数学札记

万精油

5.8 级的地震刚过，百年不遇的台风 IRENE 又来赶热闹，整个美国东部顿时紧张起来。电视上说新泽西马里兰一带有人购物买水做准备，把商店的货物架都搬空了。波士顿地区没听说有搬空商店的情况，但大家还是做了一些准备，孩子学校已经来电话说有可能推迟开学。大家严阵以待，结果却让孩子们很失望，IRENE 悄悄地来了，又悄悄地走了，影响没有预计的那么大。带来的云都以小雨的形式洒在了地上，所以志摩诗的最后一句还是可以用上，“不带走一片云彩”。当然，局部地区的小破坏还是有的。我家附近一个电线杆被吹倒的树挂倒，停电数小时。停电那一刻让我想起我的一个侄儿在 FACEBOOK 上的留言：

“台风来临清单：笔记本一小时，三个 DS 各一小时，DIX 四小时，共八小时。”

原来这些电玩都是为停电准备的。像我们这些从前在完全没有电的地方生活过的人，停几个小时电没有什么可怕的。先是与女儿下了几盘围棋，然后她去弹钢琴，我去看书，一切都很自然。

停电期间翻了几本数学杂志，简转几篇有意思的在这里，顺便短评一下。

陶哲轩教授2006年从西班牙国王手里接过菲尔兹奖

数学札记1　数学资深会员

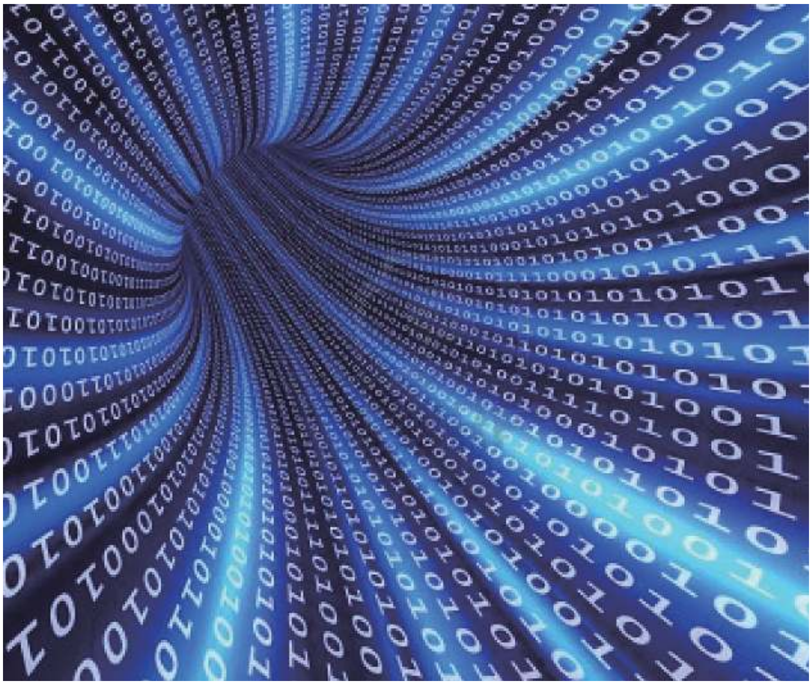
在2011年9月份美国数学协会的会刊“Notice”上，美国数学协会（AMS）主席说：长期以来，数学领域的各种奖都发给了那些最最优秀的数学家，很大一部分（不是最最）优秀数学家被冷落了。我们需要一种新的体制来鼓励、表彰、确认这些优秀数学家。所以，美国数学会准备建立资深会员制（Fellow），希望大家投票表决是否有必要。主席说别的协会（比如美国工业与应用数学协会（SIAM）等）都有资深会员制。这种制度可以提高数学家（和数学协会）的知名度，为他们的研究提供方便，也可以提高大家的工作激情。同期杂志上也登了反对方的意见。反方意见说数学家最可贵的东西就是纯洁，追求的是绝对真理，不受外界的影响。引进资深会员制就是在数学家中搞等级，会造成不必要的隔阂。而且，为了谁成谁不成资深会员的问题，必然会有争斗，会让许多数学家把宝贵的研究时间花在这些争斗上。最后说，我们不需要等级制度来划分我们。让我们为成为一个没有任何前缀的数学家而自豪吧。

