



数学史上最富有传奇色彩的数学家——伽罗瓦

纪念伽罗瓦诞辰 200 周年

邓明立

法国传奇数学家伽罗瓦，年仅 21 周岁便去世，可能是最英年早逝的数学家。以他名字命名的有“伽罗瓦群”、“伽罗瓦域”和“伽罗瓦理论”。而这些则是抽象代数学的标准术语。数学家及数学史家给出的公论是：他的死使数学的发展被推迟了几十年。当然历史不能假设，数学的发展也不能臆断，我们难以想象：如果伽罗瓦并非如此的“短寿”，那么现代的数学将会是什么样子。



时间: 1832年5月的某个清晨。
地点: 法国巴黎冈提勒的阁拉塞尔湖畔。
场景: 两名法国青年互相举着枪，在相距25步的地方，填弹，射击。其中一位青年被对手的枪射中腹部，由于没有医生在场，这名青年随后去世。

革命中的法国见证了又一次决斗，这已经不是什么新鲜事。在当时狂热的革命浪潮中，只有寥寥数人意识到，法国，甚至全世界，又失去了一个伟大的头脑。

决斗中被击中的青年名字叫做伽罗瓦（E. Galois, 1811-1832），他是一位颇具传奇色彩的数学家。数学家一般被认为是不食人间烟火，而且不能提起任何人的兴趣和引起任何人的共鸣，但伽罗瓦绝对是个例外，在全部数学史上，再没有比伽罗瓦更有说服力的例子了，无数学子因为伽罗瓦的故事而走上数学的道路。今年恰逢伽罗瓦诞辰200周年，我们有必要说下这段历史。

方程惹的祸

有文献记载，自人类文明诞生以来，就有了数学。古埃及文明、古巴比伦文明都曾孕育了繁荣的数学文化，这种文化反映在天文、宗教、艺术等各个方面。

汹涌的幼发拉底河和底格里斯河灌溉了肥沃的美索不达米亚平原，也孕育了高度的数学文明。从巴比伦时期起，已有简单的代数公式来计算二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解，即

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



塔塔利亚最早给出了三次方程的一般解法

阿拉伯数学的突出成就表现在代数方面，《代数学》集中体现了阿拉伯人处理代数方程的方法观。至此，代数学的主要任务就是解方程。

欧洲数学直到文艺复兴才得到解放，《代数学》传到欧洲后，人们开始尝试去解三四次方程。按照当时的风俗，学者们不公开自己的成果，而是作为挑战别人和获取声望的工具。这还有个故事，塔塔利亚得出了三次方程的解，但被卡尔达诺（G. Cardano, 1501-1576）用某种办法窃取并将其发表在《大术》中，于是二者之间的争吵开始

变成一部无厘头剧。

三次方程得到解决后，卡尔达诺的学生费拉里（L. Ferrari, 1522-1565）又解决了四次方程，其解法也发表在《大术》中，而现在解三次方程的公式被称为“卡尔达诺公式”。其实卡尔达诺是个百科式的人物，其成就涉及数学、物理、医学方面，他还是最早提出复数概念的数学家。但卡尔达诺性格十分古怪，而且嗜赌如命，他七十一岁时通过占星术推算出自己将在1576年9月21日去世，但是到那一天时，他活得像头壮牛，为了保全自己大星家的名声，就自杀了。

三、四次方程可解性，就是这些方程的解可以通过方程的系数经过加、减、乘、除以及开方等运算得出来，这种根的表示称为根式解或代数解。三、四次方程可解性的问题得到解决后，五次及五次以上的方程可解性似乎不是个难题，但这道题目出奇的难，300年间，竟然没有得到解决。

在这个过程中，拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736-1813）的工作最为重要，1770年他发表《关于代数方程解的思考》，讨论了三、四次方程能根式解的原因，发现三次方程有一个二次辅助方程，四次方



