

# 微博上的数学漫游

(连载二)

歌之忆 <http://weibo.com/wildmath>

我们继续从笛卡尔出发的微博上的数学漫游。这些文字的中心话题是人、是与数学相关的那些有故事的人。由短短的微博连缀起来的漫游，大多是连贯的，间或有些跳跃。它近乎于随机走动，间或又有点勒维飞行的味道，但故事的焦点始终是数学家的逸事。正如建筑并不是砖头的堆砌，数学也并非只是一堆逻辑上正确的定理的堆积。想想那些创造了数学的人们，纵然不乏稀世之才，却又都是血肉之躯。在历史洪流的宏大叙事之外，品味精彩各异的数学家群体或个体，欣赏那些坎坷曲折的人生阅历与极富理趣的数学成就如影随形的景观，或许也是数学文化的独特魅力？

## 哈代 Hardy



哈代 (G. H. Hardy, 1877-1947)

维纳在《我是一个数学家》中曾写到，佩利 (Paley) 对其导师里特尔伍德 (Littlewood) 佩服得五体投地。而里特尔伍德的许多论文是与哈代联合发表的。大学者中的“瑜亮之争”屡见不鲜，但这两位大师率先确立了论文按照姓氏字母顺序署名的游戏规则，为数学家的合作确立了良好的职业形象。省去无尽烦恼，免掉凡俗龌龊。

哈代与里特尔伍德的合作，足以令世人艳羡。丹麦数学家哈拉德·玻尔公开了这两人之间的四条“合作公理”：1、一人给另一人写信，内容正确与否无所谓。2、一人收到对方来信，读不读无所谓；3、两人是否同时想到同样深入的细节，无所谓。4、共同署名的论文中，哪怕有一人无丝毫贡献，也无所谓。

数学家玻尔曾不无妒意地说：亘古未有的这么四条烂公理，居然成就了世界上最重要、最和谐的合作！两位旗

鼓相当的高手，经年累月如切、如磋、如琢、如磨地研究学问，任何“公理”对这两位钻石王老五的合作，都十分多余。若是两个水平不济的家伙，用再完善的公理，也合作不出成果。

里特尔伍德爱好攀岩和滑雪，练就了极好的体格，再加天性幽默，一直活到92岁。他70多岁还写出了100页的硬分析巨作，其人生的最后一篇论文发表在87岁之高龄。货真价实的英国皇家学院院士，羞煞多少自命不凡之士！《数学札记》充斥了他的幽默，比如：一个精彩的数学笑话，胜过一堆烂文章。

幽默是人类智慧的化身——不分专业领域。热爱舞蹈的法国音乐家圣·桑，在写《动物狂欢节》时，故意把奥芬巴赫歌剧中的康康舞曲变慢来描述貌似庄重的乌龟。他还曾拉着柴可夫斯基，分别扮演伽拉特亚与皮格马利翁，让鲁宾斯坦伴奏，在莫斯科音乐学院共舞起一曲《皮格马利翁和伽拉特亚》。



高斯 (C. F. Gauss, 1777-1855)

端，往往就是对自己或他人的苛责。从这个意义讲，数学家尤其需要皮格马利翁效应的激励。当阿贝尔把手稿寄给高斯的时候，当拉玛努金把手稿寄给剑桥的贝克和霍布森的时候，期待的是一份肯定，等来的却是漠视。

高高在上的高斯把天才阿贝尔冷落在一旁。但与贝克和霍布森同在剑桥大学的哈代，在收到拉玛努金的手稿之后，毫不掩饰地高度赞扬——“一个具有最高品质的数学家、一位具有举世无双的富有独创性的智者”。任何一个默默无闻的稀世天才，一旦得到这样的赞誉，其积蓄的能量一定会彻底爆发。

希腊神话中的塞浦路斯国王皮格马利翁，倾注全部热情和心血，将一副象牙雕刻成美伦美焕的少女伽拉特亚。他对伽拉特亚如痴如醉，令爱神阿芙洛狄特感动不已，随即赋雕像以生命，成就俩人的佳缘。其实，每一个倾注心血、专注于事业的实干家，都是痴情的皮格马利翁，都应该得到美好的人生。

虽说皮格马利翁最终还是将那位背叛爱情的伽拉特亚还原为雕像，不过心理学家罗森塔尔却看到了积极的内涵。他在一所小学随机抽出一批学生，对校长坚称这些人才华出众。而这些孩子受到激励后，果然突飞猛进。赞美带来强大的心理暗示，驱动人们去奋斗。成功的学术团队，需要“皮格马利翁效应”的驱动。

