



历史上间或出现神童，神童常常出现在数学、音乐、棋艺等方面。卡尔·弗雷德里希·高斯（C. F. Gauss, 1777-1855），一位数学神童，是各式各样的天才里最出色的一个。就像狮子号称万兽之王，高斯在数学家之林中称王，他有一个美号——数学王子。高斯不仅被公认为是 19 世纪最伟大的数学家，并且与阿基米德、牛顿并称为历史上三个最伟大的数学家。现在阿基米德和牛顿的名字早已进入了中学的教科书，他们的工作或多或少成为大众的常识，而高斯和他的数学仍遥不可及，甚至于在大学的基础课程中也很少出现。但高斯的肖像画却赫然印在 10 马克——流通最广泛的德国纸币<sup>[1]</sup>上，直到 2002 年马克被欧元取代。



德国马克上的高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）

## 一、与自然数的“情谊”

1777 年 4 月 30 日，高斯出生在汉诺威公国（今下萨克森州）的不伦瑞克市郊外（现属市区）。其时德意志民族远未统一，除了汉诺威，尚有奥地利、普鲁士、巴伐利亚等邦国。在高斯的祖先里，没有一个人可以说明为什么会产生高斯这样伟大的天才。他的父亲是个普通的劳动者，做过石匠、纤夫、花农，母亲是他父亲的第二个妻子，做过女仆，没受过什么教育。她甚至忘了高斯的生日，只记得是星期三，耶稣升天节前 8 天，高斯后来自己把它算出。但母亲聪明善良，有幽默感，并且个性很强。她以 97 岁高寿仙逝，高斯是她的独养儿子。

据说高斯 2 岁时就发现父亲账簿上的一处错误。9 岁那年，他在公立小学念书，一次老师为了让学生们有事干，让他们把从 1 到 100 这些整数加起来，高斯几乎立刻就把写好结果的石板面朝下放在自己的课桌上。当所有的石板都被翻过时，这位老师惊讶地发现只有高斯得出了正确的答案：5050，但是没有演算过程。事实上，高斯已经在脑子里对这个算术级数求了和，他注意到了  $1 + 100 = 101$ ,  $2 + 99 = 101$ ,  $3 + 98 = 101$ , 等 50 对数，从而答案是  $50 \times 101$  或 5050。高斯在晚年常幽默地宣称，在他会说话之前就会计算，还说他问了大人字母如何发音，就自己学着读起书来。

高斯的早熟引起了不伦瑞克公爵费迪南的注意，这



短街上的高斯故居（作者摄于哥廷根）

位公爵的名字也叫卡尔，是个热心肠且始终如一的赞助人。高斯 14 岁进卡洛琳学院（现不伦瑞克技术大学），18 岁入哥廷根大学。当时的哥廷根大学仍默默无闻，事实上，它创办不到 60 年。由于高斯的到来，才使得这所日后享誉世界的大学变得重要起来。起初，高斯在做个语言学家抑或数学家之间犹豫不决，他决心献身数学是 1796 年 3 月 30 日的事了。当他差一个月满 19 岁时，他对正多边形的欧几里德作图理论（只用圆规和没有刻度的直尺）做出了惊人的贡献，发现了它与费尔马素数之间的秘密关系。特别地，他给出了作正十七边形的方法，这是一个有着二千多年历史的数学悬案。

那一年可谓是高斯奇迹年，就在他发现正十七边形作图理论 9 天以后，即 4 月 8 日，他发展了同余理论，首次证明了二次互反律，这样就彻底解决了二次同余方程的可解性判断问题。5 月 31 日，高斯提出了后人称为素数定理的猜想，也即不超过  $x$  的素数个数为  $x/\log x$ ，这个猜想直到 100 年后才被证明；又过了 50 年，两个用初等方法证明它的人中的一个因此获得了菲尔兹奖。7 月 10 日，高斯证明了费尔马提出的三角形数猜想。10 月 1 日，他发表了有限域里一个多项式方程解数问题的研究，

导致一个半世纪后德国数学家外尔提出了他的著名猜想。

高斯初出茅庐，就已经炉火纯青了，而且以后的 50 年间他一直保持这样的水准。不过，高斯取得博士学位是在同属下萨克森州的黑尔姆斯泰特大学，那里不仅离他的故乡更近，还有一位当时德国最好的数学家普法夫。值得一提的是，这所创办于 1576 年的古老大学在 1810 年并入了哥廷根大学，可是普法夫却去了哈雷大学。高斯所处的时代，正是德国浪漫主义盛行的时代。高斯受时尚的影响，在其私函和讲述中，充满了美丽的词藻。高斯说过：“数学是科学的皇后，而数论是数学的女王。”那个时代的人们也开始称高斯为“数学王子”。事实上，综观高斯整个一生的工作，似乎也带有浪漫主义的色彩。

