先生。她与何先生、苏先生合著的《计算数学简明教程》精炼明了，脍炙人口。我出国前和何先生告别时，他亲手送我这本教材。不久前刚刚驾鹤西去的徐鸿义老师，性格温文尔雅、教书一丝不苟，高度近视的他正像一位徐悲鸿少年时代认认真真的江南私塾先生。面肤白皙、目光炯炯的吴启光老师漂亮的粉笔字和他讲的《偏微分方程》一样漂亮，字正腔圆的表演更令课堂生辉。他的太太陈瑞珠老师爽朗的笑声和不厌其烦的态度，让在其指导下毕业实践的我们深受感染，忘记了算题的繁琐和辛苦。

难以忘记我们的先后两任系主任：高大的叶彦谦先生和瘦小的周伯埙先生。我们当年最爱不释手、几乎人手一册的参考书费赫金哥尔茨的《微积分学教程》第一卷第一分册中译本就出于五十年代叶先生的手笔。我读大学前在工厂学徒时就见过周先生在“大跃进”热潮中专门为工农大众写的厚书《代数浅说》。他们的弟子们现在遍及全世界，但是他们也像何先生一样，已在另一个世界里遥望着我们。

“吃水不忘掘井人”。没有这些孜孜不倦、任劳任怨的教书育人者，没有他们的那份敬业精神，没有他们的那种忘我态度，哪有我们的今日事业？他们也写著作，也做研究，但是他们把培养学生作为己任，而不仅仅把培养“论文”作为己任。他们高尚的职业道德，让我们仰慕不止。我们这一代大学生、研究生实在是太幸运了，因为那个时代的老师是良师，也是益友，是韩愈名言“师者，所以传道授业解惑也”的真正履行者，是教育园地名副其实的辛勤园丁。那个久远的年代，正因他们的无私奉献而在中国现代教育史上记下骄傲的一页。

多年来，何旭初先生的弟子们一直都在怀念他。十二年前的 1999 年，他的博士生、也是我的老师之一的孙文瑜教授在南京师范大学主办的一个国际会议上组织了一个纪念何先生的特别分会，何炳生教授的德国博士导师 J. Stoer 教授也出席了，并高度赞扬这一活动。今年的 5 月底在南京师范大学，我们将以学术交流的方式庆祝何旭初先生的九十冥诞。届时我将首次出示恰好四分之一世纪前何先生写给我的第一封回信。这会是多么有意义的一件事呀，毕竟，这一页信纸的字里行间，折射出的是那个时代的精神，那个时代的特点。

2011 年 4 月 17 日初稿，2011 年 5 月 3 日完稿

数学文化/第2卷第3期 88

介绍一个很不错的数学博客——Matrix67

蒋迅

他在博客上有一个座右铭："50% Informatics, 50% Mathematics, and 50% Imagination"

一个中文系大学生的数学博客 http://www.matrix67.com/blog/

专写数学，或者主要写数学的博客不多，即使是在科学网也是如此。前不久我介绍了陶哲轩的数学博客，算是一个好的例子。在不多的数学博客中有一个独立博客 Matrix67 可以说是一花独放。不记得是从哪里看到的，但是第一次看到就记住了。他的博客写的不是很高深的数学，没有涉及群、环、域那样的抽象概念，可以雅俗共赏。

"惊人的答案：平均要取多少个 (0, 1) 中的随机数才能让和超过 1"，你知道是多少次吗？答案很别出心裁，"e" 次。"如果我说的是假话那么我说的是假话一文中"，有十道逻辑题等你做。"Buffon 投针实验：究竟为什么是 pi？"讲的是一个经典概率故事。"经典证明：任何可数集都含有不可数个嵌套子集"属於集合论的范畴。"为什么 $f'(x)$ 与 $f(x)/x$ 的交点恰为后者的极值点？"说的是微积分。"趣题：哪个像素点坏了？"是脑筋急转题。更难的脑筋急转题来自 Google："Google 在 MIT 发布的难题。"想锻炼空间想象能力的可以看一下立体几何题："立方体相邻面两对角线的最近距离？"平面几何的题目也牛："等边三角形内接圆上一点到三顶点距离平方和不变。"

他在博客上有一个座右铭："50% Informatics, 50% Mathematics, and 50% Imagination"，因为最后的那 50% 是虚的。有些东西在实数空间里是看不到的。他引用了一句经典的数学名言是这么说的：

Mathematics is made of 50 percent formulas, 50 percent proofs, and 50 percent imagination.

我以前以为这位 Matrix67 怎么也得是某个数学系毕业的，结果看了他的自我介绍后大吃一惊：他竟然是一个北京大学中文系的学生，一个名副其实的 80 后。他让我们这些数学科班出身的博主们无地自容。相比之下，我们唯有更加努力把自己的博客建设的好一些。不过，这样一位潜在的数学苗子不能在数学领域里深造，在有些方面写起来就有些吃力，比如“假如 P=NP，世界将会怎样？”里设计到计算复杂度时他承认自己“涉猎不深”，“叙述颇有些夸大其辞”，开了一个好头却不能继续下去。造成这样一个既成事实是因为他在中学的时候不喜欢化学而改学文科。实在太可惜了。

Matrix67 也不是都在写数学。“一探汉语中的文字幻方”就是对汉字的研究。在“习一文一乐，便入安宁万世……”一文里，他创作出了中文的 π 文字学（piphilology）的例子 。“汉字版 Alphametic 征集”很类似。遇到多项选择试题不会怎么办？“选 C 的概率真的是最高的！”。还有必须一提的是他的“原创小工具：Idea Generator”，这位老兄居然用计算机帮助生成思路。对于人生，他说：“人生就是一个接一个的杯具”。

