

奇美的数学

The Unreasonable Beauty of Mathematics

未铭

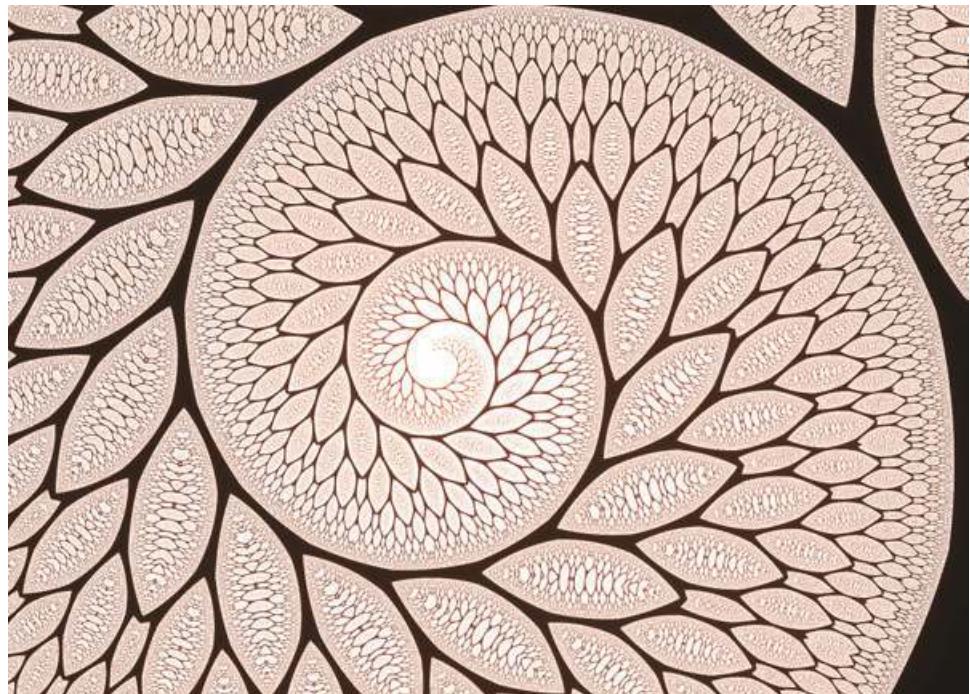
2011年8月号的《科学美国人》(Scientific American)登了一篇介绍数学之美的文章；图文并茂地讲解了一些近几十年来数学在实际生活中的完美应用。其中重头戏就是分形、双螺旋线等。这不禁使人想起陈省身先生曾在2003年出资两万元，亲自构思、设计、印刷了一套题为“数学之美”的挂历。他通过奇妙的设计使深奥的数学走进人们的日常生活，用通俗的形式展示数学的深邃与美妙。

挂历中12幅彩色画页分别为：复数、正多面体、刘徽与祖冲之、圆周率的计算、高斯、圆锥曲线、双螺旋线、国际数学家大会、计算机的发展、分形、麦克斯韦方程和中国剩余定理；其中分形、双螺旋线和《科学美国人》文中的介绍相吻合。

本文把《科学美国人》中的一部分内容扩充，加以一些背景知识，介绍给《数学文化》的读者。

著名的分形

1



分形这一概念是曼德布罗特 (B.B. Mandelbrot, 1924 — 2010) 最先提出来的。1967年他在国际权威的《科学》杂志上发表了一篇划时代的论文，标题是《英国的海岸线有多长？统计自相似性与分数维数》，文章作者曼德布罗特是一位美籍法国数学家和计算机专家，当时正在纽约的IBM公司工作。他对海岸线有多长这一问题的答案可能让你大吃一惊：他认