或许数学最有意味之处，是追逐数学的人习惯于对完美有极致的追求。当完美走向极

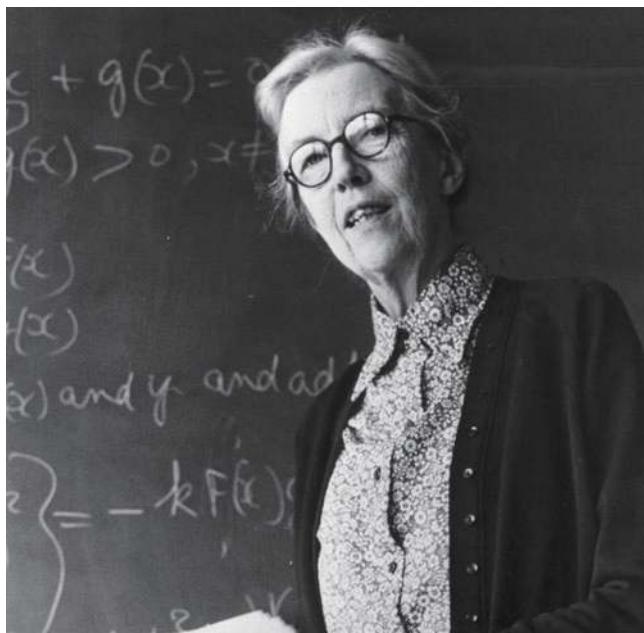


阿贝尔 (N. H. Abel, 1802-1827)

哈代宽厚的待人之道、尤其是对待小人物的爱和同情心，令无数人为之动容。曾经在牛津念数学的灰姑娘卡特莱特（Cartwright），数学课程难以继，甚至想转行改读历史，却在一次聚会上邂逅时在牛津教书的哈代，聆听指教后数学水平大为改观。毕业后事业一帆风顺，若干年后，回来继续追随哈代攻读博士学位。

当哈代看到卡特莱特在数学推导中显而易见的错误时，不是斥责，而是不紧不慢地说：“我们再来想想看。其实，只要遇到难关，总会有解决之道”。这位当初在数学上并不算出类拔萃的灰姑娘，最终被哈代培养成皇家学院第一位女数学院士、伦敦数学会会长，赢得包括 Sylvester 奖等众多荣誉。

## 卡特莱特 Cartwright



卡特莱特（Mary Cartwright, 1900-1998）

如简·爱：“她不久就要超脱于尘世风雨之外了，精神已挣扎着要脱离它物质的居所，而当它终于解脱出来之后，将会飞到哪里去呢？”

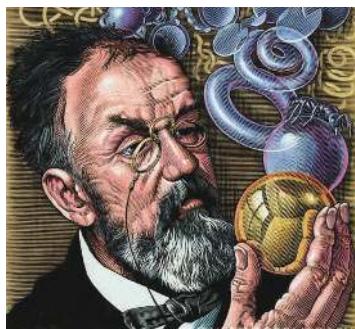
卡特莱特这只蝴蝶没有掀起混沌的热潮，就像朱利亚没有掀起分形的狂热。计算机时代改变了数学的形象：洛伦兹秀出了他的奇怪吸引子，孟德尔布罗特也潇洒地画出了分形。如今，用不了几十行程序，我们就可重复洛伦兹或孟德尔布罗特的漂亮图形，但有多少人在思考卡特莱特与朱利亚那深邃的智慧？

图灵破译密码可谓二战的数学奇葩，但卡特莱特立下的汗马功劳却鲜为人知。当时英军的雷达放大器在推到高功率时总是发生故障。卡特莱特分析出，罪魁祸首是放大器的微分方程的解在高功率时出现的混沌。战后，她与里特尔伍德就此发表了先驱性论文。20 年之后，才出现了洛伦兹混沌。

卡特莱特与里特尔伍德合作对雷达故障进行的研究——受迫 van der Pol 方程的解，成功地应用了庞加莱的动力系统拓扑学。从战争结束的 1945 年开始，她和里特尔伍德发表了若干篇论文，如今已成混沌学的经典文献之一。

飞临亚马逊河的一只蝴蝶，可能会引起一场沙漠风暴。在混沌大热之时，大物理学家 Dyson 呼吁关注卡特莱特的贡献，但她却申明不需要那份荣耀。她的自尊

## 英国分析学派



法国数学家庞加莱 (Henri Poincaré, 1854-1912)

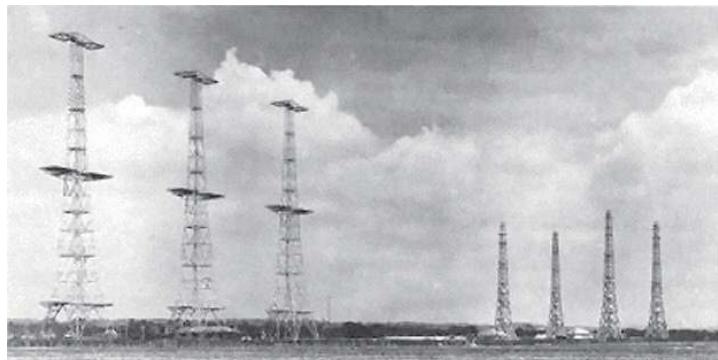
如果说第一次世界大战对数学的发展是一场浩劫，那么第二次世界大战，却史无前例地开启了人类数学化战争之先河。柯尔莫哥洛夫、图灵、维纳，伟大的数学天才们为终结法西斯的罪恶，奉献出令世人无限敬仰的智慧和才华。这场战争中涌现出卡特莱特那样的巾帼数学英雄，同样令人钦佩。