有意思吧？有一篇非数学的博文“大力普及‘他妈的’有助于语言交流”就用了粗句，读起来有点像三联的“王小峰”了。不过人家王小峰说了：有比脏话更脏的，更何况 Matrix67 是在研究现代汉语呢，也就可以理解了。也许粗话某一天也可以登上大雅之堂，就象“不许放屁”一样。说的人多了，也就可以从粗话类里摘牌了。这是后话。现在还是请网友去访问 Matrix67 吧。

新浪微博链接

@加菲众：@数学文化 周末快乐！还记得前不久的最短公路问题吗？数学博客 Matrix67 近日发表了一篇文章，给出了一位英国 Geek 关于 Steiner 树的物理解法视频，并提到此问题是 NP-hard 问题，在规模很大时很难找到最优解来。文章很有趣，视频也很有启发性。

@数学文化：强力推荐 Matrix67 的文章以及这个视频！1. 周一去北大可以在 Matrix67 期末考试之后见到他 2. 还有老外这种极其专业的普及教育的视频真 TMD 专业。希望有一天我们也能够有批人如此专业）3. 网上这两位数学票友 Matrix67 和 @加菲众已经给数学添色 。

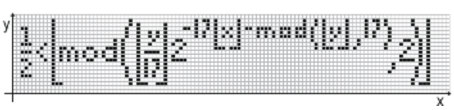
Matrix67

Matrix67

@数学文化：在一切向钱看的社会，书是大家没时间看的。不过多点原创作品，多点有创意的设计，部分值得推荐的书价钱可以上去。昨天和图灵的两位编辑和你们的作者北大中文系的数学人 Matrix67 聊天时谈到这点。

@灵明永玲：#本版选题# 顾森（Matrix67）的趣味数学科普书，选题合同已签。只是书名还没有最后确定。一个非数学专业的大学生要写一本数学书，而且我们还把它作为重点书来做，是不是疯了？非常感谢 @数学文化。

@耳钉徐老六：转载请标明出处：拈花微笑原文在这里，Matrix67 的文章永远这么犀利。读完之后的感觉就是，醍醐灌顶，有冲动把高数、线代重新看一遍……



@李松峰：必须深刻认识到一个现实：现在的书价基本上与花 15 块钱买耳机的价钱相当！想想看，15 块钱的耳机，你能指望多少？图灵《数学那些事儿》定价 29 元，据说港译本《数学教室 A-Z》价格 360 港元，相去岂可以道里计哉？图书市场，盖举国物欲横流、精神不振之缩影而已。君只见得房价愈骂愈高，岂容书价如法炮制？

@天山论见：

他——今年 23 岁，网名 matrix67。个人博客 2005 年 6 月开张，博文过千，全是关于艰深的数学问题，但点击量都过万。他——是北大中文系学生，研究数学只是"打酱油"。他——顾森，本期做客《天山论见》，一起聊聊《谁动了我的中学教育》。

@硕者：数学博客 Matrix67 近日发表了一篇文章，给出了一位英国 Geek 关于 Steiner 树的物理解法视频，并提到此问题是 NP-hard 问题，在规模很大时很难找到最优解来。

@Wicky 威：一个不等式方程的图象竟然和这个不等式本身一样？（图片 1 张）上图所看到的式子，在某个区间中的图案，恰好就是这个式子本身。详情请看 Matrix67 的博客。

@裴穴丝：发现一篇 Matrix67 很久前写的介绍 KMP 算法的文章：你可以委婉地问你的 MM："假如你要向你喜欢的人表白的话，我的名字是你的告白语中的子串吗？"

访日随感

张英伯

记得我第一次对日本有印象是在五十年代末上小学的时候。老师说日本的长崎和广岛在二战快结束时被美国用原子弹轰炸过，很多人死了，活着的患上了严重的疾病，让我们就这件事情给那里的小朋友写一封信。我写了“你们虽然生活在遥远的日本，但我们的心是连在一起的。”老师删掉了前一句话，改成“中国和日本是一衣带水的邻邦，我们的心是连在一起的。”作文本发回来，我盯着“一衣带水”四个字看了半天，没明白是什么意思。后来老师说中国和日本的海域离得很近，只有一条衣带那样宽的水。几十年后我从北京飞往东京进行学术访问，才知道两国之间的航程不比从北京飞到乌鲁木齐更远。

我对日本人产生具体的印象是八十年代在德国读博士学位的时候。我们这个领域有一位德高望重的日本教授，在筑波大学任教，同领域的专家都很尊敬他。有一次他来德国访问，我邀请他和两位欧美教授共进晚餐。席间谈到中国文化，他很兴奋，说他们小时候上学都必须学汉字，还要写毛笔字，背古诗。说着说着就背了起来，头摇晃着，像唱歌一样带有韵律。虽然发音含混，但是依稀能够分辨出是李白的“思乡”。当着欧美教授的面，我得意极了，中国的文化影响深远啊，

不服不行啊。他背完诗又写了一些中国字，还别说，写得真漂亮，一看就有毛笔字的功底。不料他突然话锋一转，向我提了一个问题。他说日本那么小，那么可怜，没有一点资源，到中国去借一点资源，中国为什么要打我们呢？记得当时我的脑袋“轰”的一声懵过去了，日本把中国打成那样，杀了那么多老百姓，抢走了那么多宝贵的资源，这叫借一点资源？这叫中国打日本？还没等我回过神来进行反驳，他们告辞了。直到将他们送出大门，我都懵懵的，在一衣带水的邻邦面前产生了强烈的屈辱感。心想你们不就是经济比中国发达吗？数学比中国做得好吗？那也不能把侵略说成有理吧。