为无论你做得多么认真细致，你都不可能得到准确答案，因为根本就不会有准确的答案。英国的海岸线长度是不确定的！

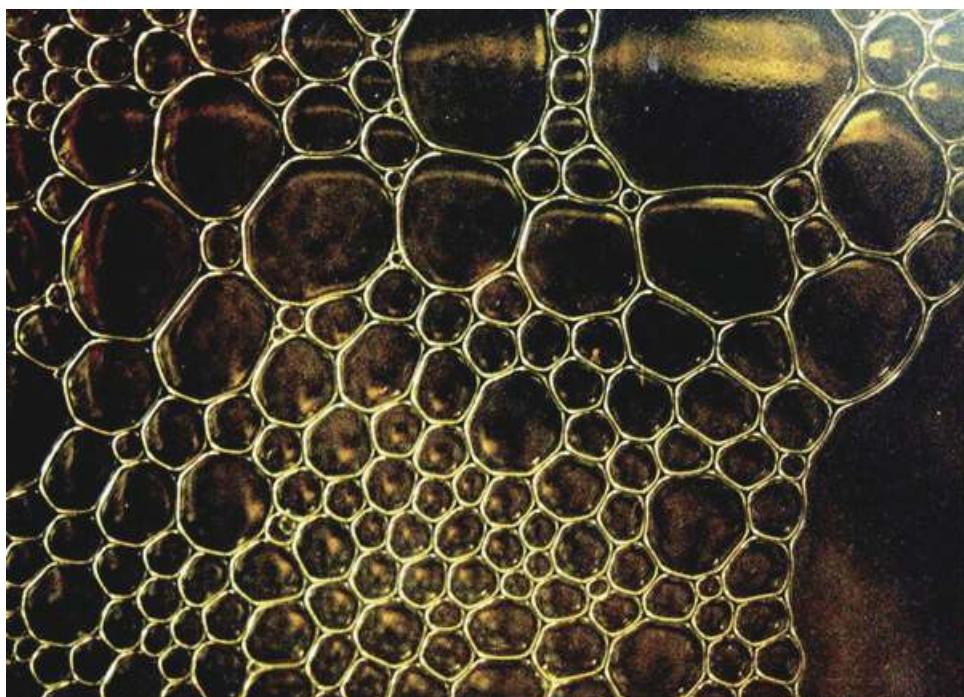
具体地说，海岸线有多长依赖于测量时所用的尺度。原来，海岸线由于海水长年的冲刷和陆地自身的运动，形成了大大小小的海湾和海峡，弯弯曲曲极不规则。假如你乘一架飞机在 10000 米的高空沿海岸线飞行测量，同时不断拍摄海岸照片，然后按适当的比例尺度来计算这些照片显示的海岸总长度，可否得到精确的结果呢？答案是否！因为，你在高空不可能区别许多的小海湾和小海峡。如果你改乘一架小飞机在 500 米高处重复上述的拍摄和测量，你就会看清许多原来没有看到的细部，而你的结果就会大大超过上次的答数。

海岸线长度的问题，曼德布罗特最初是在英国数学家理查逊（Lewis Richardson）的遗稿中一篇鲜为人知的晦涩的论文中遇到的。这个问题引起他极大的兴趣，并进行了潜心的研究。他独具慧眼地发现了 1961 年理查逊得出的边界长度的经验公式 $L(r) = Kr^{1-a}$ 中的 a 可以作为描述海岸线的特征参量，即“量规维数”，这就是著名的分数维数之一。这一问题的研究，成为曼德布罗特思想的转折点，分形概念从这里萌芽生长，使他最终把一个世纪以来被传统数学视为“病态的”、“怪物型”的数学对象，如康托尔三分集、科赫曲线等统一到一个崭新的几何体系中，从而产生了一门新的数学分支——分形几何学。

曼德布罗特在《英国的海岸线有多长》这篇文章中把那些部分与整体以某种方式相似的形体称为分形 (fractal)。上页的图形是最著名的分形朱利亚集 (Julia set) 的一个版本。朱利亚集是由法国数学家加斯顿·朱利亚 (Gaston Julia) 和皮埃尔·法都 (Pierre Fatou) 发展复变函数迭代的基础理论后获得的。朱利亚集是分形的一个特殊类型。

分形的泡泡

2



1977年,曼德布罗特在美国出版其英文版 *Fractals: Form, Chance, and Dimension* (《分形:形状、机遇和维数》);同年,他又出版了 *The Fractal Geometry of Nature* (《大自然的分形几何》)。直到1982年, *The Fractal Geometry of Nature* 第二版才得到欧美社会的广泛关注,并迅速形成了分形热,此书被分形学界视为分形圣经。他在《大自然的分形几何》中写道:“云朵不是球形的,山峦不是锥形的,海岸线不是圆形的,树皮不是光滑的,闪电也不是一条直线。”他认为,这些天然以及人造产物的形状是很粗糙的,并根据这些不规则的形状提出了一种新的数学,并将其称为“分形几何”。

分形几何建立以后,很快就引起了许多学科的关注,在许多科学艺术领域都得到应用和发展,如物理学、天文学、流体力学、混沌学、统计学、信息学、图形学、生物形态学,甚至音乐、绘画等广阔领域。分形几何学的特点是整体上各相异,不同尺度上自相似。小到混沌量子场,再到聚合物、树枝、大脑皮层褶皱、脉管系统、云朵、山脉、海岸线,大到星系、星系洋,到处都呈现自然界美丽奇幻的分形景观,这是自然界复杂性本质的表现。

上页图片的拍摄者是理查德·泰勒(Richard Taylor),他长期以来致力于发现分形的泡泡;此图是他在悉尼的一个池塘边拍到的。这个泡泡的维数不是通常意义上的整数,而是有分数维1.3。