太阳、地球、月亮，构筑起大自然最富诗情画意的景观，不仅孕育了牛顿力学，也把庞加莱带到解决三体问题的极度抽象的拓扑世界。庞加莱在第一次世界大战前去世，而他那些高深的数学，却在第二次世界大战中，由于英国的雷达而被卡特莱特和里特尔伍德应用。世界上还有什么比数学更有生命力？



哈代和里特尔伍德在剑桥大学三一学院

回想我们说过的数学家朱利亚、Helly 和拉都，都是第一次世界大战的下级军官。对那段历史，历史学家斯特隆伯格哀叹：伤亡最惨重的是受过良好教育的下级军官。他们当中，有的人才智可能超过了乔伊斯、爱因斯坦或爱略特，只是因为战场捐躯，而没有写出《尤利西斯》和《荒原》，也没有提出相对论！

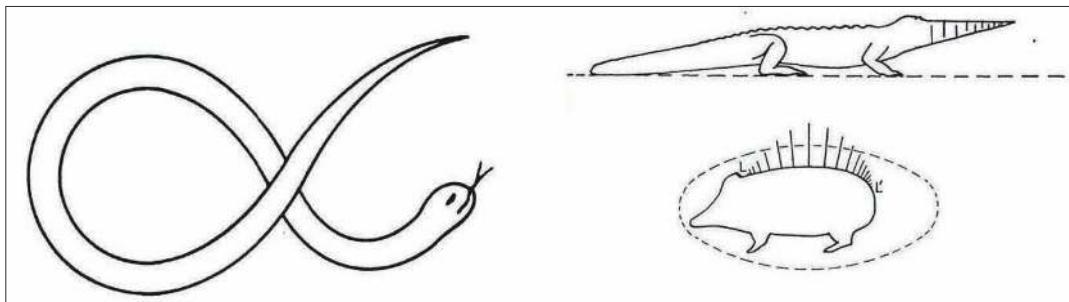


二战期间英国的雷达

从二体问题的简洁生动，到三体问题的困难重重、以至孕育出庞加莱的动力系统拓扑学，大自然最浪漫的诗意，却要通过最深刻的数学来领悟。面对这样心驰神往的美，哈代说：丑陋的数学没有存在的地盘。但世界上真正能鉴赏数学美的人却不多，或许这才是哈代与里特尔伍德惺惺相惜的原因？

里特尔伍德与哈代的成功合作，建立在四个“无所谓”公理之上。可他与卡特莱特，却互相从不到对方的办公室去谈事，也从没在黑板上做过计算。更有甚者，他还把一些双方的合作论文交由卡特莱特独立署名发表。某次他收到卡特莱特的一个错误证明，竟然意味深长地画了一条蛇作为回复。

里特尔伍德是个天性不羁的高手，颇有金庸笔下的老顽童周伯通的风范。老顽童与蛇有仇，但里特尔伍德对卡特莱特手稿中的论证心生不满，却别出心裁地画了条蛇来讲数学上的道理。若你读他的《数学札记》，专门有一章就叫“动物园”，蛇、鳄鱼和猪，全部被他当作数学论证的直观材料。



里特尔伍德《数学札记》插图

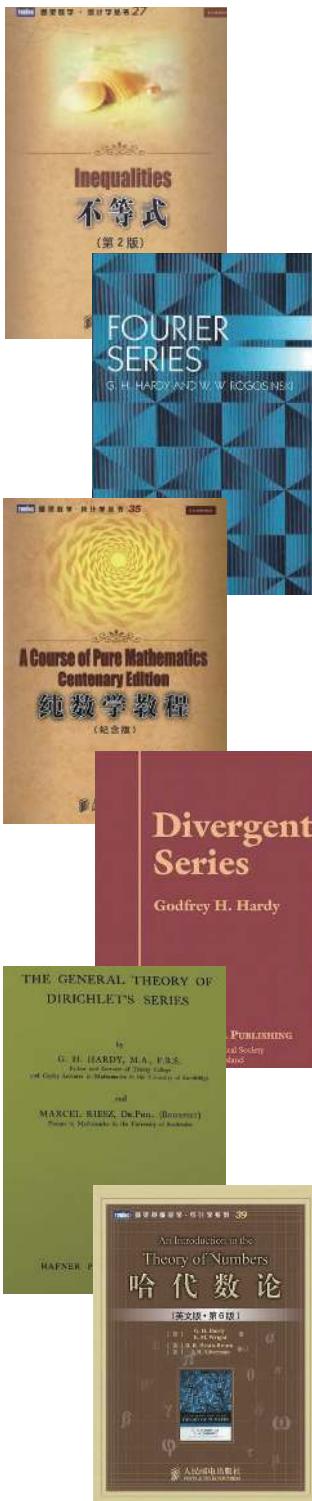
老顽童周伯通一生纠结那位暗度陈仓还结出果实的瑛姑。而里特尔伍德也曾命犯桃花、闹出绯闻。不过这丝毫没有损伤他对自身学术生命的极度珍惜，他牢牢守住了学者的 reputation（名声）。他曾把自己的手稿交给合作者卡特莱特拿去独自发表，不许署他的大名，最终这两人只有区区数篇合作论文。