又过了些日子，我和日本的山形邦夫一起乘火车到其他城市开会，山形邦夫是这位教授的学生，正在德国合作研究。我忍不住问他怎样看待第二次世界大战日本侵略中国的问题。没想到他跟老师的观点相反，明确地说日本在二战中就是侵略，应该向中国道歉。日本文部省在小学课本中歪曲二战事实，给下一代的思想造成混乱，是应该改正的。我复述了他的老师在那天晚餐上的问话，他说那一代的日本人已经被军国主义彻底洗脑了，很难转变过来，日本战后出生的一代就不会这样了。我终于长舒了一口气，心理平衡了一些。

那时早已发生了德国总理勃兰特访问波兰，在华沙二战死难的犹太人纪念碑前下跪谢罪的事情。德国人直面历史，勇于承担责任的精神震惊了世界，令人敬佩。可是日本官方从来没有向中国和亚洲各个被他们侵略的国家正式道过歉。我暗暗思索这是不是东西方文化的一种差别？西方人经常忏悔自己的错误，东方人经常不承认错误？在中国不是也没有对文革时期的罪行进行过彻底的反思吗？可是又一想，也不对呀，西方的基督教固然主张忏悔，我们东方的孔子不是也说过要“吾日三省吾身”吗？

我对日本这个国家有了一点了解，是在九十年代去日本筑波大学访问期间。记得从成田机场下了飞机，山形邦夫教授早已等候在机场门口。坐在他的汽车里一路开过去，沿途的田地和城镇太像中国了，连店铺的商标都是用中文写的。唯一不同的是北京气候干燥，东京周边异常湿润，因此夏天的温度尽管与北京相同或略低，却依然闷热难耐。筑波位于东京近郊，是日本政府建设的科学研究基地，各种研究所遍布其中，有点像我们的科学院，又有点像美国的硅谷。筑波大学的校园是狭长的，楼房都很普通，数学系和几个理科系共用的楼是砖红色的，不远处就是学校招待所灰黄色的楼。我因为不大能辨别方向，怕给别人找麻烦，基本上在招待所和数学系两点之间的线段上移动。筑波的教授工作十分努力，晚上十一点之后看看数学系的窗口，还有一多半亮着灯光。记得有一天我正在午睡，突然床铺摇晃起来，头顶上的灯也在摇晃，我突然意识到这是地震，赶紧推开房门跑了出去。跑到走廊里一看，几位教授正围坐在走廊尽头的一张小圆桌旁专心地讨论问题，前台的服务员也端正地坐在柜台后面，没有人惊慌失措，也没有人准备逃出大楼。看看这种情况，我迟疑着退回房间继续午睡。后来听日本的教授说，日本经常地震，因此楼房都是防震的，地基格外深，结构格外坚固，造价有时是美国同等楼房的十倍。天哪，竟然有不怕地震的房子，因为地震很难预报，所以日本人把劲使在盖房子上了。

访问筑波之后，我又陆续去了日本几次，有时去参加学术会议，有时去合作研究。对日本有一点深层次的了解是在一次会议之后。会议的组织者之一佐藤教授陪我们在东京观光。他问我们想去哪里，我说想去看看与明治维新有关的遗址。我在中学上历史课时，对明治维新印象很深，总是弄不明白为什么日本的明治维新成功了，我们的戊戌变法却失败了。忘记是什么原因，好像是其他几位教授都去过了，跟随佐藤教授去明治神宫的只有我一个人，于是我们得以深谈了一次。

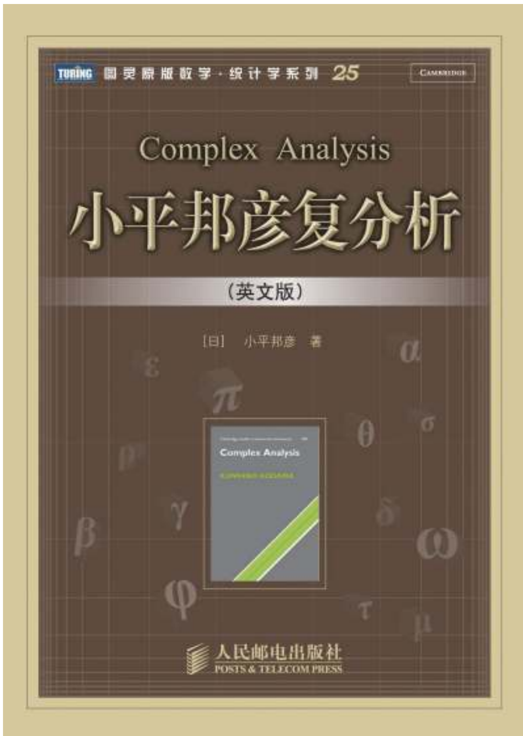
明治神宫是东京的五大神社之一，坐落在代代木地区。走进神宫，环绕着神殿的参天大树令人心旷神怡。我终于有机会面对面地问一位日本人，同为东方文化，为什么他们的明治维新能够成功。没想到他一开始就不同意我的说法，他说中国和日本虽然同处东方，但是文化和政治体制差别很大，我说我们有皇帝，你们不是也有天皇吗？他说是的，但是天皇