分形的花椰菜

3



罗马花椰菜是一种可食用的花椰菜,16世纪发现于意大利。这种花椰菜长相很特别,花球表面由许多螺旋形的小花所组成,小花以花球中心为对称轴成对排列。花菜含有丰富的维生素及矿物质,尤以维生素C的含量特别突出。因它像宝塔一样,故又称宝塔菜。

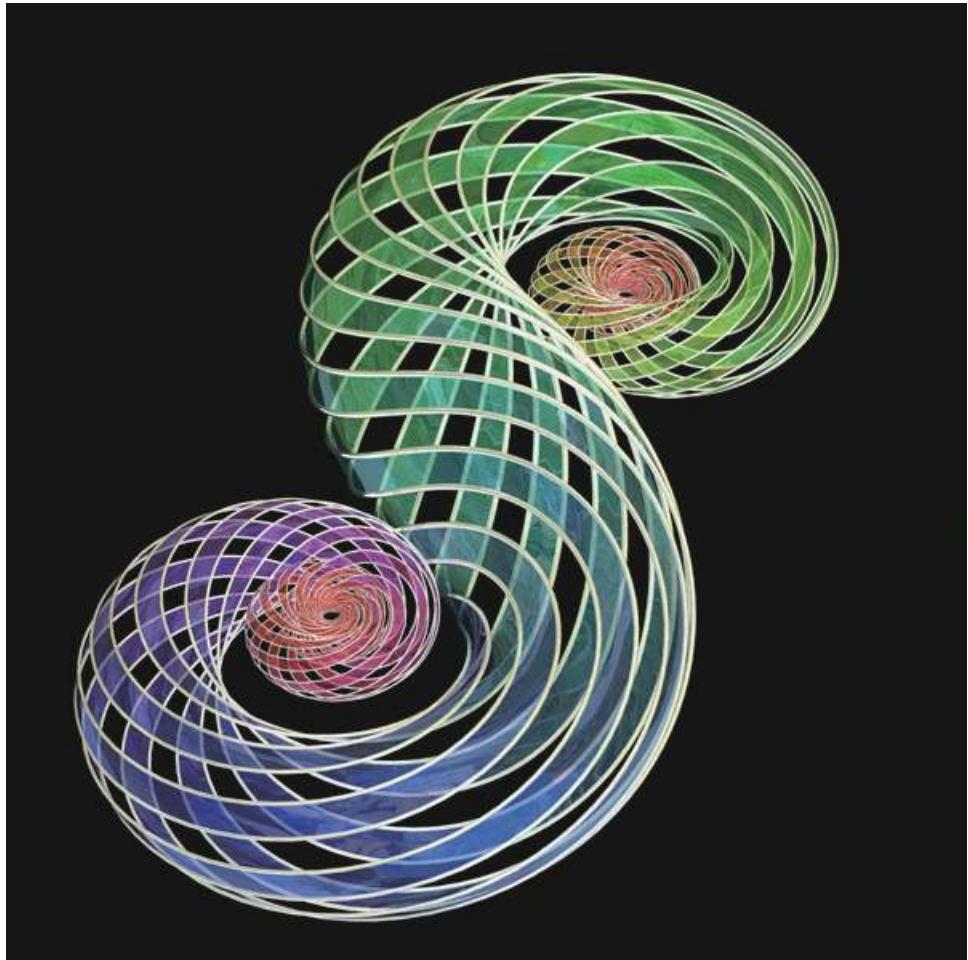
罗马花椰菜的神奇在于其规则和独特的外形，并因此成为著名的几何模型。说它独特，是因为它以一种特定的指数式螺旋结构生长，而且所有部位都是相似体，这与传统几何中不规则碎片所包含的简单数学原理相似。它对应的数学模型也吸引了无数数学家和物理学家加以研究。数学家发现，不断运用简单的迭代可以生成分形的花椰菜。

有个分形艺术网 (<http://www.fxyw.com>)，是一个展示分形艺术之美、学习交流分形艺术创作的平台。

上页的图是乔恩·苏利文 (Jon Sullivan) 拍摄的花椰菜，它被认定为目前英文维基百科上最清晰的图像之一。

4

双螺旋线



1953 年，年仅 25 岁的詹姆斯·沃森 (James Watson) 和 37 岁的弗朗西斯·克里克 (Francis Crick) 共同完成了一项伟业：他们从 DNA (脱氧核糖核酸) 的 X 光衍射图上解读了它的双螺旋结构。当时大多数人对于这一发现并没有予以关注，就连当时的媒体，也只有一家小报 (现早已停刊) 稍作报道。然而随着时光流转，DNA 双螺旋结构的发现对人类社会产生的影