卡尔达诺（1501-1576）

费拉里（1522-1565）

鲁菲尼（1765-1822）



程有一个三次辅助方程，并将这些辅助方程称为原方程根的“预解函数”。他试图进一步推广这种方法，但在五次以上的方程遭到失败，于是便猜测五次方程不能根式解，但未能证明。

1799 年间，意大利数学家鲁菲尼（P. Ruffini, 1765-1822）用拉格朗日的方法证明不存在一个预解函数能满足低于五次的方程，并明确提出要证明高于四次的一般方程不能用代数方法求解。

尽管取得了一系列进展，但这个问题似乎很难解决。

初生牛犊不怕虎

英年早逝常使人哀伤不已，特别是那些极有才能的数学家。阿贝尔（N. H. Abel, 1802-1829）1802 年 8 月 5 日出生于挪威，1829 年便因贫困去世。16 岁时，阿贝尔就开始学习牛顿、欧拉（L. Euler, 1707-1783），拉格朗日和高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）的经典数学著作。18 岁那年父亲去世，从此生活的重担就压在了他身上。19 岁时，阿贝尔解决了五次及五次以上方程有无根式解这道让数学家头疼不已的难题，无奈当时挪威无人能看懂。

这个青年人的数学思想已经远远超越了挪威国界，他需要与有同等智力的人交流思想和经验。当时挪威的数学充其量也就算是四流，连三流都算不上，没人能看懂阿贝尔的论文。于是阿贝尔将论文寄给丹麦的数学家去审，丹麦数学虽然比挪威强，但也强不了多少，因此也没人能看懂。于是乎阿贝尔萌生了到欧洲大陆的数学强国去谋



阿贝尔（1802-1829）

求与顶级数学家对话的想法。

踌躇满志的阿贝尔自费印刷了证明五次方程不可解的论文（鉴于经费原因，他把内容压缩在了 6 页上），并选择德国的柏林作为旅行的第一站。其实当时的法国是不可动摇的一流数学强国，阿贝尔为什么首选德国呢？主要是因为高斯，当时的德国数学虽是二流，但高斯却是超一流数学家，他的高度是无人可比拟的，如果能得到高斯的承认，那将会省去很多事情。

阿贝尔在柏林滞留了将近一年时间。虽然等候高斯召见的期望终于落空，这一年却是他一生中最幸运、成果最丰硕的时期。在柏林，阿贝尔遇到并熟识了克雷尔（Crelle, 1780-1855）。克雷尔是一个铁路工程师，也是热心数学的业余爱好者，他以创办了世界上最早专门发表创造性数学研究论文的期刊《纯粹和应用数学》杂志而在数学史上占有席之地，这本期刊后被称为“克雷尔杂志”，阿贝尔关于五次方程的文章就发表在克雷尔杂志的第一期。正是由于阿贝尔的

论文，克雷尔杂志才能逐渐提高声誉和扩大影响。

1826 年 7 月阿贝尔从柏林抵达巴黎。在那里他拜访了勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）、柯西（A. L. Cauchy, 1789-1857）等法国著名的数学家，但结果仍令人失望。在巴黎的半年，阿贝尔从满怀希望到渐生疑虑终至完全失望。1826 年底阿贝尔回到柏林，不久就染上了肺结核（另一说阿贝尔在巴黎便染上了肺结核），这在当时可是不治之症。

窘迫和无奈之下，阿贝尔只得回国，但处境却更加艰难。挪威当时到底是弱国，而且处境闭塞，孤陋寡闻，他们连一个普通大学教授的教职都不能提供给阿贝尔，阿贝尔的生活已经非常艰难。1829 年 1 月，阿贝尔的病情恶化，他开始大口吐血，并不时陷入昏迷。1829 年 4 月 6 日晨，这颗耀眼的数学新



