

奇美的数学

The Unreasonable Beauty of Mathematics

未铭

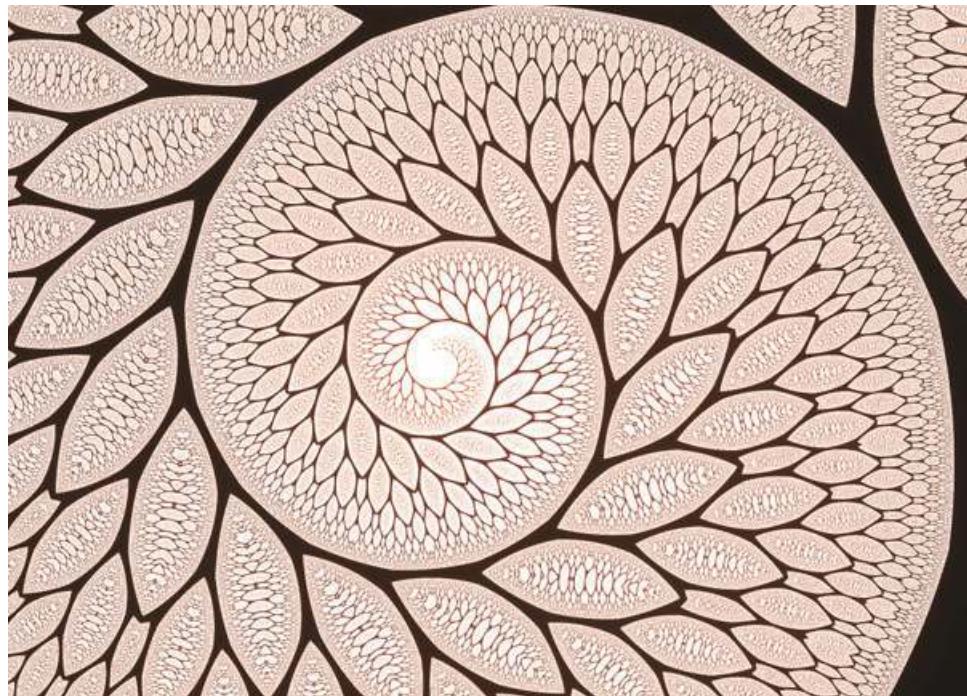
2011年8月号的《科学美国人》(Scientific American)登了一篇介绍数学之美的文章；图文并茂地讲解了一些近几十年来数学在实际生活中的完美应用。其中重头戏就是分形、双螺旋线等。这不禁使人想起陈省身先生曾在2003年出资两万元，亲自构思、设计、印刷了一套题为“数学之美”的挂历。他通过奇妙的设计使深奥的数学走进人们的日常生活，用通俗的形式展示数学的深邃与美妙。

挂历中12幅彩色画页分别为：复数、正多面体、刘徽与祖冲之、圆周率的计算、高斯、圆锥曲线、双螺旋线、国际数学家大会、计算机的发展、分形、麦克斯韦方程和中国剩余定理；其中分形、双螺旋线和《科学美国人》文中的介绍相吻合。

本文把《科学美国人》中的一部分内容扩充，加以一些背景知识，介绍给《数学文化》的读者。

著名的分形

1



分形这一概念是曼德布罗特(B.B. Mandelbrot, 1924—2010)最先提出来的。1967年他在国际权威的《科学》杂志上发表了一篇划时代的论文，标题是《英国的海岸线有多长？统计自相似性与分数维数》，文章作者曼德布罗特是一位美籍法国数学家和计算机专家，当时正在纽约的IBM公司工作。他对海岸线有多长这一问题的答案可能让你大吃一惊：他认