若将里特尔伍德比作老顽童，那么开创了剑桥分析学派的哈代便算是开创全真教的“天下五绝”之首王重阳。剑桥具有悠久的数学物理传统，但身在微积分和力学的发祥地，哈代却敏锐地看出了英国在分析数学的严密性上与欧洲大陆的巨大差距。1908年，他以一部《纯数学教程》开启了打造人才之路。

哈代与里特尔伍德没有白费心血。小将佩利在24岁时，与里特尔伍德合作发表了4页纸的短文，开创了现代分析数学中的重量级武器：Littlewood-Paley 分解。内的奥妙是在分析函数时，将其分解到一串类似于音乐里的八度音程上来研判。这种数学思想暗合了音律，是现代分析的关键技巧之一。

69年前，26岁的佩利滑雪遇难，可他已是数学上的成名英雄了。而拉玛努金，26岁才迈进剑桥，当时他连柯西积分都不懂。哈代曾这样说：如果拉玛努金是在16岁而不是26岁就能见到现代的理论和方法，他的一生会是什么样？他由衷地佩服这位与西方世代积累的智慧孤独地抗争的印度人。

● 哈代如此爱才，却无法想象这位印度人与剑桥三一学院有如此不解



哈代的部分著作

之缘：他感叹拉玛努金为何直到 26 岁才能来剑桥重启人生。他从未想到已踏入一流数学家行列的佩利，竟会年仅 26 岁就被死神夺去生命。26 岁是最灿烂的年华，26 岁时的农家子弟牛顿已是三一学院的卢卡斯数学教授了。

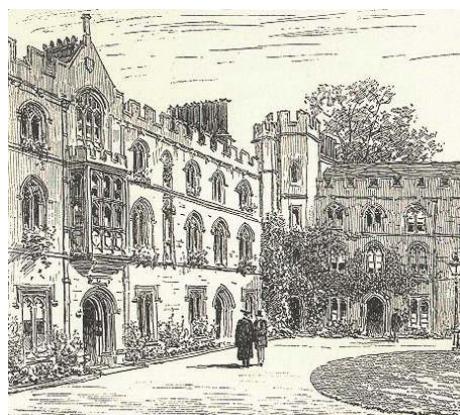
一个牛顿足以让三一学院独步天下，但也正是因为牛顿开创的物理充斥了实验精神，反而使英国的数学发展迅疾走向应用化的轨道。而自法国的柯西以来，欧洲大陆的分析数学走向严密化，复分析等领域成果不断，却都被英国一概漠视。19 世纪末，巴黎高工约当（Jourdan）的分析教程深深触动了哈代。

哈代以极其雅正的文笔，为英国写出第一本严格的数学分析教程，彻底改变了英国分析的面貌，影响了几代分析数学家。二十世纪电子信息最伟大的理论开创者之一的维纳，曾经跟随哈代完善了分析数学的训练。将处于落后地位的英国带上分析数学的巅峰，成就一代人的伟业，哈代功莫大焉。

哈代生活在每个人的日常生活中。当你使用手机或 GPS 的时候，接收机会按照 I- 路和 Q- 路来接收射频信号，正是由上半平面解析函数构成的哈代空间，以及对应的解析函数边值理论，为这些技术提供了极为漂亮的数学框架。这与 Paley-Wiener 理论一样，把电子信息技术与优美而深刻的分析数学联系在了一起。

令人神往的英国分析学派，为后世留下巨大的精神遗产。而哈代和里特尔伍德亲密无间的合作，则是这个学派伟大的精神象征。哈代 - 里特尔伍德讨论班，曾经培育出无数杰出的人才——卡特莱特、佩利是我们数度提起的杰出干将，拉玛努金是人世间的一个传奇。回望历史，令人无限感慨。

迄今已经诞生了三十多位诺贝尔奖得主的剑桥大学三一学院，无疑是思想者的天堂——它不仅出产了牛顿、迪拉克和霍金，还出产了诗人拜伦和哲学家罗素、维特根斯坦。而哈代和里特尔伍德联手打造出的学术丰碑，会使人们永远铭记、感恩，更会阐发无穷的思索：究竟依靠什么才能打造出一个学派？



