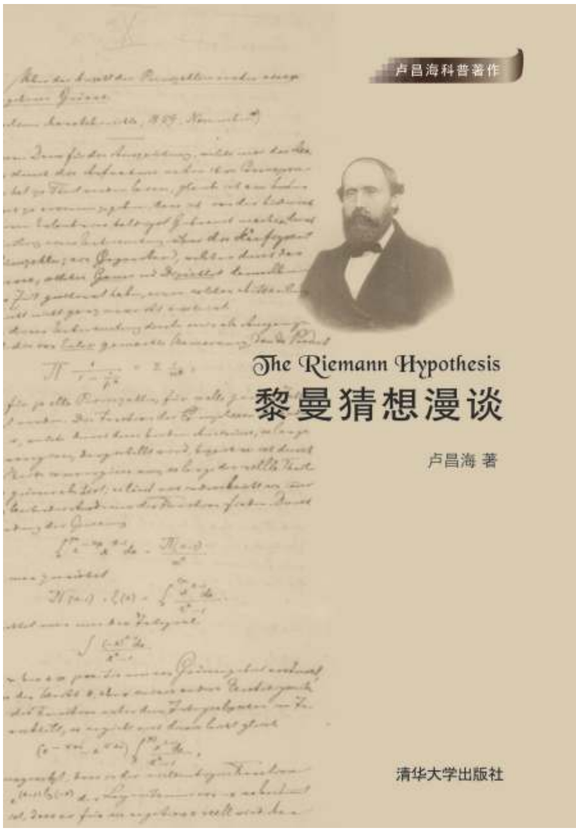
《黎曼猜想漫谈》读后感

王元



一

随着公众数学水平的逐渐提高，愈来愈多的人知道黎曼（Riemann）猜想这个问题，我们将它记为 RH。特别是 RH 曾被希尔伯特（Hilbert）列入他的二十三个问题的第八问题，现在又被列为克莱数学研究所提出的千禧年七大待解决难题之一，倍受关注。不少人已经知道 RH 是数学中第一号重要问题。

但 RH 是个什么问题？为什么重要？至今似未见一篇有相当深度的普及文章来加以解释，常常需要参见数学专业著作与文献，才能得知一些。因此，一般人恐怕仅仅只知道有这么一个问题而已。

卢昌海在《数学文化》上的六期连载文章《黎曼猜想漫谈》，对 RH 相关问题作了详细的解释。文章中关于数学的阐述是严谨的，数学概念是清晰的。文字流畅，并间夹了一些流传的故事，以增加趣味性与可读性。从这几方面来看，都是一篇很好的雅俗共赏的数学普及文章。

二

数学普及文章最要紧的是严谨性，有一些普及文章像在讲故事，不谈数学本身，从而读者在读完后，难免会觉得不知其所以然，一头雾水。

RH 发端于黎曼在 1859 年的一篇文章，其历史远比费马（Fermat）大定理（FLT）与哥德巴赫（Goldbach）猜想（GC）的历史短得多，而且不像这两个问题那样，只要有中小学数学知识的人，就知道其题意。

要了解 RH 的题意，则至少需要知道亚纯函数 $\zeta(s)$ 的含义。所谓黎曼 zeta 函数 $\zeta(s)(s=\sigma+it)$ 是一个复变函数，它在右半平面 $\sigma>1$ 上由一个绝对收敛的级数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}\quad(\sigma>1)$$

来定义的。所以，$\zeta(s)$ 在 $\sigma>1$ 上是全纯的。它在左半平面 $\sigma\le 1$ 上的情况如何呢？则需要将 $\zeta(s)$ 解析延拓至全平面，延拓后的 $\zeta(s)$ 是一个 s 平面上的亚纯函数，它只在 s=1 处有一个残数为 1 的 1 阶根。$\zeta(s)$ 仅在左半平面 $s\le 1$ 上有零点 $s=-2n$（n=1, 2, ...）。这些零点称为 $\zeta(s)$ 的平凡零点，剩下的零点则位于狭带 $0\le\sigma\le 1$ 之中，这些零点称为 $\zeta(s)$ 的非平凡零点。所谓 RH 是说：

> $\zeta(s)$ 的非平凡零点都位于直线 $\sigma=1/2$ 之上。

RH与素数在自然数中的分布密切相关。我想一般关于RH的普及文章也就讲到这里了。

卢昌海的文章从这里讲起，他介绍了$\zeta(s)$的开端，即欧拉（Euler）关于$\zeta(s)$的工作，其中s为实变数，及高斯（Gauss）关于不超过x的素数个数$\pi(x)$的猜想