数论是最古老的数学分支之一，主要研究自然数的性质和相互关系。从古希腊的毕达哥拉斯时代起人们就沉湎于发现数的神秘关系，优美、简洁、智慧是这门科学的特点。俄国画家瓦西里·康定斯基甚至认为：“数是各类艺术最终的抽象表现。”就像其他数学神童一样，高斯首先迷恋上的也是自然数。高斯在 1808 年谈到：“任何一个花过一点功夫研习数论的人，必然会感受到一种特别的激情与狂热。”被称为现代数学最后一个“百事通”的希尔伯特是 19 世纪后期重新崛起的哥廷根数学学派的领军人物，其传记作者在谈到大师放下代数不变量理论转向数论研究时指出：

数学中没有一个领域能够像数论那样，以它的美——一种不可抗拒的力量，吸引着数学家中的精华。

另一方面，我也注意到一些不曾研究过数论的伟大数学家，如帕斯卡尔、笛卡尔、牛顿和莱布尼兹，他们都把后半生的精力奉献给了哲学或宗教，惟独费尔马、欧拉、拉格朗日、勒让德、高斯、狄里克雷这几位对数论有着杰出贡献的数学家，却终其一生都不需要任何哲学和宗教。或许，这是因为他们心中已经有了最纯粹、最本质的艺术——数论。值得一提的是，对一些优美的数学定理或公式，高斯经常一而再、再而三地给出新的证明。例如被他称为“皇冠上的宝石”的二次互反律，高斯一共给出了 6 种证明方法。即便在今天，这个定律仍与中国剩余定理一样，出现在每一本基础数论教程中。

这里我想引用印度数学天才拉曼纽扬的故事说明数论学者与自然数的“情谊”，这位来自印度最南端泰米尔纳德邦的办事员具有快速且深刻地看出数的复杂关系的惊人才华。著名的英国数论学家 G·H·哈代在 1913 年“发现”了他，并于次年邀他来剑桥大学。哈代有一次去探望病中的拉曼纽扬时告诉他，自己刚才乘坐的出租汽车车号是 1729。拉曼纽扬立即回答：“这是一个很有意思

的数，1729 是可以用两种方式表示成两个自然数立方和的最小的数。”（既等于 1 的三次方加上 12 的三次方，又等于 9 的三次方加上 10 的三次方。）哈代又问，那么对于四次方来说，这个最小数是多少呢？拉曼纽扬想了想，回答说：“这个数很大，答案是 635318657。”（既等于 59 的四次方加上 158 的四次方，又等于 133 的四次方加上 134 的四次方。）

## 二、现代数论的新纪元

1801 年，年仅 24 岁的高斯出版了《算术研究》，从而开创了现代数论研究的新纪元。书中出现了有关正多边形的作图，方便的同余记号、二次型理论、类数问题以及优美的二次互反律的首次证明，他还把复数引入数论，即后人所称的高斯整数环。除了第 7 章（最后一章）给出代数基本定理的首次严格证明（他的博士论文结果）以外，其余各章讲的都是数论。在这部著作出版以前，数论只有若干零散的定理和猜想，高斯把前人的结果和自己的原创性工作结合起来，使其成为有机的整体和一门严格的数学分支。

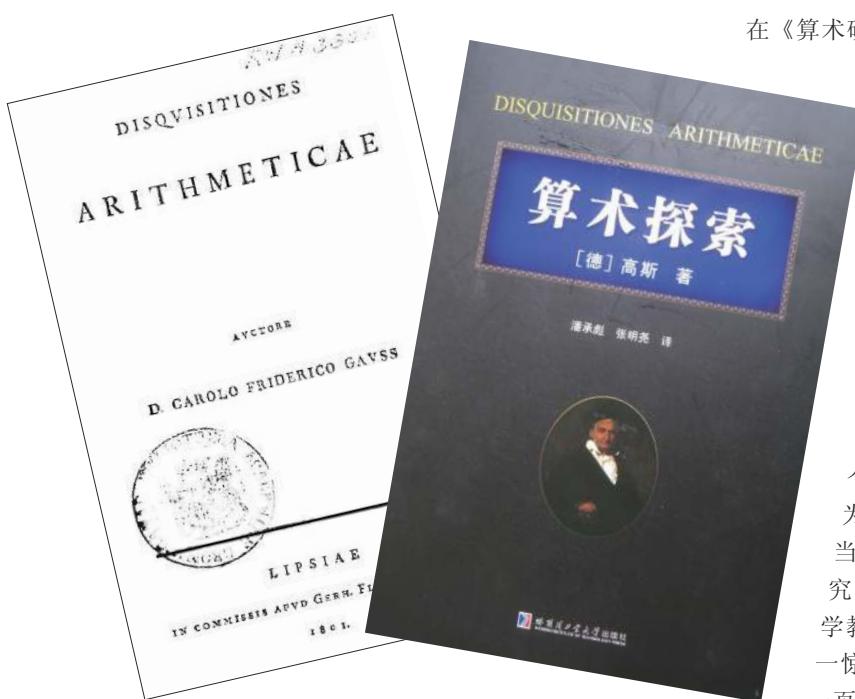
值得一提的是，这部伟大的著作在他 21 岁时即已完稿，高斯曾把他寄到法国科学院，却遭到拒绝，但他自己