剑桥大学三一学院

里特尔伍德说过一个故事：曾有一位数学名家访问剑桥却刻意回避见他，令他大为困惑。事后才闻此君解释：里特尔伍德的时间都花在学生身上了，我不去打扰他的工作！此君乃芝加哥分析学派的开山大师 Zygmund。把心事花在学生身上，这才是成就伟大学派的真正原因吧？

比起 Helly 把学土木工程的拉都（Radó）调教成数学家的传奇，更精彩的是目睹过剑桥大师风采的 Zygmund。1948 年他在阿根廷讲学，把一位才华横溢的青年带回芝加哥大学攻读博士学位。那又是一位学土木工程的年轻人，他仅仅用了一年时间就拿到博士学位。之后师徒携手，打造出威名远扬的芝加哥分析学派。

## 肖德尔 Schauder



肖德尔 (Juliusz Schauder, 1899-1943)

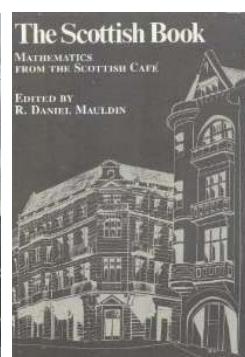
■ Zygmund 受教于波兰。那是一个小国、却又是一个科学与文化的大国。那里有开启了现代科学之门的哥白尼、有两获诺贝尔奖的居里夫人，肖邦是那个民族走遍天下的文化护照。奥斯威辛集中营和卡廷大屠杀记录了这个民族的苦难与不屈。在残酷的第二次世界大战期间，波兰没有出现过靖绥政府。

提起波兰的数学，无数人津津乐道于利沃夫大学旁著名的苏格兰咖啡馆。那是数学家的大本营，巴拿赫（Banach）带着一群数学天才在此通宵达旦地神聊数学。这里讨论的问题，最终被整理成了《来自苏格兰咖啡馆的数学问题集》。咖啡馆的常客、后来参与原子弹研制的乌拉姆（Ulam），深情地回忆了那激动人心的岁月。

经常光顾苏格兰咖啡馆的，有位犹太数学家肖德尔 (Juliusz Schauder, 1899-1943)。比如你坐在热气球上游览南京，把手中的南京地图揉成一团、扔出热气球，地图上必有一点和它的垂直下方地理位置正好对应——这是荷兰数学家布劳威 (Brouwer) 的不动点原理。肖德尔把它发展到无穷维空间成为研究偏微分方程的利器：肖德尔不动点原理。



波兰的苏格兰咖啡馆



苏格兰咖啡馆数学问题集



美国数学家、诺贝尔经济学奖得主纳什 (John Nash, 1928-)

肖德尔的方法，随后被《美丽心灵》的原型纳什 (John Nash, 1928-) 发展去解决更复杂的偏微分方程。不料纳什写完论文后，发现意大利的 de Giorgi 刚刚发表了类似结果。多年后获得了诺贝尔经济学奖的纳什，依旧郁闷地感慨：如果当年他或 de Giorgi 有一方失败，那剩下的人或可得到菲尔兹奖。看得出他对此十分在意。

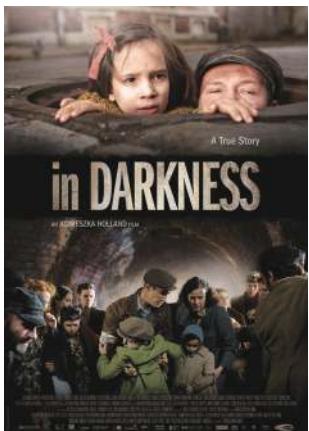
围绕在巴拿赫周围的青年才俊马祖尔 (Mazur)、乌拉姆和卡茨 (Kac) 们，成就了波兰利沃夫数学的黄金时光。他们之中已经作出杰出成绩的肖德尔，仅仅是个中学教师，后来才进入利沃夫大学做助教。堂堂一个数学系到 1937 年，却总共只有 Zylinski、史坦因豪斯 (Steinhaus) 与巴拿赫三个教授，外加包括 Schauder 在内的 5 个助手。

1899 年生于利沃夫的肖德尔，二战前夕就已经在拓扑学、泛函分析、偏微分方程与数学物理四大领域作出了出色的成绩。二战中的利沃夫先是被苏联占领，后又被纳粹德国侵占。此时的犹太数学家肖德尔，没有离开故乡，他躲在暗室继续研究数学。而且每周都秘密地去找马祖尔教授等人谈数学。

1943 年，在纳粹占领下的利沃夫街头，肖德尔遇到曾经教过的一位学生，央求学生帮他弄个假身份证件，好混到华沙去见妻子。学生苦苦相劝——你这一幅犹太人的长相，到哪都会被纳粹认出！但肖德尔极度思念藏在华沙的妻子。此景此情让学生感动不已，学生通过地下组织为他办了一套假身份证件。



意大利数学家 (Ennio de Giorgi, 1928-1996)