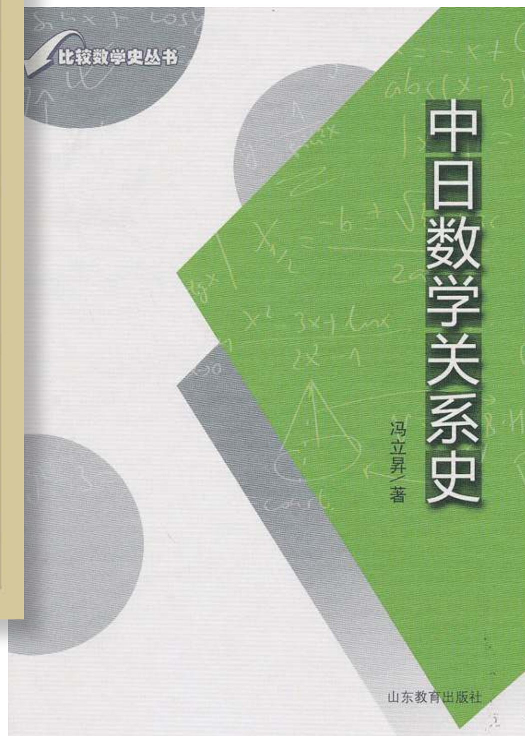

日本的第一个菲尔茨奖得主：小平邦彦教授

家族在日本并没有实权。天皇只是在名义上统治了日本3千年，只是日本的一个象征或者说符号。自古以来，日本并不真正统一，各地方的武士执掌实权，互相拚杀。我说像中国的春秋战国吗？他说有一点，但日本很小，每块地盘都不大，各地的武士必须启用有能力的人来协助他，否则很容易被别人消灭。而中国的皇权是实实在在的权力，两三百年轮换一次，因为皇权是绝对的，不需要有能力的人辅佐，因而就喜欢大臣逢迎拍马。我突然意识到，他对中国历史的了解比我对日本历史的了解要深刻得多。我说你学过中国历史？知道春秋战国？还知道中国两三百年就有一次改朝换代？他说当然，中国历史对于日本学生是很重要的，因为日本从中国学习了文字、宗教、和艺术。

他告诉我明治维新的成功是历史的必然，在明治天皇开始维新之前，日本的各路武士被丰田秀吉征服，首次实现了统一。后来德川家族打败了丰田家族，掌握了日本的实权，史称幕府时代。那时候日本的很多有识之士已经看到了西方先进科学技术的强大，感到日本走向富强必须学习西方的民主和科学。于是很多有才华的年轻人致力于辅佐明治天皇，结束幕府的统治，实行君主立宪，让日本成为一个法治国家。我说那你认为我们的戊戌变法为什么失败呢？那个年代中国也有不少有识之士看到西方的民主和科学了，希望实行宪政了呀。他说他认为戊戌变法的失败也是必然的，因为中国有着持续了两千多年的绝对的皇权，控制到国家的每一个角落，改变起来很难。我虽然很不情愿，也不得不承认他说的有一定道理。想想中国走向民主和法治的道路，多少人被关被杀，多少人倒了下去，直到戊戌变法失败一百多年后的今天，仍然在通往民主与法制的道路上艰难跋涉。明治神宫和佐藤教授的谈话给我留下了深刻的记忆。

今年暑假期间我再一次来到东京，是因为受中国数学会的委托在国际数学教育委员会担任执委，被派来参加东亚地区第五届数学教育大会，会址就在明治神宫旁边。大会开幕式之前的傍晚，组委会举行了一个小规模的招待会。走进小小的饭店，中国同事招呼我坐在他旁边，然后介绍我认识在座的各位日本教授。令我十分惊讶的是，饭局总共三桌，每桌十人左右，有两桌的教授是搞数学教育的，我们这一桌坐的竟然都是日本数学家，有研究数论的，研究几何的，研究代数几何的。其中有几位看起来年纪大了，竟然有一位是日本数学会的





小平邦彦亲自编写中学生和大学生教材。这本《复分析》是很有口碑的教科书

前任理事长。我对面的一位看起来年轻些，英语好一些，他说他是小平邦彦的学生。可惜饭局很短，跟日本老前辈交谈语言上比较困难，没有问清楚他们为什么来参加这个会议。

会议开始以后，我又遇到了小平邦彦的学生，他每天都按时出现在会场。他告诉我他也在日本数学会工作过，并被数学会派到国际数学教育委员会担任过执委。我一下子觉得遇到了知音，跟他聊了几次，仔细询问了日本数学界与数学教育界的关系。他说日本数学教育方面有三个主要的组织，现在组织会议的是人数最多的一个。他们每次开会都邀请数学家，有些数学家还是这个组织的成员。我问他在日本有没有发生类似于美国前一阶段发生的数学战争？他说有一些争论，但是不严重，数学家和数学教育家基本上能够坐下来一起讨论问题。我问他小平邦彦编写的高中课本在日本是否还有学校使用？他说前几年有些很好的学校在用，现在有的地方重新编写了。总之，日本的数学家非常关注数学教育，特别是一些知名的大数学家。给人的感觉是，日本人挺团结，经常全力以赴地共同做一件事情。

日本，中国一衣带水的邻邦，早已步入了发达国家的行列。日本走向科学和民主的道路并不平坦。坂本龙马是一位明治时期的政治家，他撰写的政治纲领“船中八策”的许多条文，被原封不动地搬入明治新政府的宪法，可惜32岁被政敌暗杀。一个半世纪以来，他经常被日本的官方和老百姓用各种方式纪念着。