将它出版了（费迪南公爵支付了印刷费）。与高斯的前期论文一样，它是用拉丁文写成的，这是当时科学界的界语，然而由于受 19 世纪初盛行的国家主义的影响，高斯后来改用德文写作。在那个世纪的末端，集合论的创始人康托尔这样评价：

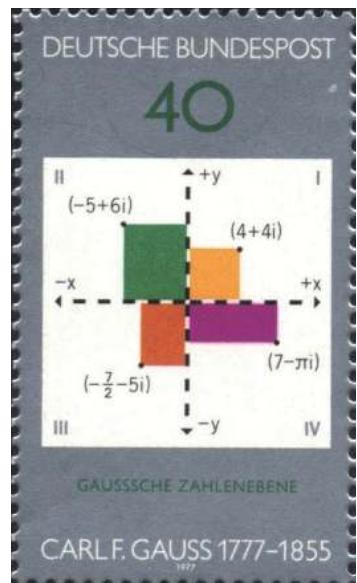
《算术研究》是数论的宪章。高斯总是迟迟不肯发表他的著作，这给科学带来的好处是，他付印的著作在今天仍然像第一次出版时一样正确和重要，他的出版物就是法典。比人类其它法典更高明，因为不论何时何地从未发觉出其中有任何一处毛病，这就可以理解高斯暮年谈到他青年时代第一部巨著时说的话：“《算术研究》是历史的财富。”他当时的得意心情是颇有道理的。

在《算术研究》出版的第二年，高斯就当选为圣彼得堡科学院外籍院士，同时俄罗斯方面也向他提供了教授职位，但被他婉言谢绝了，那座城市是 18 世纪大数学家欧拉钟爱的第二故乡。直到四年以后，为了不使德意志失去这位最伟大的天才，包括洪堡在内的多位学者和政要联名推荐，高斯被破格聘任为哥廷根大学数学教授兼天文台台长，全家一起搬入新落成的天文台，他担任这个职位直到去世。

关于《算术研究》，流传着这样一个故事。1849 年 7 月 16 日，哥廷根大学为高斯获得博士学位 50 周年举行庆祝会。当进行到某一程序，高斯准备用《算术研究》的一张原稿点烟，当时在场的柏林大学教授狄里克雷像见到犯了渎圣罪一样吃了一惊，他立刻冒失地上前从高斯手中抢下这一页纸，并一生珍藏它；他的遗著编辑者在他死后从其文稿中间找到了这张原稿。



左图：《算术研究》首版扉页；右图：中文版封面，潘承彪、张明尧译



邮票上的高斯整数



匈牙利邮票上的鲍耶 (János Bolyai, 1775-1856)

狄里克雷比高斯小 27 岁，他上大学那会儿，整个德意志民族只有高斯一个有名望的数学家，却不怎么喜欢教学。狄里克雷只好远赴巴黎留学，师从法国数学家傅里叶和泊松，但他始终携带着高斯的《算术研究》，可以说是第一个真正读懂这本书的人。留学巴黎期间，狄里克雷证明了费尔马大定理在指数为 5 和 14 时成立。这个结果当年曾轰动一时，因为 3 和 4 的情形分别是由欧拉和费尔马本人解决的。狄利克雷后来娶了同胞作曲家门德尔松的妹妹为妻，在高斯去世以后，他被哥廷根聘请继任了高斯的职位。

与艺术家一样，高斯希望他留下的都是十全十美的艺术珍品，任何丝毫的改变都将破坏其内部的均衡。他常说：“当一幢建筑物完成时，应该把脚手架拆除干净。”高斯对于严密性的要求也非常苛刻，使得一个定理从直觉的形式到完整的证明，中间有一段漫长的过程。此外，高斯十分讲究逻辑结构，他希望在每一个领域中，都能树立起一致而普遍的理论，从而将不同的定理联系起来。鉴于上述原因，高斯很不乐意公开发表他的东西。他的著名警句是：宁肯少些，但要成熟。为此，高斯付出了高昂的代价，包括把非欧几何学和最小二乘法的发明权与罗巴切夫斯基、鲍耶和勒让德共同分享，就如同费尔马把解析几何和微积分的发明权让给了笛卡尔和牛顿、莱布尼兹。