阿贝尔被视为挪威的民族英雄。挪威皇宫有一尊雕像，这是一个大无畏的青年的形象，他的脚下踩着两个怪物——分别代表五次方程和椭圆函数。



法国数学家柯西（1789-1857）被认为应该对阿贝尔的厄运负责



挪威数学家李（1842-1899）是李群的创始人，出版了阿贝尔选集



星便过早地陨落了。阿贝尔死后两天，一封信寄到了挪威，告知柏林大学已决定聘请阿贝尔担任数学教授，但阿贝尔已经永远读不到了。

读到此处，我们不禁要问：是谁该对伽罗瓦和阿贝尔迟迟未获得数学界承认的厄运负责呢？人们很自然会想起审评论文的柯西。

柯西是当时法国数学的领袖，数学史上论文最多的数学家之一。当时的柯西正年富力强，创造力旺盛，由于忙于自己的事而疏忽了阿贝尔的工作，又由于波旁王朝被推翻流亡国外而错过了伽罗瓦的论文，从而铸下大错。而柯西可能是当时唯一能理解伽罗瓦的法国数学家。关于柯西对伽罗瓦的态度，历史上存在两种不同的说法。一种说法是柯西根本没有把这篇出自一个名不见经传的中学生之手的论文当回事，随手丢进了字纸篓。以致到现在，很多人都把柯西当作埋没伽罗瓦的罪魁。另一种比较可信的说法是，柯西看出了这篇论文的重要性，并且希望伽罗瓦重新写一篇论文，详细阐述他的理论。事

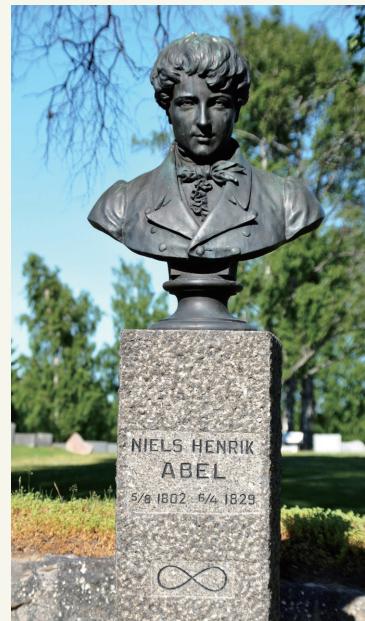
实上第二种说法更可信。

阿贝尔虽然不幸地去世了，但是他的精神感召着挪威数学家。挪威虽小，却出了不少的数学家，继阿贝尔之后，挪威又有两位世界级的数学家，西罗（P. L. Sylow, 1832-1888）和李（M. S. Lie, 1842-

1899），这两位数学家的工作均为群论，并且在数学大厦上永远留下了他们的名字。

西罗，挪威数学家。早年为一名中学教师，尽管教书占用了他大量的时间，但西罗还是挤出时间来研究阿贝尔的论文。在 1862-1863 学年中西罗得到了克里斯蒂安尼亚大学的临时职位，为学生讲授伽罗瓦理论和置换群。这可能是有记载的第一次讲述伽罗瓦理论。在西罗当年的学生中，有一位后来成为著名数学家，他就是李群理论的创始人——李。从 1873 到 1881 年，西罗同李合作，编辑出版了阿贝尔著作的新版本。1902 年又与别人合作出版了阿贝尔的通信集。

历史不会忘记这位杰出的数学家，为了纪念挪威天才数学家阿贝尔诞辰 200 周年，挪威政府于 2003 年设立了一项数学奖——阿贝尔奖。这项每年颁发一次的奖项的奖金高达 80 万美元，相当于诺贝尔奖的奖金，是世界上奖金最高的数学奖之一。而首位得主正是法国的一位数学家——塞尔（J-P Serre,



阿贝尔的半身雕塑



1926-), 塞尔 28 岁便因为稳定同伦群的计算突破而得到菲尔兹奖, 我想这个记录恐怕要空前绝后了。而他现在所从事的问题, 恰巧为伽罗瓦理论的逆问题: 即给定一个群, 是否有有理系数方程以它为群呢? 这并不是一个简单的问题。

