我们需要怎样的数学教育

matrix67

Matrix67: My Blog

50% Informatics, 50% Mathematics, and 50% Imagination

顾森，网名matrix67，北京大学中文系应用语言学专业本科大四学生，数学爱好者，2005年开办博客matrix67.com，至今有上千篇文章，已有上万人订阅。曾任果壳网死理性派编辑，担任三年初中奥数培训教师，现任人人网产品部算法组技术人员。

摘自 http://www.matrix67.com/blog/archives/4294#more-4294

注：这篇文章里有很多个人观点，带有极强的主观色彩。其中一些思想不见得是正确的，有一些话也是我没有资格说的。我只是想和大家分享一下自己的一些想法。大家记得保留自己的见解。也请大家转载时保留这段话。

我不是一个数学家。我甚至连数学专业的人都不是。我是一个纯粹打酱油的数学爱好者，只是比一般的爱好者更加执着，更加疯狂罢了。初中、高中一路保送，大学不在数学专业，这让我可以不以考试为目的地学习自己感兴趣的数学知识，让我对数学有如此浓厚的兴趣。从05年建立这个Blog以来，每看到一个惊人的结论或者美妙的证明，我再忙都会花时间把它记录下来，生怕自己忘掉。不过，我深知，这些令人拍案叫绝的雕虫小技其实根本谈不上数学之美，数学真正博大精深的思想我恐怕还不曾有半点体会。

我多次跟人说起，我的人生理想就是，希望有一天能学完数学中的各个分支，然后站在一个至高点，俯瞰整个数学领域，真正体会到数学之美。但是，想要实现这一点是很困难的。最大的困难就是缺少一个学习数学的途径。看课本？这就是我今天想说的——课本极其不靠谱。

这个我深有体会。最近两年，我一直在做初中数学培训，有了一些自己的看法。数学教育大致分成三个阶段，看山是山看水是水，看山不是山看水不是水，看山是山看水是水。

最早数学教育就是，教你几个定理，告诉你它们是怎么证的，再让你证明一些新的定理。

Matrix67

后来的要求就变了：光学数学不够，还要用数学。数学教育已经上升了一个层次：大家要把数学用到生活中去，解释生活中的现象。一时间，课本也好，中考题也好，全是与生活实际紧密联系的数学应用题，仿佛放眼望去身边真的处处都是数学一样。商场卖货，书店卖书，农民耕地，工人铺砖，再一次涌现在了课本、教辅书和考试题里。其实，数学可以解释生活，只是我们并不会这样去做。生活的变量太多，再强大的数学模型也不可能考虑到一切。对于平常人来说，真正能用到数学的地方，也就只有算算帐了。

总有一天，数学教育会拔高到第三层：返朴归真，数学真正牛 B 的还是它本身。你会发现，那些伟大的数学思想，那些全新的数学理论，最初研究的动机并不是要急于解释我们身边的某某诡异现象，而是它本身的美妙。线性代数的出现，很大程度上要归功于神奇的克莱姆（Cramer）悖论；群论的诞生，也是伽罗华（Galois）研究多项式的解的结构时的产物；欧拉（Euler）创立图论，源于那个纯属无聊的哥尼斯堡（Königsberg）七桥问题；非欧几何的出现，则完全是由于这个问题本身的魅力。微积分呢？它确实有非常广泛的实用价值，物理学的各种定义都依赖于微积分；但很可惜，它不是一种具有颠覆性的数学思想。

初一课本讲负数时，反复说负数的实际意义，比如海拔、得分、温度、收支等等，把负数变成一种真实的存在。其实，这不是人们使用负数的主要动机。负数的价值在于，它可以把减去一个数变成加上一个负数，很多加加减减复杂到甚至需要分类讨论的东西都能够用一个式子统一在一起了。比如说小学的盈亏问题：如果每人分 3 个苹果还多 8 个，如果每人分 5 个苹果则还多 2 个，问有多少人多少苹果？解法是，两种分法多出来的苹果相差 6 个，这是每个人多分了两个苹果引起的，因此一共 3 个人，从而可以算出有 17 个苹果。但是，如果把问题改成“每人分 3 个就多 8 个，每人分 5 个就少 2 个”该怎么办？上面的公式就变了，8 不能减 2，要加 2 。因此，小学讲盈亏问题会分“盈亏”、“盈盈”、“亏亏”三种情况讨论。其实，如果把“少 2 个”理解成“多 –2 个”，问题是一模一样的，之前的公式同样适用。负数这一新思想立即把三种情况统一在了一起，它们的本质变得一模一样了。

这是我给初一学生讲负数时必讲的例子。这才是负数的意义。这才是课本里应该反复举例强调的。

某次看到论坛里有人问，群论有什么意思啊？某人回复，群论很有意思啊，只是课本把它写得没意思了，比方说，讲群论怎么能不讲魔方呢？我不赞同这个回复。数学吸引人的地方，不在于它在生活中的应用，而在于它本身的美。为什么不讲拉格朗日（Lagrange）定理？为什么不讲西罗（Sylow）定理？对于我来说，最能吸引我学习一个数学课题的，莫过于一系列非平凡的结论以及它的精彩证明了。

科幻小说《伤心者》的末尾列举了很多长期以来未得到实际应用的数学理论，不过却没有说到一个更为极端的例子。数学中的皇冠——数论——2000 年来一直没有任何实际应用，是最纯粹的数学。直到计算机，尤其是现代密码学的出现，才让数论第一次走出数学，走进了人们的生活中。是什么在支持数论的研究呢？只能是数学本身了。

在我给初中孩子出几何题时，我都尝试着给出一般性的问题，求证三角形中两边的平均长度大于第三边上的中线长，求证三角形三条高的倒数和等于内切圆半径的倒数，等等。即使是纯代数问题和解析几何问题，我也总能编出题目描述简单并且极具挑战性的问题。两数的和与积相等共有多少个整数解？把直线 $y = x$ 沿 $y = 2x$ 翻折后得到的直线方程是什么？在感受结论之美的同时，他们也会因自己独立解决了一个真正的数学问题而激动。

然而，这还不算教育的主要问题。某次与一个数学专业的同学聊到黎曼（Riemann）假设时，对方说她从没听说过黎曼假设。我大吃一惊，数学专业的人怎么可能不知道黎曼假设呢？随即明白，这也是拜数学教育所赐。翻开数学课本，总是成套的理论体系，先定义再证明，说得头头是道。可是，这些东西都是怎么来的呢？在得出这些东西的过程中，数学家们走了哪些弯路呢？课本上只字不提。课本里从来都只讲什么是对的，却从来不讲什么是错的。