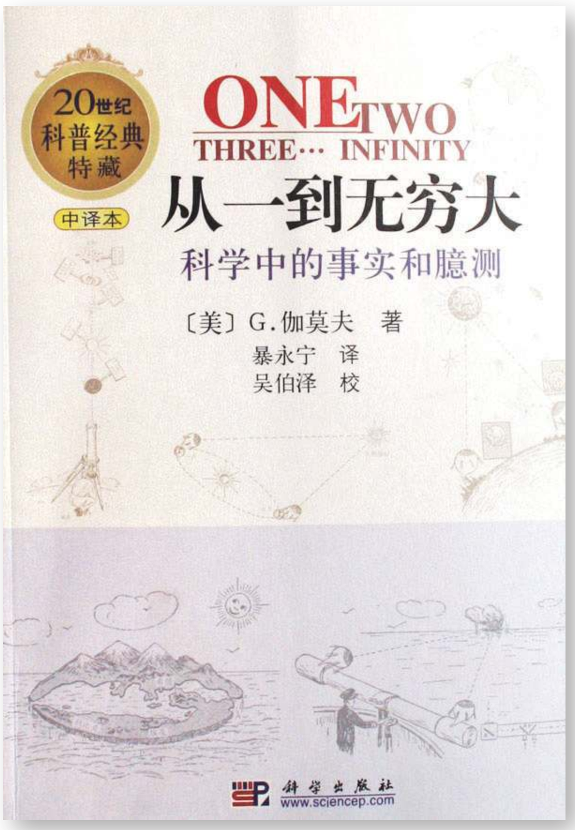
中国和日本曾经是宿敌。但是日本走上了科学与民主的道路，日本今天的许多做法，也许可供我们借鉴。

作者介绍：

张英伯是北京师范大学教授，本刊编委，《数学通报》主编。

书评——
伽莫夫《从一到无穷大》

丁 玖



有三类科普著作。优美的一类不光让读者了解到科学的基本事实和历史进程，更以妙语连珠、妙趣横生的散文语言引人入胜，指导人们进一步思考诸如“为什么会是这样”的问题，以此提高读者“科学的想象力”及“科学的思维力”。平淡无奇的一类像记流水帐般仅仅罗列科学史上发生的事件，缺少启迪灵感的生动描述与逻辑分析，活像《三国演义》中被杨修破解的曹操鸡肋那样食之无味、弃之可惜，并且读完之后又知其然而不知其所以然。劣等的一类则是“以抄为主，兼学包装”，大段复制取之不尽、用之不竭的他人著作内容和网络信息资源。比如说，几年前笔者的文章断落也几乎一字不漏、堂而皇之地成了国内名校教授撰写的获奖畅销“科普书”中某一章的“座上客”而无人知晓。

有两类翻译作品。一类无论是“鲁迅式的直译”或者为“林语堂式的意译”，均属传神之作，与原著相得益彰、交相辉映，如“傅雷之译”。另一类的翻译者应该向原作者“低头认罪”（除非原著也难登大雅之堂，这样两者可以扯平，不必道歉），因为外国语言的优美文笔被翻译语言的蹩脚改写破坏得“惨不忍睹”、“遍地哀鸿”。更有意思的是，有些本国语言的专用名词对应有外国语言的专用名词，但被无知的翻译者音译成自己的“创造物”，违背了数学中一一对应反函数概念定义的基本原则。一个众所周知的例子就是孟子独享的英文名字“Mencius”被翻译成“孟修斯”，让孔孟之道发源地的读者如坠云雾之中，不知这位亚圣的同姓者是何方神圣。

乔治•伽莫夫 (George Gamow, 1904-1968)1946 年初版的书“One, Two, Three … Infinity – Facts and Speculations of Science”无疑是上述第一类科普著作的“杰出代表”，而暴永宁翻译、吴伯泽校订的科学出版社 2002 年中文新版《从一到无穷大——科学中的事实和臆测》可以当之无愧地位于优秀译本前列。译者为 1968 届北大物理系毕业生，1981 年获得中国科大硕士学位。他的科学知识与素养，中英

乔治•伽莫夫的墓位于科罗拉多州

乔治•伽莫夫 (1904 -1968)

文语言能力，加上那个时代人们“普遍如此”的治学态度，让他三十三年前出版的最初译本成为那一代学生爱不释手的“课外读物”。1953 年厦门大学物理系毕业的校者，是个卓有成就的科学著作翻译家。他据原书 1988 年新版对旧的译本修改校订，是和原译者的“强强联手”。

伽莫夫生于俄国，1928 年获苏联列宁格勒大学物理博士后，曾游学丹麦、英国，先后师从伟大物理学家玻尔和卢瑟福，1931 年回到母校任教。因惧怕爱因斯坦“相对论”和海森堡“测不准原理”在苏联遭受厄运的现实，他 1933 年抓住出国参加学术会议机会，离开祖国，一年后移居美国，直至去世。他是天体物理学宇宙大爆炸理论的两个最初提出者之一，也是生物学遗传密码理论的创造者。他不光是杰出的科学家，也是卓越的科普作家。他一生中出版的二十五本书中，约三分之二属于科普，大都风靡全球，如吴伯泽翻译的《物理世界奇遇记》之英文版，不知重印了多少次。但最受欢迎的，恐怕还是这本充满“大数”的“伽氏风格”代表作。

乍一看《从一到无穷大》的大标题，会以为这是关于数学的一本读物。其实伽莫夫这本书讲的是“按照宇宙呈现在今天科学家眼前的模样，从微观方面和宏观方面为读者提供一幅宇宙的总的图景”，但数学的思想贯穿全书、数学的魅力到处可见。他讲数学的方式是生龙活虎、新鲜可口的，而不是死板抽象、枯燥无味的。他除了描述科学事实娓娓动听，像个讲故事的高手,并且还是一位“美术家”,因为“本书的全部插图都是作者本人绘制的”，而且画得栩栩如生，这真是一支锦上添花之笔。