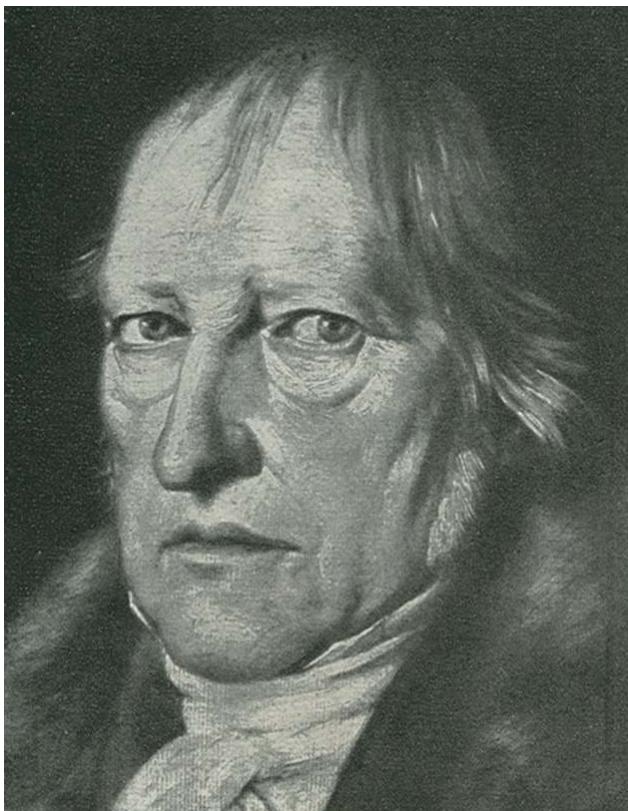
说到鲍耶，他是匈牙利历史上最伟大的数学家，其

父亲老鲍耶也攻数学，是高斯在哥廷根念书时最要好的朋友。1797 年，他曾陪同高斯徒步到不伦瑞克探望高斯双亲。等到高斯走出房间，他的母亲迫不及待地询问老鲍耶，自己儿子的前途如何。当听到回答“他是全欧洲最伟大的数学家时”，老人家已经老泪纵横，那年高斯才 20 岁。老鲍耶毕业后回到匈牙利娶妻生子，但在随后的半个世纪里仍与高斯保持书信往来。当他把儿子发明非欧几何学的消息和结果告诉老同学，并没有得到足够的鼓励和任何帮助。小鲍耶后来郁郁寡欢，默默无闻地度过一生，晚年专心于文学创作。

从做出有关正多边形发现的那天起，高斯便开始了著名的数学日记，他以密码式的文字记载下许多伟大的数学发现，共持续了 18 年。有意思的是，高斯的这本日记直到 1898 年才被找到，它包括 146 条很短的注记，其中有数值计算结果，也有简单的数学定理。例如，关于正多边形作图问题，高斯在日记中含蓄地写到：

圆的分割定律，如何以几何方法将圆十七等分。

值得一提的是，这项结果在两个月后出版的《新知文献》杂志上就发表出来了，而当时的汉诺威科学并不发达。



哲学家黑格尔 (George W. F. Hegel, 1770-1831)



哥廷根天文台（作者摄）

又如 1796 年 7 月 10 日的记载：

$$\text{num} = \triangle + \triangle + \triangle ,$$

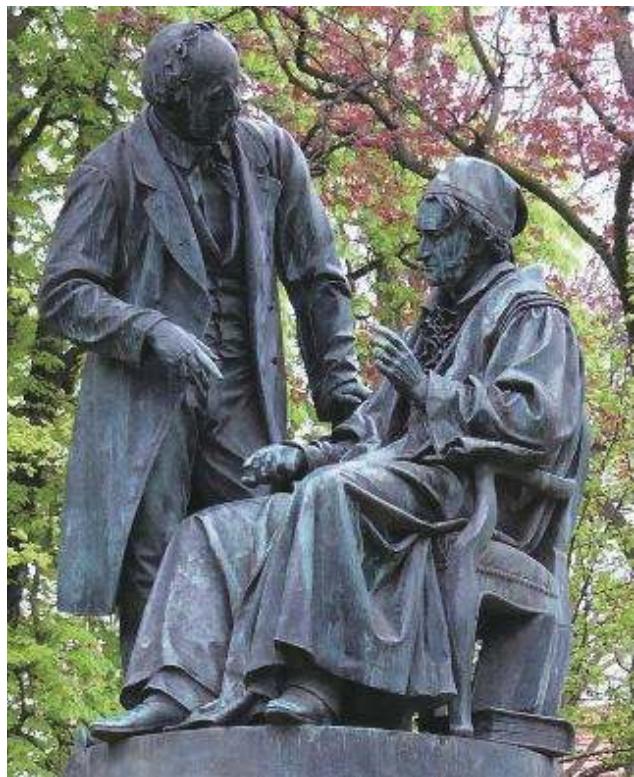
意指“每个自然数均可表为不超过三个三角形数之和”。此处三角形数是指按点排列可以构成正三角形状的数，例如 1、3、6、10、15……这是 17 世纪法国数学家费尔马猜想的一个特例，后者说的是，当  $n$  大于 2 时，每个自然数均可表成不超过  $n$  个  $n$  角形数之和。就像莫扎特一样，高斯年轻时候风起云涌的奇思妙想使他来不及做完一件事，另一件又出现了。