为无论你做得多么认真细致，你都不可能得到准确答案，因为根本就不会有准确的答案。英国的海岸线长度是不确定的！

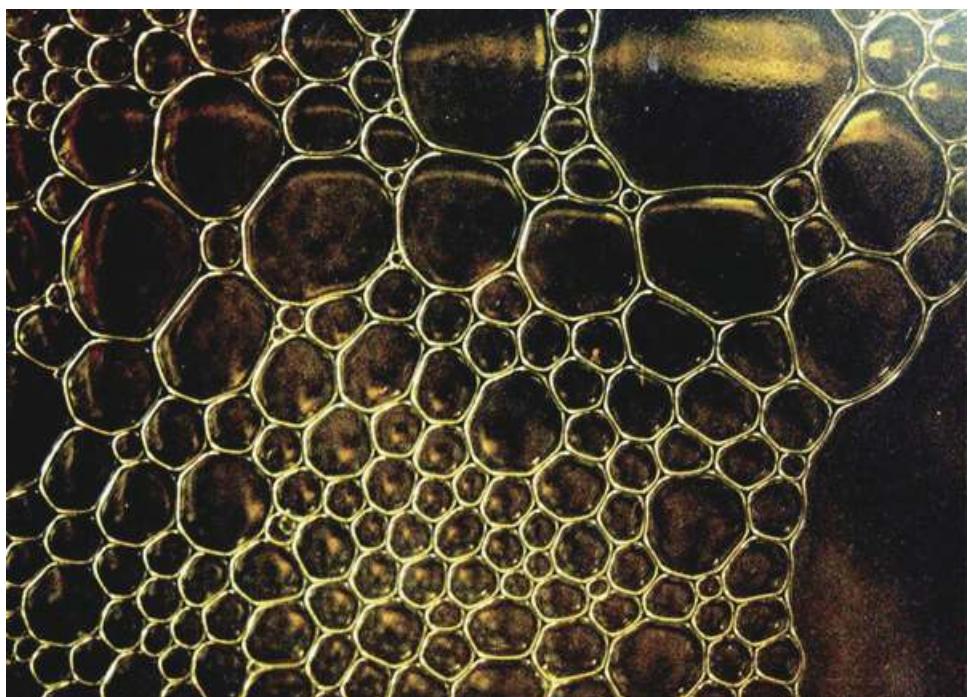
具体地说，海岸线有多长依赖于测量时所用的尺度。原来，海岸线由于海水长年的冲刷和陆地自身的运动，形成了大大小小的海湾和海峡，弯弯曲曲极不规则。假如你乘一架飞机在 10000 米的高空沿海岸线飞行测量，同时不断拍摄海岸照片，然后按适当的比例尺度来计算这些照片显示的海岸总长度，可否得到精确的结果呢？答案是否！因为，你在高空不可能区别许多的小海湾和小海峡。如果你改乘一架小飞机在 500 米高处重复上述的拍摄和测量，你就会看清许多原来没有看到的细部，而你的结果就会大大超过上次的答数。

海岸线长度的问题，曼德布罗特最初是在英国数学家理查逊（Lewis Richardson）的遗稿中一篇鲜为人知的晦涩的论文中遇到的。这个问题引起他极大的兴趣，并进行了潜心的研究。他独具慧眼地发现了 1961 年理查逊得出的边界长度的经验公式 $L(r) = Kr^{1-a}$ 中的 a 可以作为描述海岸线的特征参量，即“量规维数”，这就是著名的分数维数之一。这一问题的研究，成为曼德布罗特思想的转折点，分形概念从这里萌芽生长，使他最终把一个世纪以来被传统数学视为“病态的”、“怪物型”的数学对象，如康托尔三分集、科赫曲线等统一到一个崭新的几何体系中，从而产生了一门新的数学分支——分形几何学。

曼德布罗特在《英国的海岸线有多长》这篇文章中把那些部分与整体以某种方式相似的形体称为分形 (fractal)。上页的图形是最著名的分形朱利亚集 (Julia set) 的一个版本。朱利亚集是由法国数学家加斯顿·朱利亚 (Gaston Julia) 和皮埃尔·法都 (Pierre Fatou) 发展复变函数迭代的基础理论后获得的。朱利亚集是分形的一个特殊类型。

分形的泡泡

2



1977年,曼德布罗特在美国出版其英文版 *Fractals: Form, Chance, and Dimension* (《分形:形状、机遇和维数》);同年,他又出版了 *The Fractal Geometry of Nature* (《大自然的分形几何》)。直到1982年, *The Fractal Geometry of Nature* 第二版才得到欧美社会的广泛关注,并迅速形成了分形热,此书被分形学界视为分形圣经。他在《大自然的分形几何》中写道:“云朵不是球形的,山峦不是锥形的,海岸线不是圆形的,树皮不是光滑的,闪电也不是一条直线。”他认为,这些天然以及人造产物的形状是很粗糙的,并根据这些不规则的形状提出了一种新的数学,并将其称为“分形几何”。

分形几何建立以后,很快就引起了许多学科的关注,在许多科学艺术领域都得到应用和发展,如物理学、天文学、流体力学、混沌学、统计学、信息学、图形学、生物形态学,甚至音乐、绘画等广阔领域。分形几何学的特点是整体上各相异,不同尺度上自相似。小到混沌量子场,再到聚合物、树枝、大脑皮层褶皱、脉管系统、云朵、山脉、海岸线,大到星系、星系洋,到处都呈现自然界美丽奇幻的分形景观,这是自然界复杂性本质的表现。