以利沃夫大屠杀为背景的波兰电影《黑暗弥漫》

拿到了假身份证件的数学家肖德尔，本该直接动身去华沙，却在临行前对营救者说：我最后还有一个要求——找个地方洗个澡，我好干净地去见妻子。抵抗组织找到了一个僻静的浴室。然而，就在去洗澡的路上，他被盖世太保抓到集中营。1943 年 10 月，在转移囚犯途中，肖德尔奋力逃跑，被纳粹开枪打死。

2012 年，反映南京大屠杀的《金陵十三钗》与反映波兰利沃夫屠城的《黑暗弥漫》同闯第 84 届奥斯卡最佳外语片。波兰女导演阿格涅丝卡·霍兰的作品入围 9 强。她的《黑暗弥漫》中犹太人躲避在利沃夫下水道的惨景，让人分外痛惜——肖德尔的妻子就是从华沙被营救到利沃夫的下水道避难，却最终死于纳粹毒手。

二战中的利沃夫 12 万犹太人被纳粹灭绝殆尽。今天，当你读到以 Auerbach、Saks、Schauder、Kolodziejczyk、Lomnicki、Bartel、Stożek, Ruziewicz、Lindenbaum、Kerner、Schreier、Wojdyslawski 等人命名的数学定理时，请记住——数学定理并非冰冷的逻辑，他们是数学家永恒的热血与生命。

## 巴拿赫 Banach



巴拿赫 (Stefan Banach, 1892-1945)

史坦因豪斯是希尔伯特的博士。大名鼎鼎的卡茨和肖德尔都是他名下的博士。他曾自豪地宣称，他毕生最伟大的业绩，就是发现了巴拿赫。老师搞出了希尔伯特空间，学生搞出了巴拿赫空间，而史坦因豪斯自己却十分喜爱做基本的数学普及。他精心写出的数学科普著作，在全世界享有盛誉。

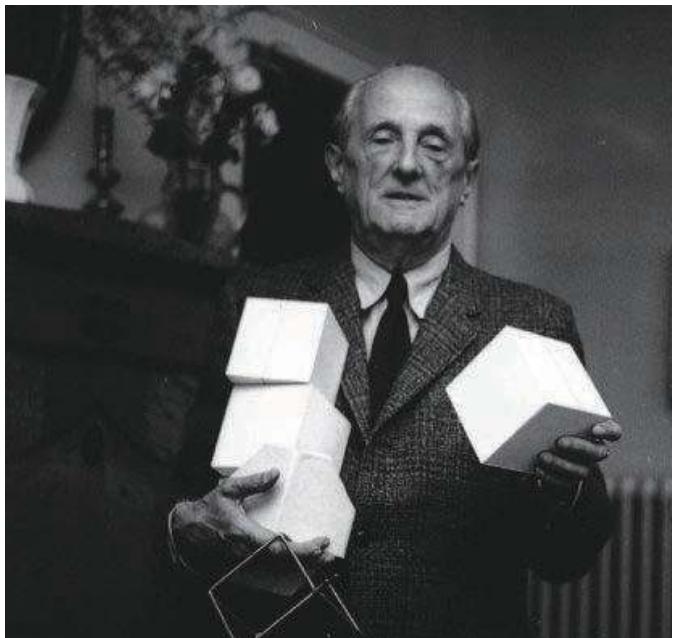
巴拿赫念博士不久，老师劝他抓紧写博士论文。可他总是说：等我把更好的结果做出来再写。无奈的老师心生一计。某日，巴拿赫在校园里被人拦下，说有一群人，被一堆数学难题难倒了。巴拿赫一去，三下五除二全都搞定了。原来那一群人是从华沙来参加论文答辩的数学家。答辩就这么通过了！

坐镇利沃夫学派的是巴拿赫。1983 年在华沙召开的世界数学家大会期间，一群外国数学家听闻附近有条巴拿赫大街，欣喜地要去照相留念。临了一看，却见一块巨大的空地。前来探胜的人感慨：这哪里是巴拿赫大街呀！这分明就是巴拿赫空间！华沙的巴拿赫大街，就是华沙大学数学系所在地。

巴拿赫 (Stefan Banach, 1892-1945) 当之无愧是波兰数学的骄傲。只读了两年工科，没有取得大学文凭的他，酷爱数学，某晚在公园和人聊起勒贝格积分，被经过的数学家史坦因豪斯听到。他立时提了个问题给巴拿赫。几天后，巴拿赫把否定结果带来了。大喜过望的史坦因豪斯与巴拿赫发表了论文，还让巴拿赫跟他读博士。

你是否遇到过符合逻辑却违背常识的事情？巴拿赫与波兰逻辑学家塔斯基就证明了一条奇怪的、违背了常识的数学定理：拿一个实心的金球来，可以把它分割成有限的几块，只允许对这些碎块进行平移和旋转操作，竟然可以装配出两个和原来的金球同样大小的实心金球！这就是著名的分球怪论。

## 史坦因豪斯 Steinhouse



波兰数学家史坦因豪斯 (Hugo Steinhaus, 1887-1972)