### 三、多才多艺的天才

高斯不仅是数学家，还是那个时代最伟大的物理学家和天文学家之一。在《算术研究》问世的同一年，即

1801 年的元旦，意大利天文学家皮亚齐在西西里岛观察到在白羊座（Aries）附近有光度八等的星移动，这颗现在被称作谷神星（Ceres）的小行星质量只有月球的 50 分之一。它在天空出现了 41 天，扫过八度角之后，就在太阳的光芒下没了踪影。当时天文学家无法确定这颗新星是彗星还是行星，这个问题很快成了学术界关注的焦点，甚至成了哲学问题。

比高斯年长 7 岁的哲学家黑格尔那时正任教于离哥廷根不远的耶拿大学，还只是个无薪讲师。他写文章嘲讽天文学家说，不必那么热衷去找寻第 8 颗行星，他认为用他的逻辑方法可以证明太阳系的行星，不多不少正好是 7 颗。几个月过去了，这场争论仍未见分晓。年轻的高斯也对此产生了兴趣，他想既然天文学家通过观察找不到谷神星，那么可否利用数学方法找到它呢？高斯相信，天文学是离不开数学的，开普勒正是凭借着自己的数学才能，发现了行星运动三大定律；



高斯与韦伯 (Wilhelm Eduard Weber, 1804-1891) 塑像

牛顿也是凭着渊博的数学知识，发现了万有引力定律。

果然，高斯在欧拉工作的基础上，找到一种简易的计算行星轨道的方法。他根据皮亚齐的观测资料，只用一个小时便算出了谷神星的轨道形状，并预测了它的下一次出现。不管黑格尔有多么不高兴，那年的最后一个夜晚和次年的第一个夜晚，两位天文爱好者在德国的两座城市把望远镜对准天空。果然，这颗最早被发现且迄今仍是最大的小行星准时出现在高斯指定的位置上，这应该是他后来得以出任哥廷根天文台台长的重要原因。自那以后，小行星、大行星（海王星和冥王星）接二连三地被人发现了。

在物理学方面高斯最引人注目的成就是在 1833 年和物理学家韦伯发明了有线电报。韦伯只比狄利克雷年长一岁，他在洪堡召开的一次会议上做了一个报告，台下的高斯听了十分欣赏，随后不久便将其引荐延聘到哥廷根。两人各自擅长理论和实践，加上韦伯性格温和谦让，可谓是一对黄金搭档，开始了愉快而卓有成效的合作。次年高斯曾在给鲍耶的信中情意绵绵地提到，“我的生活因为他的出现而变得更加精彩，他的性格非常亲切而又富有天赋”。

可是，四年以后，哥廷根发生了反对废除自由宪法

的“七君子事件”，韦伯与 6 位文科教授（包括高斯的女婿和童话作家格林兄弟）失去了教职。在这场政治较量中，高斯作为哥廷根最有威望的教授并没有挺身而出，而是选择了明哲保身。韦伯被迫去了莱比锡任教（格林兄弟到了卡塞尔），直到 12 年后才重返哥廷根，接替高斯担任天文台台长，但没有再担任教职。

高斯和韦伯的电报术利用了丹麦人奥斯特的电磁转向与电流方向垂直原理（1820）和苏格兰人法拉利的电磁感应原理（1831）。这项发明使得高斯的声望首次超出学术圈进入公众，但他们的商业意识不太强，一直使用那台电报机，直到 1845 年被一次闪电打坏为止。其时，在英国和美国，电报产业早已如火如荼地开展起来了。有趣的是，作为一名科学家，高斯是韦伯的恩师；而作为磁场感应的单位，一高斯只有一万分之一韦伯。

作为天文台台长，望远镜是高斯不可或缺的工具，除了用来观察天空以外，他还用自制的望远镜推动了光学研究。1843 年，高斯的光学巨著《光折射研究》出版，书中首次提出了光的焦距、焦面和焦点等概念。他利用几何学的方法，证明了不论透镜有多厚，光的折射均可以用薄透镜或单折射面的简单公式来研究推导。在此以前，欧拉、拉格朗日和莫比乌斯都只考虑薄透镜的折射，而实际面临的应用问题并非如此。