该书是伽莫夫本想写给他 12 岁儿子及其同龄人看的，但一听到他的好朋友、美籍匈牙利数学家冯•诺依曼的女儿看了初稿几个章节之后脱口而出的“评论”后，他就决定把读者对象由少年旋转到成年，当然，对于那些头脑聪慧、求知欲极强的少年读者，这本书绝不会像某些电影那样“少儿不宜”。

浏览一下书的目录就可管中窥豹，大概知道作者要讲什么。这本书有四个部分。第一部分是“做做数字游戏”，分成“大数”、“自然数和人工数”两章。第二部分为“空间、时间与爱因斯坦”,包括“空间的不寻常的性质”、“四维世界”以及“时间和空间的相对性”三章。第三部分讲“微观世界”,由“下降的阶梯”、“现代炼金术”、“无序定律”和“生命之谜”这四章组成。第四部分“宏观世界”有两章：“不断扩展的视野”和“‘创世’的年代”。

美籍波兰数学家乌拉姆也是伽莫夫的知音和好朋友。乌拉姆逝世两年后，由 Mark C. Reynolds 和 Gian-Carlo Rota 编辑的他的文集《科学、计算机及故友》(“Science, Computers, and People”) 收录了一文“伽莫夫与数学：个人回忆”。这篇九页回忆有相当的篇幅谈论《从一到无穷大》，完全是逐章的评

科罗拉多大学以伽莫夫命名的大楼

述和回想。事实上，这两位科学巨人在相识后超过二十五年的时间里，无数次地讨论过很难说清属于物理还是属于数学的许多有趣的想法，而这些对话的论题和观点都和《从一到无穷大》的各章各节有关系，当然大都在更深层次的意义上。

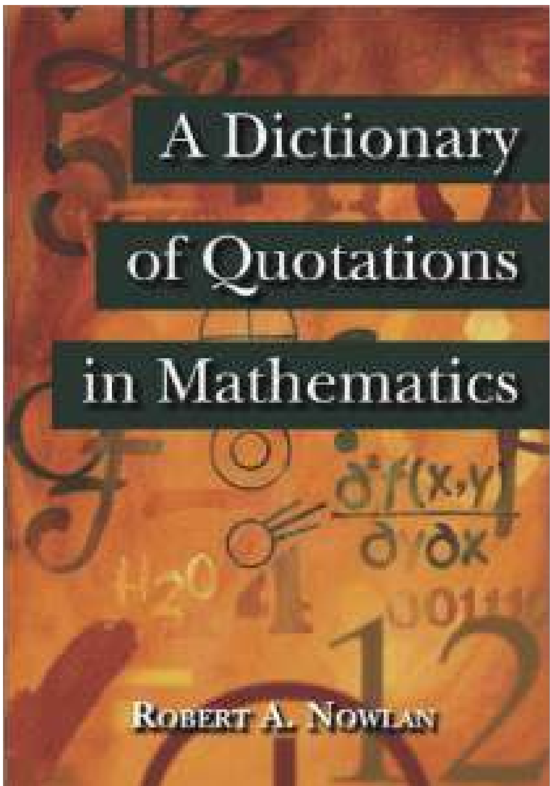
作为一名创造型的杰出数学家，乌拉姆的一段话勾勒出他对伽莫夫面向大众写作天才的推崇：“我们惊喜地发现在这本广受欢迎的册子里，抽象空间里的拓扑和代数性质被深刻地描述，同时它又是一个面向大众的通俗易懂的读物。”

和作者一样受过严格物理训练的译者应该是最有发言权的“书评家”之一。事实上，他的译后记就是一篇好书评。他给好书下过这样一个定义：“能让我产生‘学而时习之’的愿望；看过以后，过了一段时间还想再读，读时能常有温故而知新的感觉，这叫好的书。”他又给了好的科技书之标准：“能使读者觉得越读越薄。”这又让我们想起华罗庚提倡的读书法：“从薄到厚、从厚到薄。”译者断言：“看了这本书而不承认科学有趣，恐怕是不可能的。”这就够了，笔者不再赘言褒奖此书，只是建议读者像我一样，把这本不到300页的书捧在手中，一字一句地慢慢读之、细细品之。

2011年5月3日

《数学引语词典》简介

程钊



Nowlan, Robert A. (comp. & ed.) A Dictionary of Quotations in Mathematics. Jefferson, North Carolina, and London: McFarland & Company, 2002. xiv + 314p.

由 Robert A. Nowlan 编辑的这本《数学引语词典》并不是一本传统意义的词典，因为它的总体内容不是按照某个检索项的字母顺序而是按照专题来编排的。从读者的角度考虑，应该说这样的编排方式更便于使用。全书共收录了近 3000 条引语，按大的专题分为 38 章（其中个别专题分作两章或三章），每章又进一步细分为数目不等的小专题，总共 389 个。每条引语都注明了出处，书后附有详细的来源文献便于核对。书末的作者索引和关键词索引则为读者提供了进一步的方便。该书 38 章的标题依次为：上帝假设，宗教和数学；数学的本质 (I)(II)；数学的发展 (I)(II)；数学的历史起源；语言，语言学和数学；数学：创造，发现或发明？；自然科学和数学 (I)(II)；数学和艺术；数学和社会科学；教数学和学数学；无穷的本质；纯粹数学和应用数学；数学家；一些数学人物 (I)(II)(III)；问题和问题求解；数学和大自然；哲学，数学，真理和确实性；逻辑和基础；证明和数学；集合，关系和函数；空间：真实的和理想的；数：数学的心脏；数和数论；算术；代数和三角学；测量术；几何 (I)(II)；拓扑学和图论；分析和微积分；计算机，算法和数学模型；概率论；统计和统计学家。下面试着译出该书几条有关"数学史"的引语，供参考。