巴拿赫能把一个金球变成两个。但波兰学者最令人感动的是，不是把一个金球分割两个，而是把一个数学家复制成无数多个。史坦因豪斯曾经调侃说：和波兰比，美国还是穷多了。波兰可以造就许多出类拔萃的数学家，却不逼迫他们出成绩。在美国这肯定不行，成不了气候的数学家会把美国拖垮的！

桃李天下，岂是一挥而就。史坦因豪斯的讨论班听众寥寥，弟子卡茨曾疑惑：这么几个人，能持续下去吗？老师泰然：“三人即成学院”。然而，终有一天，讨论班只剩下卡茨和史坦因豪斯两个人。卡茨问：只剩两个人了，还能算学院吗？老师正色道：你没见上帝也在这儿和我们俩讨论数学吗？

人可以不信仰宗教，却不可失去虔诚，学者孜孜不倦探究未知世界的奥妙、教师呕心沥血去培育人才、史学家皓首穷经追索千古之谜，这大千万象之后你能读到的是虔诚。先有虔诚而后执着，最终归于痴迷。像史坦因豪斯那个级别的数学家令人羡慕的“与上帝同在”的喜悦，不是宗教，胜似宗教。

传说这位“与上帝同在”的史坦因豪斯，从未把学问当作宗教教义而照本宣科。他仿佛身处古希腊的雅典学院，擅长用苏格拉底式的诘问来指导学生。“诘问”并非“诡辩”，而是通过不断地提问，把数学问题本身不断引向深入，让学生自己用堂堂正正的逻辑，挖出问题的本质，最终把问题解决掉。

史坦因豪斯不只发出苏格拉底式的诘问，他还有形而上学之问：什么是跨越一切时代的最重大的问题？史坦因豪斯的导师希尔伯特曾说：假如有一支魔杖能让自己昏睡过去 500 年，醒来之后他既不会管什么历史大事，也不会管什么社会变迁。他只会问：黎曼 Zeta 函数的零点分布问题，到底有哪些进展？

对于视学术为神圣事业的学者，俗世的万千变化，无非是过眼烟云。

数学的美与真，让犹太数学家史坦因豪斯相信，他思考数学时上帝一定也参与其中。他心中的“上帝”与俗世无关，他心中的“上帝”，正是爱因斯坦所说的“我信仰斯宾诺莎的、在事物的有秩序的和谐中显示出来的上帝”。

这群与上帝同在的精神贵族们，物质条件极为匮乏。史坦因豪斯要在会议上介绍学生马祖尔的论文，会前几个小时问学生：怎么还不把论文给我？学生目瞪口呆：我早就给了您呀！教授道：你只给了我四页白纸！原来，穷学生没有钱，只能买最便宜的糙纸，还往墨水里添了水，字迹隔几天已荡然无存！

艰难困苦、玉成于汝。即便是在大学教书的巴拿赫，同样收支难抵。他不得不花大量的时间和精力去写能赚点钱的中学教材。巴拿赫自幼被双亲抛弃，由一位洗衣妇抚养成人。如果不是遇到史坦因豪斯这样目光远大、且对天才毫无嫉妒之心的伯乐，恐怕其个人乃至波兰数学的历史都将是另外的面貌。

许多人回忆史坦因豪斯，都说他的个性谦虚到能和任何人愉快地共事。他对巴拿赫从未有嫉妒之心。相反，他始终把自己定位成天才成长中的旁观者而非导师。每一个伟大学派的创始期，都有一位心胸开阔、为人谦恭的长者。创立剑桥分析学派的哈代如是，缔造波兰利沃夫学派的史坦因豪斯亦如是。

## 恩弗洛 Enflo



Enflo 在钢琴演奏会上

除了爱泡苏格兰咖啡馆，巴拿赫喜欢静静地一边聆听管弦乐一边思考问题。或许正因为如此，抽象无比的泛函分析才饱含了华美的乐思，那艰深的问题在延绵的律动中层层推进。号称巴拿赫空间三个基本难题的基底问题、逼近问题和不变子空间问题，历经四十余年，终被数学家兼钢琴家 Enflo 突破。

瑞典数学家 Per Enflo 在巴拿赫空间的基本问题上展露出的才华令人震惊。他少年时期就以瑞典歌剧管弦乐队钢琴家身份巡回演出。在瑞典的纪念莫扎特诞辰 200 周年青少年音乐比赛中，12 岁的他一举夺得钢琴比赛冠军。著名钢琴家 Gulda 的老师 Seidlhofer 教授还劝其父母送他到维也纳学音乐。

年轻的 Enflo 醉心于钢琴，中学毕业前，再度夺得瑞典全国钢琴比赛冠军，并夺得瑞典第一



Mazur 奖励 Enflo (右) 一只活鹅

届全国数学竞赛亚军。进入大学之后，念数学的小伙子整日里忙着和名乐团合作贝多芬钢琴协奏曲之类的。念博士时幸亏其导师慧眼识珠，直接拿希尔伯特第五问题刺激他的神经。Enflo 一试身手即大放异彩。