我觉得正反两方是从两个不同的视角在看这个问题。数学协会主席是把数学家作为一个整体，与外面比较。别的学科有资深会员，简历上可以多写一项。数学家与别的科学家竞争时就少一个优势。而且，拿菲尔兹奖之类的大奖对绝大部分数学家来说是不现实的期望，设立资深会员制给大家多一个盼头。而反方是从数学家内部来看问题的。资深会员制必然产生内耗，引起山头主义，后患无穷。这几天国内学术界闹得轰轰烈烈的饶毅退选院士事件就是一个活生生的例子。

双方的考虑都有道理，关键是要看这个制度怎么管理。可以从别的学科借鉴好的管理经验。当然，只要有人为的参与，总会有这样或那样的非数学的因素。最后怎么决定就要看大家的表态结果了。

数学札记2　数学与网络

停电期间看的另一篇文章是陶哲轩的《数学与网络》。



陶哲轩何许人？菲尔兹奖获得者，神童中的神童。据他爸爸说，他两岁的时候，家里有聚会，看见他在教别的五岁的小孩做算术。家里人从来没有教过他算术，他自己说是看电视“芝麻街”学会的。也没有人教过他阅读，他说妈妈给他念书的时候他跟着看就学会了。11岁上大学，20岁拿博士，24岁当正教授。

陶哲轩年轻，还长着一副娃娃脸。记得有一次美国数学年会，他被邀作大会报告。上千人的大厅里座无虚席，台下的数学家们听台上一个中学生模样的人作报告。当时感觉很滑稽。

两年前，陶哲轩被邀请到美国科学院作演讲。这篇《数学与网络》就是他的演讲稿，《数学文化》2011年第1期有中文翻译。他在演讲中说，他作过很多数学讲座，但这种大型演讲（Speech）还只是第二次。上一次是他九岁时候作的，希望这次不要讲得像一个九岁小孩。顺便说一下，陶哲轩九岁时作的演讲网上也可以找到，有可读性。

陶哲轩在演讲中说，过去几十年意义最大的发明就是网络。网络影响了人类社会的每一个角落。他原来以为数学家呆在象牙塔里不会受到太多影响。其实不然，网络对数学家的影响也越来越大。反映在数学家工作的两个主要方面——教学与研究。

从教学方面来讲，网络使课堂变得很灵活。学生可以利用网络与老师互动，当然也可以利用网络来作弊。网络也使课堂变大。一个现实课堂或许只有二、三十人，但虚拟课堂可以有成百上千的学生。而且，虚拟课堂不受时间限制。他的一些旧讲义放在网上，很久以后都会有学生来提问题，继续学习。他还举例说，数学中有一个经典变换叫莫比乌斯变换（Mobius Transformation），被许许多多的老师教过上千遍。Youtube上有个关于莫比乌斯变换的视频，讲得比任何老师都好，已经被点击过几百万次。这就是大课堂。

从我的孩子的情况看，这种利用网络来帮助教学的现象不仅在大学存在，连高中甚至初中教学也已经很普遍了。学校经常让学生上网查资料做功课，家庭作业也是在网上公布，让学生自己去看或下载。我曾经想限制我女儿的上网时间，结果她告诉我做家庭作业需要上网。

再来看数学研究。陶哲轩说，从前一个人的研究结果只有很小圈子的人才能看到，等到大多数人看到出版物常常是好几年过去了。现在不一样了，现在有Email，有Archive，每个人都可以自己印Pre-Print。甚至有些人干脆不投稿给正规杂志，直接把文章放在网上。比如证明庞加莱猜想的佩尔曼，把他的证明直接放到网上的数学库里（Archive），到现在为止也没有把他的文章投给任何杂志。另外，现在刚刚开始兴起的Polymath也是网络时代的产物。所谓Polymath，就是把一个题放在网上，大家你一言我一语，提出各种想法。只是提想法，并不需要具体解决到底（可以验证别人的某个想法）。基本精神是任何人都不要企图从头到尾解决这个问题。大家根据别人的想法再产生新想法。这样下去，用不了多少时间一道难题就被解决了。这个方法已经有了成功的实例。

关于这个Polymath，以后有机会我会专门再讲。

数学札记3　数学与计算机

计算机对应用数学的帮助是很显然的事。现实生活中的方程，比如气像、工程方面的，不论是偏微分方程还是常微分方程，甚至代数方程绝大多数都没有解析解。要解决现实问题我们只能求数值解。求数值解必须要做大量的数值运算，这是计算机的强项。计算机的最原始功能就是做数值运算。事实上，在计算机出现以前，英