上页图片的拍摄者是理查德·泰勒(Richard Taylor),他长期以来致力于发现分形的泡泡;此图是他在悉尼的一个池塘边拍到的。这个泡泡的维数不是通常意义上的整数,而是有分数维1.3。

分形的花椰菜

3



罗马花椰菜是一种可食用的花椰菜,16世纪发现于意大利。这种花椰菜长相很特别,花球表面由许多螺旋形的小花所组成,小花以花球中心为对称轴成对排列。花菜含有丰富的维生素及矿物质,尤以维生素C的含量特别突出。因它像宝塔一样,故又称宝塔菜。

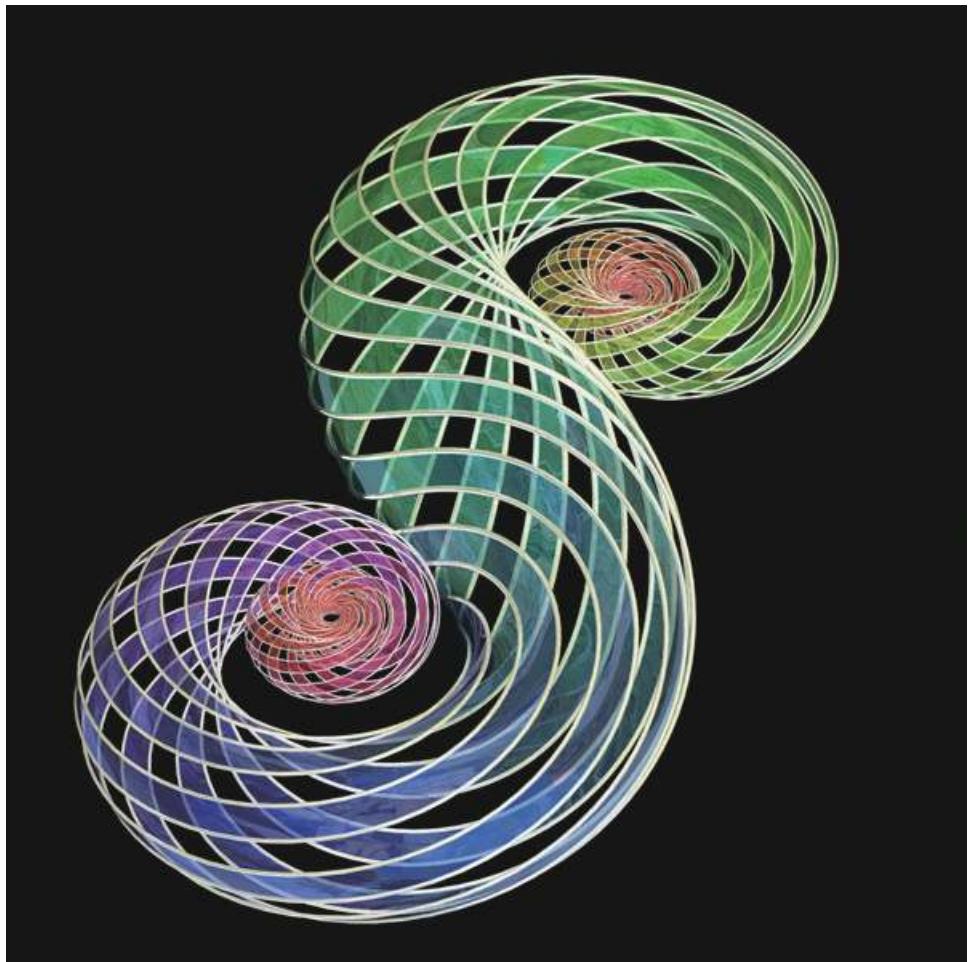
罗马花椰菜的神奇在于其规则和独特的外形，并因此成为著名的几何模型。说它独特，是因为它以一种特定的指数式螺旋结构生长，而且所有部位都是相似体，这与传统几何中不规则碎片所包含的简单数学原理相似。它对应的数学模型也吸引了无数数学家和物理学家加以研究。数学家发现，不断运用简单的迭代可以生成分形的花椰菜。