轰动一时的是在 1972 年，时年 28 岁、貌似终日沉迷于钢琴的 Enflo，解决了困惑人们近 40 年的、涉及到巴拿赫空间的一个基本难题。这个问题由马祖尔在 1937 年提出，列在《苏格兰咖啡馆数学问题集》第 153 号。乘 Enflo 到华沙讲学之机，马祖尔兴致勃勃跑去给 Enflo 授奖。奖品十分奇特：一只大活鹅。

巴拿赫们在苏格兰咖啡馆捣腾出一堆难题，其中有许多一时无从解决。他们便为每个难题预设了一笔奖励。Enflo 赢的鹅算是最具创意的奖品。其他问题的奖品，不过就是稀松平常的酒。史坦因豪斯算阔佬，设的奖品是鱼子酱。凑热闹的外国数学家冯·诺依曼给的奖品是：测度大于零的一瓶威士忌！

## 利沃夫学派



波兰国家银行 2012 年发行的纪念巴拿赫金币与银币的正反面

■ 其实正宗的苏格兰咖啡，正是用闻名世界的苏格兰威士忌与咖啡调和而成。不过巴拿赫和他的伙伴们在苏格兰咖啡馆，享受的是雪茄、咖啡，还有令人流连忘返的法国干邑白兰地。埃尔迪什有段名言：数学家就是把咖啡变成定理的机器。照这么说，泛函分析真是美不胜收：她是美酒加咖啡的杰作。

咖啡益于数学容易被人理解，但美酒是数学家的最爱，似乎出人意料。以神谕的方式提出“倍立方”这一传世名题的古希腊数学家埃拉托斯特尼说过：酒能震撼人类全部的灵魂。而波斯大数学家海亚姆更是在《鲁拜集》中放歌：天上何时禁酒觞，人间甘露我偷尝。拼将飘渺三生债，换得千秋醉道场。

曾经属于波兰的利沃夫，成就了数学史上的一段美酒加咖啡的绝唱。2012 年的这个夏天，足球列强荷兰、丹麦、德国、葡萄牙在利沃夫上演了欧洲足球锦标赛死亡之组的精彩比赛。不过，今天的利沃夫已经改属乌克兰。战争改变了国家的版图，但诞生在利沃夫的数学，却永远是波兰的骄傲。



波兰数学家 Banach  
(1892-1945)



挪威数学家 Lie  
(1842-1899)



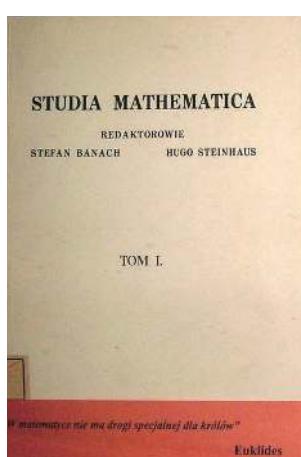
德国数学家 Riemann  
(1826-1866)

你可以在肖邦的钢琴曲中聆听波兰民族的心声，那是花丛中的大炮；你可以在显克维支的小说中读懂波兰民族的历史，那是同仇敌忾的英雄史诗；你也可以在巴拿赫的数学中更深刻地理解波兰民族不羁的灵魂。数学家 Zygmund 曾经说过：成就利沃夫学派的，正是波兰知识分子强烈的民族独立精神。

波兰可以失去她的城市利沃夫，却永远不会失去为波兰民族带来巨大荣耀的巴拿赫。2012 年，波兰国家银行为了纪念这位伟大的数学家，特地发行了纪念巴拿赫金币和银币。金币上面有著名的巴拿赫不动点定理，而银币上则有著名的 Hahn-Banach 定理。曾经是弃儿的巴拿赫，永远铭刻在了数学史上。

在 20 世纪数学论文标题上出现的数学家不可胜数，而名字出现最多的前三位依次是巴拿赫、李 (Sophus Lie) 和黎曼 (Riemann)，可见巴拿赫的影响力极为显赫。当然，靠传奇故事撑不起这种影响力。1929 年，巴拿赫与史坦因豪斯创立的期刊 *Studia Mathematica*，忠实纪录了利沃夫学派极端扎实的学术积累过程。

在德、奥、俄多个列强夹缝中生存的波兰，一直在为民族独立而流血牺牲。但波兰数学期刊 *Studia Mathematica* 却摈弃母语，采纳了德、法、英、意大利语来发表论文；二战前后，利沃夫在苏、德之间几经易手，俄语最终也被期刊采纳。正是波兰数学家的高瞻远瞩，使其数学思想得以声名远播。



波兰期刊“*Studia Mathematica*”

未完待续

作者简介：歌之忆（笔名），生于六十年代，数学博士，任电子信息专业教授十年有余。现阶段在网络数据分析与图像识别等领域主持技术研发。