在流体静力学方面，高斯写过一篇重要论文《关于力学的一个新的普遍原理》（1829），提出了后人所称的高斯最少约束原理，即任何一组相互影响并受外界影响的质点，在任何时刻其运动的方式必尽可能地接近自由运动，也就是最少约束运动。此处的约束是以每个质点离开自由运动轨迹的距离的平方乘上质量后，对所有质点求和来决定的。高斯曾感叹说：“自然对于一个物理运动方式的修正，与数学家对他的观察数据修正一样，都是采用最小二乘法进行的。”

除此以外，高斯在测地学、水工学、电动学等方面也有杰出的贡献。即使是数学领域，我们谈到的也只是他年轻时在数论领域里所做的部分工作，在其漫长的一生中，他几乎在数学的每个领域都有开创性的工作。例如，前文提及的最小二乘法便是一种数学优化技巧，用以通过一组平面上的坐标值来确定一条直线的方程。这是高斯当年用以找寻谷神星的数学工具，后来他把它写进著作《天体运动论》（1809）。最小二乘法如今在测绘学中有着广泛的应用，可是因为法国数学家勒让德独立发现并发表在先（1806），曾有过不太愉快的优先权之争。1829 年，高斯还给出了最小二乘法的优化效果强于其他方法的证明。

又如，在高斯发表了《曲面论上的一般研究》之后

大约一个世纪，爱因斯坦评论说：“高斯对于近代物理学的发展，尤其是对于相对论的数学基础所做的贡献（指曲面论），其重要性是超越一切，无与伦比的。”而他对椭圆函数的先驱性发现和非欧几何学方面的划时代工作，都没有在生前发表。说到椭圆函数，它是一种双周期的亚纯函数，最初是从求椭圆弧长时导出来的，直到今天仍是数学的研究热点。正是由于高斯在《算术研究》里暗示了这片未开采的处女地，引导后来阿贝尔和雅可比开展了一场著名的数学竞赛。

至于非欧几何学，堪称现代数学史上最伟大的发现。高斯是最早怀疑欧氏几何是自然界和人类思想所固有的人之一（拥护的人中有牛顿和康德）。欧几里得是建立系统性几何学的第一人，他的著作中的部分思想被称为公理，它们是通过逻辑构建整个系统的出发点。在这些公理中，平行公理显得尤为突出。依照这条公理，通过给定直线外的任意一个点只能作一条直线与该直线平行。许多人试图从其他公理推出这一公理，但没有一个证明都是正确的，高斯是最早意识到可能存在平行公理不适用的几何学的人之一，后来他自己证实了这一点，且新的几何学内部是相容的。

1830年前后，当俄国的罗巴切夫斯基和鲍耶先后发表他们的非欧几何学时，高斯才宣称早在30年前他就得出了同样的结果。事实上，在1799年9月的一则日记里，高斯这样记载：“在几何基础的问题上，我们得到了很好的结果。”同年底他在给老鲍耶的信中写道，面积任意大三角形的存在性与欧式平行公理是等价的。而在非欧几何学里，所有三角形的面积都不能超过一个界限。1824年，高斯在给一位业余数学家的信中写道：“由三角形内角和小于180度的假设中可以导出一种奇异的几何，这种几何与欧氏几何大不相同，但其本质却是相合的。”

#### 四、离群索居的王子

在高斯的时代，几乎没有什么人能够分享他的想法或向他提供新的观念。每当他发现新的理论时，找不到人可以讨论。这种孤独的感觉，经年累月积存下来，就造成他高高在上、冷若冰霜的心境了。这种智慧上的孤独，在历史上只有很少几个伟人感受过。高斯从不参加公开争论，他对辩论一向深恶痛绝，认为那很容易演变成愚蠢的喊叫，这或许是他从小对粗暴专制的父亲一种心理上的反抗。高斯成名后很少离开过哥廷根，可能只在1828年去过柏林（普鲁士王国首都）参加过一次学术会议。

高斯甚至厌恶教学，也不热衷于培养和发现年轻人，



高斯最赏识的弟子黎曼 (Bernhard Riemann, 1826-1866)

自然就谈不上创立什么学派，这主要是由于高斯天赋之优异，因而心灵上离群索居。可这不等于说高斯没有出类拔萃的学生，黎曼堪称史上最伟大的数学家之一（在读哥廷根期间有两年到柏林师从雅可比和狄里克雷），戴特金和艾森斯坦也对数学做出了杰出贡献。但是由于高斯的登峰造极，在这三个人中，也只有黎曼（在狄里克雷死后继承了高斯的数学教授职位）被认为和高斯比较亲近。虽说黎曼生前只发表10篇论文，却是复变函数论、解析数论、几何学、常微分方程、实分析、数学物理和物理学等领域的开拓者。他奉行老师高斯的座右铭，宁肯少些，但要成熟。黎曼猜想已成为数学史上的不朽谜语，被公认为是最伟大的数学猜想。韦伯记得晚年的高斯谈起黎曼的工作时十分激动，给予了罕见的高度赞扬。对年长黎曼三岁的艾森斯坦，高斯也曾寄予厚望，如果不是他29岁英年早逝，很可能成为黎曼强有力的竞争者。