文的计算机这个单词 Computer 是一个职业，就像现在程序员叫 Programmer 一样，专门做计算的人就叫 Computer（可以译成计算员）。二次世界大战的时候，美国军方就雇有很多这样的计算员。随着计算机的出现和进步，计算员这个职业消失了，Computer 是机器，不是人。

这篇文章要说的不是计算机对应用数学的帮助，而是对纯粹数学研究的帮助。

或许有人要说，对纯数学的帮助也是很显然的。自从 Knuth 的 TeX 问世以后，纯数学家有相当一部分的时间都是在计算机上敲 TeX 或 LaTeX。TeX 对数学家发表学术文章当然是功不可没。与此相关的计算机作图功能也可以再加一枚勋章。但这些仍然不是这篇文章的重点。这篇文章所要谈的是计算机对纯粹数学研究的帮助。

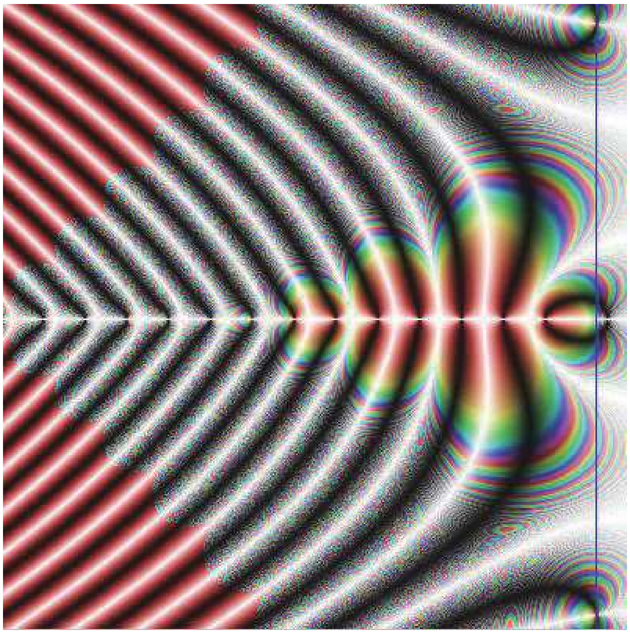
大家要问的第一个问题就是，纯数学的研究需要的是创造性思维，计算机完全是听命于我们的程序，没有一点创造性思维的能力，怎么可以帮助数学家搞研究？我下面就从一个数学命题由猜想到定理的几个方面来回答这个问题。

一个数学猜想提出来了，或证明它，或反证它，或者加上条件从各个方面去逼近它。证明的问题我们后面再讲。反证或逼近（或称之为验证）这条路有很多可以用计算机来帮助。比如黎曼猜想，最开始的验证工作就是算出它的一些零点来（从虚数部最小的算起）。刚开始时是用手算，算出 10 来个就很不得了了。后来改进了方法算的多一些，但真正的大量运算还是改用计算机以后。现在已经算到 10 的 12 次方以后。因为曾经有人预测反例会出现在第 3 亿个左右，所以算到 3 亿个算是一个突破。算得越多就给人越多的信心。这在某种程度上来说算是对纯数学研究的贡献。

读到这里一些读者或许会问，说来说去还是纯计算，计算机能不能自己发现一些东西，比如未知的公式什么的？

上个世纪有个很著名的数学家拉马努金（Ramanujan），他的思路与别人不一样，不时发现新奇的等式。比如数论中一些函数的等式，或有关 π 的等式等等，连大数学家哈代（Hardy）这样的人都感到很惊奇，别人去证明他的这些等式需要花很大的功夫。可是，像拉马努金这样的奇人一个世纪才出一个，一般人没有能力去发现这些新奇的公式。这又回到我们前面所提到的问题，计算机可不可以独立发现未知公式？

答案是肯定的。被评为二十世纪十大算法之一的 RSLQ 整数关系算法就可以用来发现新奇的公式。下面



用色彩表示的 Zeta 函数值。可以看到 s=1 是一个极点。图的右上方有一个非平凡零点，右下方是与其对称的非平凡零点。两个都在临界线 x=1/2 上。还可以看见 x 轴上那些平凡零点，x=-2, -4,⋯

这个关于 π 的公式就是用 RSLQ 算法发现的：

$$\pi=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)$$

这个 RSLQ 算法还可以用来发现很多其它公式，其中许多公式都很有拉马努金公式的味道。这个算法甚至还发现了黎曼 Zeta 函数的一些生成函数，也就是说可以用它们来产生无穷多的关于黎曼 Zeta 函数值的公式。比如下面这个生成函数公式：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\zeta(2k+2)x^{2k}$$
$$=3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\binom{2k}{k}(1-x^2/k^2)}\prod_{m=1}^{k-1}\left(\frac{1-4x^2/m^2}{1-x^2/m^2}\right).$$