有个分形艺术网 (<http://www.fxyw.com>)，是一个展示分形艺术之美、学习交流分形艺术创作的平台。

上页的图是乔恩·苏利文 (Jon Sullivan) 拍摄的花椰菜，它被认定为目前英文维基百科上最清晰的图像之一。

4

双螺旋线



1953 年，年仅 25 岁的詹姆斯·沃森 (James Watson) 和 37 岁的弗朗西斯·克里克 (Francis Crick) 共同完成了一项伟业：他们从 DNA (脱氧核糖核酸) 的 X 光衍射图上解读了它的双螺旋结构。当时大多数人对于这一发现并没有予以关注，就连当时的媒体，也只有一家小报 (现早已停刊) 稍作报道。然而随着时光流转，DNA 双螺旋结构的发现对人类社会产生的影

响与日俱增，克隆技术、基因工程、生物芯片技术等都与之不可分割。沃森和克里克改写了生物学的历史，他们的研究成果被誉为可与达尔文的进化论、孟德尔的遗传定律相媲美的重要科学发现。

双螺旋结构自发现以来就为人类提供了诠释和利用生命体有机结构的重要工具。关于不同螺旋结构的诠释和它在基因科学中起的巨大作用，是数学家、生物学家、生物医学工作者不断追求的研究方向。

保罗·尼兰德尔（Paul Nylander）保存了一系列数学之美图片；上页的图就是一张由计算机生成的双螺旋线图。

太空中的螺旋形



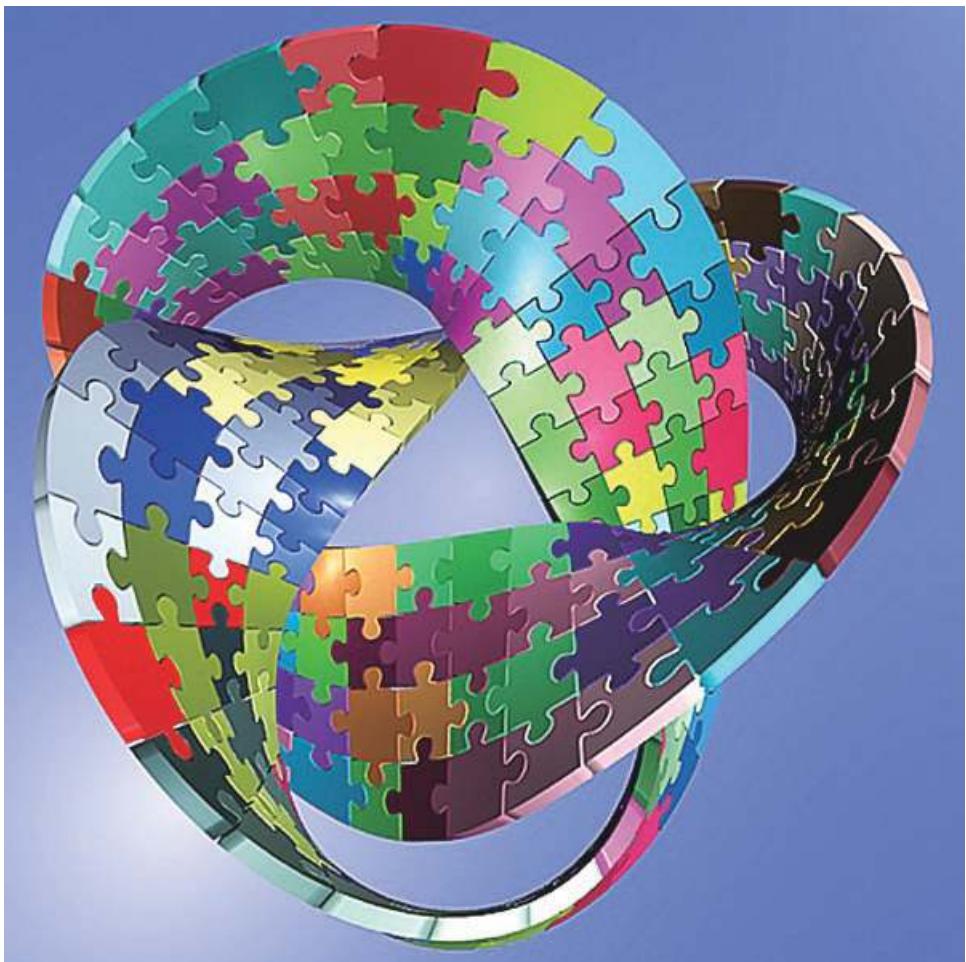
星云是由太空中的气体和尘埃结合成的云雾状天体，其体积十分庞大。由于邻近恒星的辐射线影响，星云会呈现缤纷的色彩和样式，令人目不暇接。