关于西方数学的一种客观公正的评述，包括对于每个人和每个国家在这一错综复杂的发展过程中应得的恰如其分的褒奖，只能由一位中国的历史学家来写。只有他具备为厘清那些被奇怪地曲解了的图景所必需的耐心和超凡脱俗的态度，去发现可能隐藏在我们西方人形形色色的自夸中的任何真相。

—— E. T. Bell

数学史作为对文明史的一种有价值的贡献也是重要的。人类进步与科学思想密切相关。数学和物理学的研究是智力进步的可靠纪录。

—— F. Cajori

像哲学一样，数学实际上与其历史不可分割。

—— H. M. Edwards

一个人有可能在不知晓太多它的历史的情况下发明数学。一个人也有可能在不知晓太多它的历史的情况下应用数学。但是一个人在对它的历史没有相当了解的情况下不可能具有一种成熟的对于数学的鉴赏力。

—— A. Shenitzer

程钊，1964 年出生，理学博士，现在北京化工大学理学院数学系工作

元老信札

英伯教授，在你作为编委的"数学文化"2卷2期上有一篇关于我的"访问记"，谅已见到。我的中心思想是现在的培养方式，包办太多，学生活动空间小，从而起步晚，所以出不来好人才。关于教改似应着重"引进"。

另外，我参加了半天"小学数学交流会"，我觉得都是"规范化"教学，所以作了半小时发言。

关于英才教育的文章我能见到的都读过。我觉得大部写得相当正式，我从实例谈谈，起点较低，也许可读性会好一点。祝

安好！

王元

2011.6/13.

英伯教授，在你作为编委的"数学文化"2 卷 2 期上有一篇关于我的"访问记"，谅已见到。我的中心思想是现在的培养方式，包办太多，学生的活动空间小。从而起步晚，所以出不来好人才。关于教改似应着重"引进"。

另外，我参加了半天"小学数学交流会"。我觉得都是"规范化"教学，所以作了半小时发言。

关于英才教育的文章我能见到的都读过。我觉得大部写得相当正式。我从实例出发谈谈，起点较低，也许可读性会好一点。祝

安好！

王元

2011 年 6 月 13 日

尊敬的刘主编、汤主编：

我作为第二届“全国高校数学文化课建设研讨会”的一名参会代表，有幸得到会议赠阅的一本《数学文化》2011/第2卷第2期。信手翻看，不禁为贵刊赏心悦目的编排和令人感兴趣的选题所吸引，于是开始逐篇阅读起来。记得自己上世纪末在中科院数学所读博时，曾有好几次在不同场合见到王元院士，真想走上前与他老人家攀谈，无奈觉着这样做不免有些唐突，加之本人生性有些腼腆而作罢。所以这次看到专访王元院士的文章，感到十分亲切。感谢蒋文燕博士为广大读者提供了一次走近王元院士的机会。刚入学时就听说王元院士很久以前就不招学生了，现在看来或许是目前教育体制下能够符合他那独特教学理念要求的学生越来越少的缘故吧。

黎景辉教授的自述文章以他的亲身经历为我们展示了改革开放后我国代数数论教学与研究情况的一个侧影。让我印象深刻的是他转述陈省身先生的一番话（p.21）。乍听起来确实有些让人吃惊，但仔细想想这也符合常理。人家知道的凭什么要白白告诉你呢？我想对任何人都是如此。试想一下，假如怀尔斯把他研究的半成品像塔尔塔利亚那样告诉了某个人，谁敢保证数学史上不会再出现一个“卡尔达诺”呢？陈省身先生关于“要发展自我开发的数学”的呼吁非常值得我们深思。的确，这些年来我们在追逐潮流的事上做得比较多，而在有可能引领潮流的事上却做的比较少。还有，黎教授一句“深悟到中美学术交流的蜜月期已结束”的话则让人浮想联翩，不知他今后是否方便讲出个中缘由。

然而，当我读到“数学趣谈”栏目中大耳峰的一段微博（p.28）时，非但没有感到有趣，反而觉得一阵恶心。原因是这个叫“大耳峰”的不知什么东东，仅凭自己那点一知半解，不但心安理得地兜售他对数学的无知，而且还心安理得地贩卖他对历史的无知，然后竟恬不知耻地对中国古代数学的辉煌成就大加贬损。（我真不想使用这种词句，但大耳峰所使用的语言让我实在忍不住，不过我还是作了一下从“西”到“东”的改动。）从学术的角度讲，对于他这种胡言乱语根本不值一驳，但考虑到贵刊有相当一部分读者是青年学子，而这个年龄段的人很容易接受片面的认识，因此作为一名教师的责任促使我不得不多说几句。