右面展开以后，每一个 x 项的系数都是一个相应于左边同一个 x 项的黎曼 Zeta 函数值的公式。

一个很显然的问题是，什么叫“发现”了这些公式，有证明吗？

所谓 PSLQ 算法就是用任意精度的运算找出的相关数值的整数关系，但任意精度落实到计算机还是有一个精度，所以这些公式的发现还不能算是证明。

超市中橘子的放法在数学上可证明是最紧密的放法

阿基米德有句名言说：证明已经发现了的东西比没有线索时去发现它要容易。这些由PSLQ算法发现的公式有些是可以找到严格的数学证明的。当然，并不是所有这些公式都那么容易找到严格证明。

最可喜的是这些搞算法的人又搞出一套证明算法，可以“严格”证明某些这样产生的公式。上面那个关于黎曼Zeta函数的生成函数就是由计算机发现并证明的公式。

这就产生了一个非数学的理念问题，我们如何看待这些由计算机算法发现并证明的公式？不少数学家对这些完全用计算机推导证明出来的东西是不能接受的。

从前的数学，尤其是纯数学，全靠纸笔加大脑，别的只能起辅助作用。甚至为了纯粹的数学研究，对辅助工具的应用都有很多限制。比如我们大家熟悉的三等分角问题、倍立方体问题就对辅助工具有严格限制。只能用圆规、直尺，而且这直尺还不能带刻度。事实上后来有定理说凡是通过圆规直尺可以得到的点，只用圆规也可以得到。这样一来，辅助工具又限制到圆规，直尺也没有了。如果没有这些限制，这些问题都不是问题。很多业余数学家不明白这点，所以常常看到有人说他找到了三分角或倍立方体的方法。最搞笑的是有些人的证明里不但直尺有刻度，圆规还可以有角度量。

对于只相信纸笔和大脑的数学家，不能接受这些完全用计算机推导证明出来的东西那是很自然的事。

其实，这个问题并不是现在才有的。著名的四色定理的证明就用到了计算机的帮助，验证上千个特殊地图。另一个用到计算机来证明（或验证）的定理是著名的开普勒(Kepler）装球问题。这个问题困扰了数学家几百年。后来有人提出几个步骤来证明这个问题，其中的最后一步用到计算机来验证。据说其源代码与验证所产生的数据有好几个Gbytes。对于这些借助于计算机来做大量验证的定理的证明，有相当长一段时间不被数学家们接受。现在情况要稍微好一点，大约是人们对计算机越来越信任。另一方面，一些人提出，有些定理，比如有限群的分类定理的证明用到几万页纸，而且前后发表在上百本不同的杂志上。这种证明的可靠性不一定就比计算机证明的定理强。后来有一些知名数学家提议，今后把数学定理都贴上标签，比如计算机辅助、大规模合作、构造性证明等等。

总体来说，计算机对数学（包括应用数学与纯数学）的帮助已经是一个不争的事实。而且会越来越多，越来越深入。事实上计算机对数学研究的帮助还有很多别的方式，我们这里就不一一列举了。

数学札记4　π 的故事

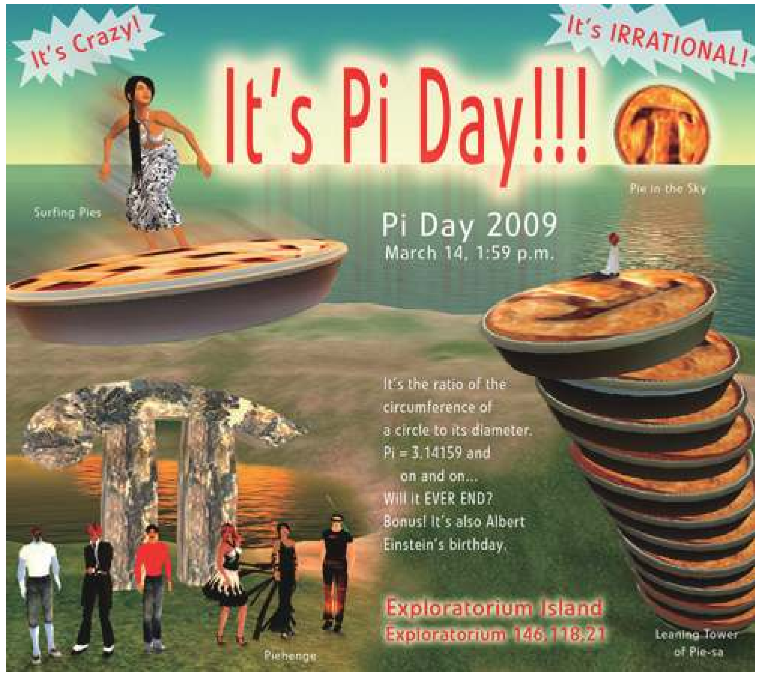
在结束本文以前，顺便提一些与此相关的趣事，算是对感觉前面部分太枯燥的读者的一种补偿。