螺旋星云，永远是黑暗宇宙中的亮点，星体、灰尘、气体和等离子等物质由于重力的作用汇集到一起就形成了螺旋星云，看上去它就像是一个在黑暗的宇宙中划过的火风车。天

文学家早在 200 多年前就发现了它的存在，在这段时间里，它一直吸引着天文学家和爱好者们的目光，许多科学家运用了各种先进的探测方法对其进行研究。借助于哈勃太空望远镜，人们观察到一对螺旋星云彼此穿越对方（见上页图）。天文学家表示，这两个螺旋星云好像是在上演一段精彩的太空舞蹈。地心引力充当了“投掷者”的角色，将每一个星系中的恒星和气体“扔”进太空，其抛出的恒星和气体形成了一条 10 万光年的长尾巴。

6

莫比乌斯三叶形谜题



公元 1858 年，莫比乌斯发现：一个扭转 180° 后再两头粘接起来的纸条具有魔术般的性质。普通纸带具有两个面（双侧曲面），即一个正面和一个反面，两个面可以涂成不同的颜色；而莫比乌斯发现的纸带只有一个面（单侧曲面），一只小虫可以爬遍整个曲面而不必跨过它的边缘！

我们把这种由莫比乌斯发现的神奇的单面纸带，称为“莫比乌斯带”。

神秘的莫比乌斯带是数学家们的宠物。拿一张白的长纸条，把一面涂成黑色，然后把其中一端翻一个身，粘成一个莫比乌斯带，用剪刀沿纸带的中央把它剪开。你就会惊奇地发

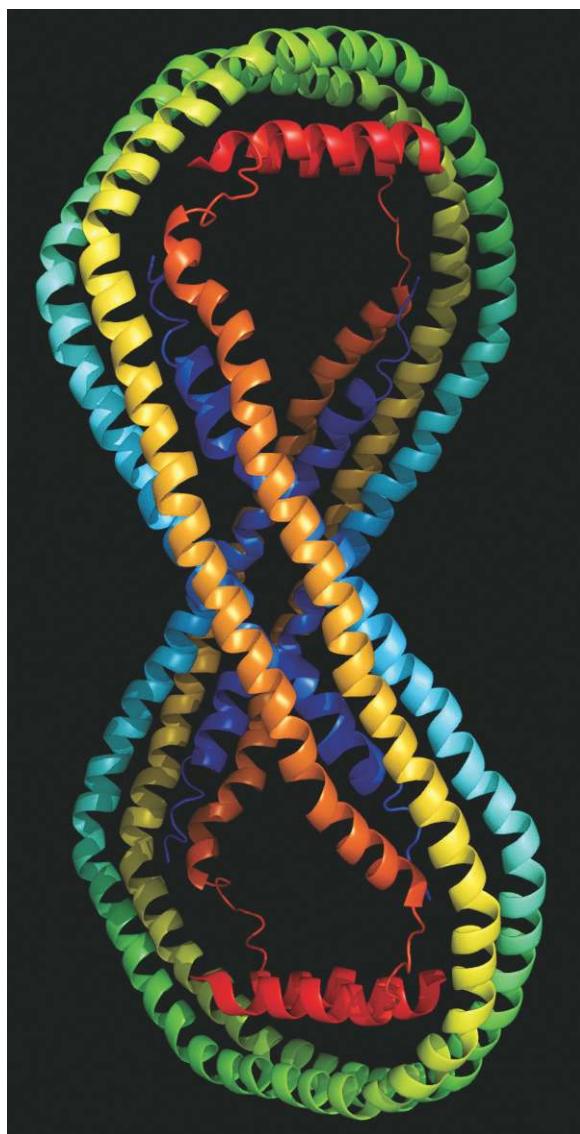
现，纸带不仅没有一分为二，反而剪出一个两倍长的纸圈！有趣的是：新得到的这个较长的纸圈，本身却是一个双侧曲面，它的两条边界自身虽不打结，但却相互套在一起！为了让读者直观地看到这一不太容易想象出来的事实，我们可以把上述纸圈，再一次沿中线剪开，这回可真的一分为二了！得到的是两条互相套着的纸圈，而原先的两条边界，则分别包含于两条纸圈之中，只是每条纸圈本身并不打结罢了。

这方面更通俗的介绍可以参考科学松鼠会的《莫比乌斯带：只有一面的魔环》(<http://songshuhui.net/archives/11714>)