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} = Li(x),$$

这是素数分布的中心问题。独立于高斯，勒让德（Legendre）也对$\pi(x)$作了猜想

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x - 1.08366}.$$

由于$Li(x) \sim \frac{x}{\log x - 1.08366} \sim \frac{x}{\log x}$，所以我们称

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

为“素数定理”。素数定理已由哈达马（Hadamard）与德•拉•瓦•布桑（de la Valee Poussin）于1896年独立地证明了。但人们期望有一个具有精密误差项的素数定理。可以证明用高斯的猜想公式比勒让德的猜想公式的误差项要精确得多。在RH之下，可以证明

$$\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x}\log x).$$

反之，由这个公式也可以推出RH。所以，这个公式可以看作RH的算术等价形式。由此足见RH的极端重要性了。

然后，卢昌海的文章深入到了$\zeta(s)$较近代的重要研究：其实，黎曼的文章中还包括了几个未经严格证明的命题。除了RH之外，都被哈达马与曼戈尔特（Mangoldt）证明了，只剩下现在所谓的RH。

命$N(T)$表示$\zeta(s)$在矩形$0 \le \sigma \le 1$，$0 < t < T$中的零点个数，黎曼作了猜想

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}.$$

这个结果已由曼戈尔特证明。命$N_0(T)$表示在线段$\sigma = \frac{1}{2}$，$0 < t < T$上，$\zeta(s)$的零点个数，则赛尔贝格（Selberg）证明了，存在正常数c使

$$N_0(T) > cN(T).$$

这个结果是非常惊人的。它说明了$\zeta(s)$在线段$\sigma = \frac{1}{2}$，$0 < t < T$上的零点个数与它在矩形$0 \le \sigma \le 1$，$0 < t < T$上的零点个数相比，占有一个正密度。而线段的二维测度为零。卢昌海还介绍了往后数学家关于c的估计的重要工作：$c \ge \frac{1}{3}$（列文森（Levinson））与$c \ge \frac{2}{5}$（康瑞（Conrey））。

卢昌海用了相当多的篇幅介绍了$\zeta(s)$的非平凡零点的计算方法与大量的计算结果。

这两方面的成果，大大地加强了人们对RH正确性的可信度。

三

黎曼zeta函数$\zeta(s)$与RH都是“原型”，有不少$\zeta(s)$与RH的类似及推广。这些类似与推广都有强烈的数学背景。

卢昌海的文章中谈到了这个问题，即他所谓的RH的“山寨版”与“豪华版”。所谓山寨版，就是RH的某种类似，而豪华版则为RH的某种推广。无论是山寨版，还是豪华版，其数学背景都是极其重要的。

卢昌海介绍了有限域F_q上的平面代数曲线对应的RH，即每一条满足一定条件的代数曲线都对应于一个L函数，它们的零点都位于直线$\sigma = \frac{1}{2}$上。这一命题已由韦依（Weil）证明，而且韦依对于高维代数簇的RH也作了猜想。这个猜想已由德利涅（Deligne）证明。这些无疑都是二十世纪最伟大的数学成就之一。就我所知韦依与德利涅的结果对解析数论就有极大的推动。例如，由韦依证明的RH可以推出模素数p的克罗斯特曼（Kloosterman）和与完整三角和的最佳阶估计

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i(cx+d\bar{x})/p}\right| \le 2\sqrt{p} \qquad (p \nmid cd,\ x\bar{x} \equiv 1 (\bmod p)),$$

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i(a_k x^k + \ldots + a_1 x)/p}\right| \le k\sqrt{p} \quad (p \nmid a_k).$$

长期以来，对这两个问题都只能得到较弱的估计。又如命$n(p)$表示模p的最小二次非剩余，则由韦依的结果，布尔吉斯（Burgess）证明了

$$n(p)=O_{\varepsilon}\left(p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon}\right),$$

其中 $\varepsilon>0$ 为任意给予的正数。过去 $n(p)$ 的最佳阶为 $O_{\varepsilon}\left(p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}+\varepsilon}\right)$。

由德利涅的结果可以推出拉马努扬（Ramanujan）的一个著名猜想。

韦依的 RH 的算术形式为代数曲线在 F_q 上的点数公式的误差为 $O(q^{1/2})$。这是最佳可能估计，称为“韦依界”。

卢昌海介绍了所谓 RH 的豪华版，指的是狄里克雷（Dirichlet）L 函数对应的 RH 类似与戴德金（Dedekind）函数的 RH 类似。由于这两个 函数均以黎曼 zeta 函数为特例，所以它们对应的 RH 称为广义黎曼猜想，记为 GRH 或 ERH。

介绍狄里克雷 L 函数时，先需要引进所谓狄里克雷特征 $\chi(n)\bmod q$。级数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\quad(s=\sigma+it,\ \sigma>1)$$

是绝对收敛的。它也可以解析延拓至 s 全平面。它是 s 平面上的亚纯函数。这就是模 q 的狄里克雷 L 函数 $L(s,\chi)$。所谓 GRH 就是

> 所有 $L(s,\chi)$ 的非平凡零点都位于直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上。

当 χ 为主特征时，$L(s,\chi)$ 本质上就是 $\zeta(s)$，它们仅相差一个仅依赖于 q 的常数倍数。

戴德金 L 函数是在一个代数数域 K 上定义的。这里就不详细讲了。当 $K=Q$ 为有理数域时，戴德金 L 函数就是黎曼 zeta 函数。所谓 GRH 就是戴德金 L 函数的非平凡零点都位于 $\sigma=1/2$ 上。