前面提到一个由PSLQ方法找到的关于 π 的公式，这个公式值得专门写一写。

我们的祖冲之把 π 算到七位在当时是一个很了不起的事。那时没有什么公式，完全靠内接正多边形去逼近，算到7位数差不多要算到边数上万的正多边形，相当辛苦。现在有了公式，算起来就方便多了。有一个递推公式，每多推一次就可以把位数精确度提高4倍。1，4，16，64这样下去，开始那几项是完全可以手算的。有了这些公式，即使用手算也很容易算到几十位。

关于 π 的计算一直是搞计算的数学家们觉得有趣的试刀石。计算机的每一次升级都伴随着更多的 π 的位数的计算。我们知道，计算机速度的增长遵守一个莫尔规律，说的是计算机的运算速度大约每两年就要翻一番（也有说是18个月）。如果我们把 π 的位数的计算与计算机速度的增长做一个图，我们会发现这两个量线性相关程度相当高。现在有案可查的 π 的计算已经到了10的13次方。这就带来了一个问题，计算机程序出错是有可能的，我们怎么知道这些算出来的数字可信呢？前面提到的那个由PSLQ方法找到的关于 π 的公式有一个特性，那就是用它可以直接算出 π 的特定数段。比如直接算从第8亿位开始的 π 的数字，而不用算前面的那些位数。有了这

背诵 π 的吉尼斯世界纪录创造者：吕超



个特性，我们就可以用它来验证用别的公式算出的 π 值。随便挑出一截来，用这个公式验算一下，如果两个数值吻合，那么就可以几乎肯定这些数字不会错。

说到 π 的数字，我们知道 π 是无理数，也就是说它的数字永远不会有循环。曾经有人说我们永远不可能知道 π 的数字段中会不会有 0123456789 连续出现。这些人没有想象到计算机的速度可以进展得这么快（当然也因为有人发现更好的算法），这个数字段被人在 1997 年发现。它出现在 π 的第 17387594880 位数开始的那十位数。甚至到了 1989 年，英国数学家彭罗斯（Roger Penrose）还在他的名著《皇帝的新脑》里声称我们几乎不可能知道 π 的数字中是否会有连续十个 7 的出现。结果这个数段也被找到了。它出现在 π 的从 22869046249 开始的那十位数中。仔细想一想这其实不奇怪。π 的数字如果均匀分布，这些数字，0123456789 也好，十个 7 也好，都是一个很自然的十位数，只要算的位数足够多，每个数字的出现几乎都是很自然甚至必然的事。常常有人说数学家大都是无趣的人，这个关于 π 的自然而又奇妙的小知识可作为朋友聚会的话题，或许会帮你扭转一些无趣的印象。

目前背诵的吉尼斯世界纪录是吕超于 2005 年创造，当时这个西北农林科大的研究生用了 24 小时零 4 分的时间，背出 π 小数点后 67890 位数。根据竞赛规则，背诵每两个字之间的间隔不能超过 15 秒，所以他在参赛的一天一夜里不能吃不能打瞌睡，体力要求绝对高。

2009 年 3 月 12 日，美国众议院通过了一项决议，把 3 月 14 日确定为全国的 π 日。更有趣的是，麻省理工学院的招生办公室每年都把新生录取通知书留到 π 日才发送给新生。现在网络发达了，人家装了个程序等到 3 月 14 日下午 1 时 59 分 26 秒才在网上把录取通知向全世界发出去，对应 π=3.1415926。

作者简介：万精油，本科毕业于四川大学数学系。中国科学院数学研究所硕士，美国马里兰大学数学博士。业余时间爱好写作。以杂文、记事为主，科普为辅，偶尔也写小说。代表作为科幻小说《墨绿》。因为兴趣广泛，起笔名为万精油。