汤姆·朗丁（Tom Longtin）是一名莫比乌斯带及其变形的粉丝；上图就是他的图库里的一幅；有兴趣的读者可以参观其网页 <http://homepages.sover.net/~tlongtin/index.html>

莫比乌斯蛋白质

7

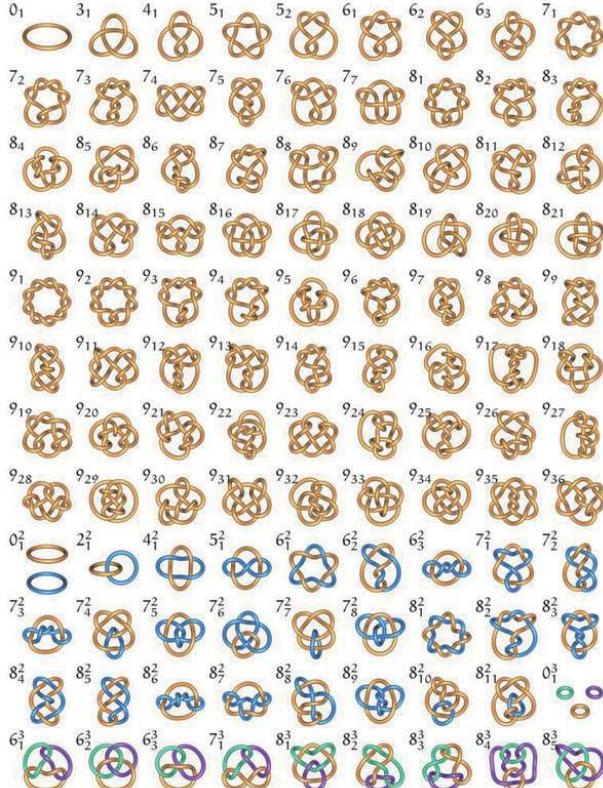


莫比乌斯带是一种拓扑学结构，其特点是只有一个面。如今，研究人员创建出一个纳米莫比乌斯带，这种可用于制造全新分子设备的结构是折叠DNA分子的自组装，并且通过DNA链长度的剪切可变换成各种形状。实验室中也有可能产生莫比乌斯带形状的粒子。前不久，一群科学家在《化学物理期刊》(Journal of Chemical Physics) 上发表了一篇论文，预言会有一种莫比乌斯带形状的碳单质（准确来说应该是石墨烯）。它能抵抗摄氏200度左右高温，性质相当稳定。由于其莫比乌斯带的结构，可以形成稳定的晶体。现在就等科学们把它实际做出来了。

高密度脂蛋白（HDL）的重要组成部分阿朴脂蛋白由一个最大尺寸为12.5纳米的螺旋结构扭结而成。华盛顿大学的麦克·迪卡（Mike Tyka）是一位蛋白质折叠专家，他保存着很多这类图片；左图就是其中一幅。

3

纽结理论



并且由于宇宙中元素的种类是有限的，从而通过对纽结的研究可以最终理解全部自然法则。不幸的是这个美好的蓝图被卢瑟福（Rutherford）的实验彻底粉碎了。卢瑟福发现原子其实并不像一团缠起来的线，而是像一个小的太阳系，无法用纽结理论给原子结构一个合乎情理的解释。

数学家们继续了物理学家对纽结的研究。纽结的奇妙性质来源于其嵌入三维空间的方式，只有在三维空间中才存在纽结，而我们人类恰恰也生活在三维空间中。另一方面，想要作好一个研究，最基础的工作就是收集总结经验资料。1899年，英国人泰特（Tait）给出了世界上第一个纽结表。之后，找到含有更多纽结的纽结表就成了纽结研究中的中心工作之一。上图给出了部分纽结表。

低维拓扑与其余数学（或科学）分支的最令人惊异的结合发生在纽结理论中。纽结理论（knot theory）是一门研究绳子打结方式的数学分支，这方面的一本通俗读本是姜伯驹院士的《绳圈的数学》。

这一理论作为低维拓扑学的一个分支，起源于大数学家高斯和他的学生的工作。然而真正使纽结理论受到全世界重视的却是物理学家开尔文（Kelvin）勋爵的功劳，他于1867年提出了一个原子模型，其中一种元素的原子与一种纽结对应，不同的元素对应不同的纽结。这一学说立即受到物理学家们的重视，许多人开始研究打结现象。开尔文的理论使人们相信只要完全搞清楚纽结的性质就可以得到元素周期表，