虽说阿贝尔的遭遇很不幸, 但如果他的遭遇与另一位数学家比起来, 简直可以说幸运的多。由于阿贝尔的早逝, 高次方程在什么情况下可解的充要条件并没找到, 而这个历史重任则交给了另一位比他小 9 岁, 身世比他更坎坷的数学家——伽罗瓦。

傲慢与偏见

在距离法国巴黎 18 公里的地方, 有一个宁静的小城镇, 名叫堡拉瑞恩 (Bourg La Reine), 城里有一条伽罗瓦街, 在大街的 54 号房的正面, 立着一块纪念碑, 上面写着: “法国著名数学家埃瓦里斯特·伽罗瓦, 生于此。卒年 20 岁, 1811-1832 年”。这块纪念碑是在 1909 年 6 月 13 日设立的, 而它所纪念的人已经长眠于地下 70 多年了。

当时法国是公认的一流数学强国, 没有之一。即使今天, 法国数学依然很强, 2010 年菲尔兹奖得主中有两位正是法国数学家吴宝珠 (越南裔) 和维拉尼 (C. Villani)。巴黎综合工科学校和巴黎高等师范学校是令无数学生梦寐以求的院校, 而这两所学校的建立都得益于法国大革命。

在大革命前, 法国的社会矛盾已到不可调和的地步。由于波旁王朝残酷的统治, 巴黎人民再也忍



数学家蒙日 (1746-1818) 是巴黎高工的第一任校长



数学家孔多塞 (1743-1794) 在法国大革命时被送上断头台

无可忍, 关于这一段的描述, 法国作家狄更斯的《双城记》无疑最具代表性: 那是最美好的时代, 那是最糟糕的时代; 那是智慧的年头, 那是愚昧的年头; 那是信仰的时期, 那是怀疑的时期; 那是光明的季节, 那是黑暗的季节; 那是希望的春天, 那是失望的冬天; 我们拥有一切, 我们一无所有; 我们全都在直奔天堂, 我们全都在直奔相反的方向——简而言之, 那时跟现在非常相象, 某些最喧嚣的权威坚持要用形容词的最高级来形容它。说它好, 是最高级的; 说它不好, 也是最高级的。

1789 年巴黎人民攻占了巴士底狱, 里面虽然只有 6 个政治犯, 但却是史上最伟大的起义。法国的革命风暴吓坏了欧洲大陆的其他君主, 他们纷纷组织反法同盟。1792 年法国军队在瓦尔密战役中打败了外国干涉军, 获得了难得的喘息之机。为了正在进行的战争, 法国迫切需要工程师构建堡垒、修筑道路和桥梁以及从事有关枪炮方面的工作, 1795 年法国巴黎综合工科学

校应运而生, 著名数学家蒙日 (G. Monge, 1746-1818) 是这所学校的第一任校长。

在这之前的 1794 年, 巴黎高师也成立了, 傅里叶 (J. Fourier, 1768-1830) 被聘为该所院校的教授, 而这也是伽罗瓦的母校, 可惜母校将这名桀骜不驯的学生给开除了。

伽罗瓦生于 1811 年 10 月 25 日, 这时的法国大革命正如火如荼, 不过革命的血腥气息没有那么浓了。这也是著名的拿破仑时代, 由于拿破仑对数学和历史的热爱, 法国的数学取得了长足的进步, 无数数学家与拿破仑交上了朋友。但从巴黎起义到拿破仑称帝之前, 整个革命可谓血雨腥风。革命狂潮中的人民将矛头指向了那些在科学院享受政府津贴的院士和科学家们, 当时的口号就是: “共和国不需要科学家!” 拉瓦锡 (A. L. Lavoisier, 1743-1794)、孔多塞 (M. M. Condorcet, 1743-1794) 等科学家被送上了断头台。尤其是孔多塞, 他是著名的数学史专家, 具体负责了巴黎综合工科学校和高等师