比高斯晚一辈的大数学家雅可比和阿贝尔都抱怨高斯漠视了他们的成就。雅可比是个很有思想的人，他有一句流传至今的名言：“科学的惟一目的是为人类的精神



被高斯忽视的挪威数学家阿贝尔 (N. H. Abel, 1802-1829)

增光。”同时雅可比也是位了不起的教育家，为了鼓励学生早些独立做研究工作，他作了一个著名的比喻：“如果你主张，在与一个女子结婚之前先要认识世界上所有未婚女子的话，你父亲就一辈子不会结婚，那样的话也不会有你了。”

雅可比比狄里克雷大一个多月，两人都是柏林最顶尖的数学家，也都在数论领域做出过重要贡献。雅可比给出了费尔马四角形数（平方数）猜想的一个漂亮证明，用的是自守形式的方法；而狄里克雷任职柏林期间证明了算术级数上存在无穷多个素数，把两千多年前欧几里德的结果做了推广。但雅可比一直没能和高斯攀上亲密的友情，在1849年哥廷根那次庆祝会上，远道而来的雅可比坐在高斯身旁的荣誉席上。当他想找话题谈数学时，高斯不予理睬，这可能是时机不对，当时高斯几杯甜酒下肚，有点不能自制；但即使换个场合，结果恐怕也是一样。

在他兄弟论及那场宴会的一封信中，雅可比写到，“你要知道，在这20年里，他（高斯）从未提及我和狄里克雷……”一年以后，雅可比因患天花去世，年仅47岁。不过，狄里克雷做上布雷斯劳大学教授（隶属普鲁士，



费迪南公爵纪念碑（作者摄于不伦瑞克）

今波兰弗罗茨瓦夫大学）可是高斯（还有洪堡）写的推荐信。需要提及的是，狄里克雷虽然数学天赋优异，但因为拉丁文不及格，未能获得巴黎大学的博士学位。回国以后，他向波恩大学申请，同样没有成功，倒是给了他荣誉博士学位。

阿贝尔的命运很惨，他与后来的同胞易卜生、格里格、蒙克和阿蒙森一样，是在自己领域里惟一取得世界性成就的挪威人。他是一个伟大的天才，却过着贫穷的生活，毫无同时代人的了解。阿贝尔20岁时，解决了数学史上的一个大问题，即证明了用根式解一般五次方程的不可能性，他将短短六页“不可解”的证明寄给欧洲一些著名的数学家，高斯自然也收到了一份。阿贝尔在引言中满怀信心，以为数学家们会亲切地接受这篇论文。

不久，乡村牧师的儿子阿贝尔开始了他一生惟一的一次远足，当时他想以这篇文章作敲门砖。阿贝尔此行最大的愿望就是拜访高斯，但高斯高不可攀，只是将论文瞄了几行，便把它丢在一旁，仍然专心于自己的研究工作。阿贝尔只得在从巴黎去往柏林的旅途中，以渐增的痛苦绕过哥廷根。26岁那年，阿贝尔死于肺病和营养不良，他去世后的第三天，一封迟来的信件才送到，在这



左：高斯之墓（作者摄于哥廷根）；右：高斯纪念塔基座上的正十七角星（作者摄于不伦瑞克）

封信里，柏林大学向他提供了一个教职。

高斯虽然孤傲，但令人惊奇的是，他春风得意地度过了中产阶级的一生，而没有遭受到冷酷现实的打击；这种打击常无情地加诸于每个脱离现实环境生活的人。或许高斯讲求实效和追求完美的性格，有助于让他抓住生活中的简单现实。高斯 22 岁获博士学位，25 岁当选圣彼得堡科学院外籍院士，30 岁任哥廷根大学数学教授兼天文台台长。虽说高斯不喜欢浮华荣耀，但在他成名后的 50 年间，这些东西就像雨点似的落在他身上，几乎整个欧洲都卷入了这场授奖的风潮，他一生共获得 75 种形形色色的荣誉，包括 1818 年英王乔治三世<sup>[2]</sup>赐封的“参议员”，1845 年又被赐封为“首席参议员”。

高斯的两次婚姻也都非常幸福，第一个妻子死于难产后，不到 10 个月，高斯又娶了第二个妻子。心理学和生理学上有一个常见的现象，婚姻生活过得幸福的人，常在丧偶之后很快再婚，一生赤贫的音乐家约翰·塞巴斯蒂安·巴赫也是这样。高斯始终没有忘记费迪南公爵