与 RH 类似，由狄里克雷 L 函数的 GRH 可以推出：当 $(l,q)=1$ 时，命算术数列 $l+kq$（$k=0,1,2,\ldots$）中，不超过 x 的素数个数为 $\pi(x,q,l)$。则

$$\pi(x,q,l)=\frac{1}{\varphi(q)}Li(x)+O(\sqrt{x}\log x),$$

此处 $\varphi(q)$ 表示欧拉函数。当 $q=1$ 时，$\pi(x,1,1)=\pi(x)$。上式就是 RH。这是狄里克雷 L 函数的 GRH 之算术形式。

由戴德金 L 函数的 GRH 可以推出代数数域 K 中的有最佳误差主阶的素理想定理。这也是戴德金 L 函数的 GRH 的算术形式。当 $K=Q$ 时，即为 RH。

但也不是关于 $\zeta(s)$ 的结果都对 $L(s,\chi)$ 有相应的结果。例如关于 $\zeta(s)$ 的无零点区域估计，对于二次特征 χ_2 对应的狄里克雷 L 函数 $L(s,\chi_2)$ 有无这样类似区域估计就不知道了。对此，西格尔（Siegel）关于 $L(s,\chi_2)$ 的非平凡实零点的估计在解析数论中就是非常重要的。

GRH 有极强的数学背景。下面就解析数论领域再举几个例子。

二十世纪最重要的解析数论成果之一是维诺格拉朵夫（Vinogradov）证明的关于 GC 的“三素数定理”，即

> 每个充分大的奇数都是三个素数之和。

其实，这个结果最早已由哈代（Hardy）与李特伍德（Littlewood）在狄里克雷 L 函数的 GRH 之下证明了。维诺格拉朵夫的工作就是发展了以素数为变数的指数和估计方法，从而取消了三素数定理证明中的 GRH。

中国数学家的著名结果之一是关于 GC 的所谓“陈氏定理”，即

> 每个充分大的偶数都是一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和。

其实，早于陈景润，中国在这方面已研究了十多年，总是先假定了狄里克雷 L 函数的 GRH，做出关于 GC 的结果，然后再设法取消证明中的 GRH。

再以 $n(p)$ 的估计为例。在狄里克雷 L 函数的 GRH 之下有估计

$$n(p)=O(\log^2 p),$$

这就比山寨版的 RH 的推论强得太多了。

四

卢昌海文章中用了很大篇幅谈到研究 RH 的尚未成功的（即未得到确定结果）的一些想法与尝试。

卢昌海文章中亦用了很大篇幅谈了一些关于 RH 的美丽的传说。这些传说，我本人也听过一点。例如韦依在中科院访问作的第一次报告就是讲他的山寨版

RH。报告一开始，他就说“曾经希望证明 RH，但不发表，待 RH 提出一百年时发表，现在只能希望在 RH 提出二百年时，再见到它的证明了。”赛尔贝格在访问中科院时的一次宴会上说：“FLT 与 GC 本身都没有什么用。”我说：“研究它们带动了一些新方法的产生。”他说：“那是呵。”这个观点在卢昌海的文章中也提到了。

这些传说都是非常美丽的，人们愿意津津乐道。

五

卢昌海的文章还有以下优点：在讲到一些重大结果时，作者对这些结果的重要前期成就都作了介绍。例如素数定理，赛尔贝格关于 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上的零点个数估计，及韦依关于山寨版 RH 的证明等。又为了讲清楚文章中涉及到的一些概念，作者还举例子加以说明。例如在解释戴德金 L 函数时，涉及到“理想”这个概念，作者以有理数域 Q 与二次域作为例子来说明，所以是深入浅出的。我认为数学系本科高年级学生是可以看懂这篇文章所讲的问题、结果与数学概念的含义的。对于专职数学家与教师，甚至数论学家，也值得阅读。我想他们对于 RH 的了解基本上是在学习与研究数学的过程中，零星地与积累地了解到的。如果有机会系统地了解一下 RH，也会很有好处。因此我愿意向大家推荐卢昌海的文章。

我还想谈一点意见：仅从题意表面来看，RH 只是研究一个特殊的亚纯函数 $\zeta(s)$ 的零点性质。从亚纯函数的理论来看，只是一个例子而已。就像研究 FLT 与 GC 一样，研究它们的目的主要在于发展数学中的新思想与新方法。形象地说，这两个问题都是数学中“下金蛋的母鸡”。

从过去的研究来看，RH 当然是数学中下金蛋的母鸡，但研究它的目的，远远不止此。它之所以成为数学中第一重要问题，主要是由于一系列的数学中的重大问题的解决都依赖于各种 RH 的解决。一旦这些 RH 解决了，人类就站在一个不知比现在高多少的数学平台上，看到更远得多的风景。

到底各种 RH 可以推出多少数学结果？要求弄清楚这么多东西恐怕是太难了。如果卢昌海这篇文章还要继续写下去，也许可以考虑写一些各种 RH 的推广。这会使读者更能了解到解决各种 RH 的巨大意义。

最后，我愿借此机会祝卢昌海文章的成功，并盼望见到它能够成书出版，使更多读者能读到，并从中受益。

王元先生部分手稿