先说勾股定理。在国外通常称为毕达哥拉斯定理，但可以肯定的是毕达哥拉斯（约公元前6世纪）并非该定理的首创者。有确凿的考古证据表明古巴比伦人在约公元前1700年就已经对该定理有了深刻的认识。在我国，无论它的特例还是一般表述最早都见于约公元前1世纪成书的《周髀》。所谓“勾三股四”的特例就出现在其开篇记录周公向商高求教用矩测量之法的一段对话中。周公约生活于公元前1100年，因此说明那时的中国人已经知道勾股定理的特例。而做过教师的人都清楚，使用特例教学法向初级学生传授数学知识是非常有效的（用特例来说明一般原理也是中国古代数学著作的一大特点）。从这个角度说商高已经掌握一般的勾股定理并不为过。况且他还提到更早的时期我们的先祖就已将此法用于实际测量，显然实际问题不可能都恰好符合3∶4∶5的比例。退一步讲，同样是该书还记录了陈子与荣方的一段对话，其中对已知两直角边然后利用勾股定理求斜边的方法作了非常明确的一般表述。据学者研究，这两人生活的时代与毕达哥拉斯相当甚或更早。因此将“勾三股四”的特例歌诀（实际上并没有这样一个歌诀，倒是下面提到的“物不知数”题有求解歌诀）叫勾股定理的说法纯属无稽之谈。至于和三角学失之交臂的说法更是不着边际。稍有数学常识的人都知道勾股定理表述的是直角三角形三边的关系，三角学则涉及到任意三角形的边角关系。硬要扯上二者在发明顺序上的因果联系，就如同追问猴子也属灵长类哺乳动物但为什么在进化过程中却和人失之交臂一样滑稽。不难看出，大耳峰仅了解一点平面三角学。实际的情况是，历史上先出现的是球面三角学，虽然人们在研究球面三角学的过程中附带出一些属于平面三角学的内容，但对后者的自觉研究则要等到一千多年以后。而勾股定理并不适用于球面三角形。

再说中国余数定理，标准的叫法为中国剩余定理。首先这个名字并不是我们自己起的，它的原创者是一位美国数学家L. E. 迪克森。大

耳峰没弄明白的“物不知数”是约公元3～4世纪成书的《孙子算经》中的一道题目。原题是“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”除他以外，从来没有谁将这个题目叫作中国剩余定理。该题相当于求解一个线性同余式组 $x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$，$x \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$，$x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$。而求解这样的线性同余式组的一般方法就是中国剩余定理所表达的结论。《孙子算经》对于这个特例给出的求解算法非常容易加以一般化，因此人们也常把中国剩余定理称为孙子定理（国家科技名词审委会将其定为孙子剩余定理）。针对一般的线性同余式组求解问题的研究，最先是由秦九韶在1247年所写的《数书九章》中进行的，其关键部分以“大衍求一术”著称。类似的研究直到1801年才在西方出现，而其作者不是别人正是大耳峰提到的高斯。秦九韶的工作在1852年经由英国传教士伟烈亚力介绍为西方所知。1874年，德国人马蒂生指出了秦九韶的解法与高斯给出的定理的一致性。这就是中国剩余定理名称的来由。M. 戴维斯（又一位斯）曾在《逻辑的引擎》中谈到中国剩余定理在哥德尔证明不完全性定理以及他本人参与的关于希尔伯特第十问题的研究中发挥了重要作用，这是值得我们（大耳峰之流除外）为祖先的成就感到自豪的。大耳峰仅靠知道个剩余类环的名称便妄下断言，造出和环论擦肩而过的云云雌黄，完全置复杂的历史发展过程于不顾。事实上，高斯也没有从他的研究中产生代数结构的思想，更不用说环的概念了。L. 科里以他在《近世代数与数学结构的出现》中的翔实研究告诉我们，即便从戴德金关于代数整数理想的工作到诺特建立抽象环的理论看似是直接和近乎自然的一步，但实际的历史发展过程却是相当缓慢和错综复杂的。

大耳峰的一段微博虽寥寥数语，但却充斥着对中国古代数学历史发展的恣意歪曲，同时还充斥着对我国数学史研究者辛勤工作的肆意诬蔑。这样的“低级趣味”出现在以发表高质量普及性文章为办刊宗旨的《数学文化》中，不能不说是令人遗憾的。毋庸讳言，在某些场合和特定的时期，对中国古代数学有过人为拔高和不切实际的宣传，但我们也应该看到，通过那些严肃的数学史工作者的认真研究和共同努力，这些问题正在得到廓清和纠正。改革开放以来，中国数学史的研究方面已经出现了一大批优秀的著作，为我们正确认识祖先的数学文化遗产提供了有力的帮助。我们也注意到，越来越多的国外学者正加入到对中国数学史的研究中，这对于客观公正地评价中华民族对于数学的历史贡献都是大有裨益的。本来从历史的角度看，不同民族由于思想文化传统和社会经济环境的差异，对于数学本质有着不同的认识，对于数学的贡献也或多或少，这是十分自然的现象。面对现实的差距，需要我们以理性的批判精神对所走过的道路进行认真的反思和总结。但显然，就中国的数学发展来说，对其自身的历史采取妄自菲薄的态度和采取妄自尊大的态度一样有害。

最后，我想对贵刊提出一些建议。数学是求真的学问，在谈数学的刊物中作者以网名或笔名发表自己的观点似乎不妥，也有悖科学期刊的规范。微博作为一种新兴的信息传播和分享平台，有它自身的优势所在。但也必须看到微博的内容多是作者即兴所作的“快餐”，虽不能否认其中有真知灼见，然而哗众取宠者也大有人在。尤其是可以不署真实姓名，从而一些人可以不必为自己所言负上责任。因此希望编辑在选用时持慎重态度。据我理解，数学是需要深思熟虑的，文化则是需要积淀的，这两方面都与微博的属性背道而驰。不如开辟一个专栏，刊登数学家（广义）的箴言隽语。有人已经编辑出版过这方面的文集，但我相信这是一个没有完全开发的巨大文化宝藏，可以发动读者去搜集。也可以登出原文向读者征集好的翻译（如英译中或中译英）。通过不断积累待条件成熟时还可结集，成为刊物的一个副产品。以上建议或有不当，仅供参考。

祝

编安！并祝《数学文化》越办越好！

程钊

2011年7月25日