的恩情，他一直对他的赞助人在 1806 年惨死在拿破仑手下这件事耿耿于怀，因而拒不接受法国大革命的信条和由此引发的民主思潮的影响，他的学生都称他为保守派。从这点来看，高斯可以说是贵族专制社会体系中最后的也是最伟大的文化结晶。

高斯很喜欢文学，他把歌德的作品遍览无遗，却不太推崇。由于与生俱来的语言特长，使高斯阅读外文得心应手。他精通英语、法语、俄语、丹麦语，对意大利语、西班牙语和瑞典语也略知一二，他的私人日记是用拉丁文写的。高斯 50 岁时，又开始学习俄语，部分原因是为

了阅读年轻的诗人普希金的原作。不过，高斯的语言天赋在数学家中并不算最突出的，使爱尔兰人在数学领域享有盛誉的神童哈密尔顿，他在 13 岁的时候就能够流利地讲 13 种外语。高斯爱看蒙田、卢梭等人的作品，却不喜欢莎士比亚的悲剧，但他选择了《李尔王》中的两行诗作为自己的座右铭，

大自然啊，我的女神，  
我愿为你献身，终身不渝。

高斯最钦佩的英语作家是苏格兰人司各特，几乎阅读了他所有的作品。有一次，高斯在司各特爵士有关自然景观的描述中找到了一个错误（满月是从西北方向升起来的），因而狂喜不已。他不仅在自己那本书上把它纠正过来，还跑到哥廷根书店把其它未售出的书都改了。

和所有伟大的数学家一样，抽象符号对高斯来说并非虚幻而不真实的。有一次他谈到：“灵魂的满足是一种更高的境界，物质的满足是多余的。至于我把数学应用到几块泥巴组成的星球，或应用到纯粹数学的问题上，这一点并不重要。但后者常常带给我更大的满足。”高斯的身体一直不错，而他的第二任妻子早他 24 年便已离世，在他晚年受到病魔袭击之前，他一直没有在宗教或精神上花时间。心脏病不断摧毁他的意志，1848 年，高斯写信给他最亲密的朋友说：

我经历的生活，虽然像一条彩带飞舞过整个世界，但也有其痛苦的一面。这种感受到了年迈的时候更是不能自持，我乐于承认，如果换一个人来过我的生活的话，也许会快乐得多。另一方面，这更使我体会到生命的空虚，每一个接近生命尽头的人，都一定会有这种感觉……

高斯还说过：“有些问题，如果能解答的话，我认为比解答数学问题更有超然的价值，比如有关人类和神的关系，我们的归宿，我们的将来等等。这些问题的解答，远超出我们能力之所及，也非科学的范围内能够做到。”1855 年 2 月 23 日清晨，高斯在睡梦中平静地与世长辞，享年 77 岁。他曾经要求在他的墓碑上刻一个正十七边形，但事与愿违，因为雕刻工坚持认为正十七边形刻出来后几乎与圆一模一样。作为一种弥补，在其故乡不伦瑞克的高斯纪念碑的基座上刻下了一颗有十七个尖角的星。

高斯曾被形容为：“能从九霄云外的高度按照某种观点掌握星空和深奥数学的天才。”他将自己的数种天赋——有创造力的直觉、卓越的计算能力、严密的逻辑推理、十全十美的实验——和谐地组合在一起，这种能力的组合使得高斯出类拔萃，在人类历史上找不到几个

对手。习惯上只有阿基米德和牛顿与他相提并论（最多加上欧拉），他们都非常多才多艺。当然，爱因斯坦也属于同一水准，但他有所限制，因为他所依赖的数学工具不是自己创造的；另外，爱因斯坦也不是实验家，他的理论需要别的科学家检验。

2012 年 5 月  
完稿于杭州

[1] 原德国马克纸币共 8 种，从 5 马克到 1000 马克。10 马克纸币的反面是统计学里的正态（高斯）分布曲线。除了他和一位诺贝尔生理学医学奖得主以外，另外 6 位分别是诗人、作家（2 人）、音乐家、画家和建筑师，包括童话作家格林兄弟和钢琴家克拉克·舒曼。

[2] 乔治三世，1760-1820 年间在位。那时哥廷根隶属三个国家：大英帝国、爱尔兰和汉诺威公国，哥廷根大学便是由英王乔治二世（1727-1760 在位）于 1737 年所建。



作者简介：蔡天新，山东大学博士，浙江大学数学系教授。也是位诗人、随笔和游记作家，作品被译成 20 多种语言，有 10 种外版书籍问世。2012 年秋天，商务印书馆和高等教育出版社新出他的《数学与人类文明》、《数字与玫瑰》修订版和《数论，从同余的观点出发》。