# 瑟斯顿与低维拓扑

刘晓波

这个秋天美国拓扑学界巨星陨落。不世出的天才威廉•瑟斯顿（William Thurston）因病逝世。

近几年来关于庞加莱猜想的新闻见诸中文媒体之上，使瑟斯顿的大名越洋远播，不少国人因而得知瑟斯顿的主要贡献在于提出并部分证明了蕴涵庞加莱（Poincaré）猜想在内的几何化猜想。2006 年国际数学家大会已经宣布几何化猜想被俄罗斯数学家佩雷尔曼（Perelman）攻克。我们现在解开束缚，可以完全自由地讨论三维流形的具体分类了。瑟斯顿此去应无遗憾。

威廉•瑟斯顿（1946-2012）

瑟斯顿于 1967 年从佛罗里达州的 New College of Sarasota 获得他的生物学士学位。据他自己所述，这个学校非常重视独立研究，所以在本科期间他读了不少数学书。毕业以后去加州大学伯克利分校攻读数学博士。这个故事可以激励很多身在其它专业而热爱数学的同学。很多最具原创性的数学家并非一开始就研究数学。

瑟斯顿的博士和博士后期间的工作主要是关于分叶结构的。所谓分叶，就是将一个几何空间分解为维数统一的子空间的并集。对于封闭的几何空间，低一维的分叶 (codimension one foliation) 的存在性受到一个比较显然的限制，就是欧拉示性数必须是 0。球面的欧拉示性数为 +2，所以球面是不存在低一维分叶的，或者说，不存在一族互不相交的曲线来填充球面。轮胎面欧拉数为 0，它的确可以被一族圆圈填充。瑟斯顿在这个课题上获得了令人惊异的结果：在任何维数，如果仅考虑光滑的低一维分叶结构的存在性，那么这个对欧拉数的限制就是唯一的限制。也就是说，只要一个封闭流形的欧拉示性数是 0，那么就存在它的一个低一维光滑分叶结构。这个结果是出人意料的，一般而言，这类存在性问题不会有这么简单明了的充分必要条件。瑟斯顿就是这样，他得到的结果总是让人大吃一惊。

瑟斯顿博士期间关于三维空间上分叶结构的研究使得他对三维空间的内部构造有了非常敏锐的感觉。这种感觉把他引至关于三维空间的几何结构的研究，从而发现了最令人吃惊的结果——原来绝大多数不可约三维流形都能被赋予双曲度量。当黎曼（Riemann）在 1854 年提出他的“流形”概念的时候，他把当时还未被广泛接受的双曲几何 ( 即非欧几何 ) 作为他的一般度量概念的一个非常特殊的情形。现在我们看到在三维这个人类存在的空间维数，双曲几何是如此普遍的存在。当庞加莱在 19 世纪末将双曲几何从故纸堆里翻出来进行系统研究的时候，他不会想到这个几何结构同他另一个关心的问题（庞加莱猜想）正好构成三维流形结构问题中两个互补的方面。

瑟斯顿对待数学研究有一种与众不同的态度。他没有要把证明写得滴水不漏的习惯。他更强调观察、思考、直觉。他这种天马行空的风格不由得让人想到黎曼。所以瑟斯顿正式出版的作品不多，被业内人视为珍宝。我们来稍微领略一下他的这种风格，翻译一段瑟斯顿唯一正式出版的研究型教科书《三维的几何与拓扑》（Three-Dimensional Geometry and Topology）的导读：

当我们想介绍一个课题的时候，效率最高的叙述顺序莫过于逻辑顺序，正如很多书籍所做的那样：先给出一堆定义，却不解释背景和来源；给出好多答案，却没有先引出相应的问题。这样一个顺序跟我们接受这个课题的心理历程截然不同。当读者面对这样一个形式的逻辑演绎体系时，唯一的选择就是被牵着鼻子走，只能抱着最终能豁然贯通的希望。

然而数学是一个庞大且高度交叉的体系。这个体系远远不是线性展开的。学习数学需要始终保持活跃的思维，不断提出问题，不断在脑子里形成当前课题与其他内容的联系，这样才能建立自己对这整个体系的一个感觉，而并不仅仅是走马观花。

任何有趣的数学领域都不是自成体系的，也不是完备的：相反，到处都是不完全，到处都是自然而生却不容易通过本领域的方法技巧来解决的问题和想法。这些不完全经常能导致看起来毫不相关的几个领域之间的联系。人们在诠释数学时习惯于掩盖这些不完全，这样看起来更加流畅，然而，一块饱和的海绵就失去了吸收的能力……

这本书正如作者自己所说，运用了一种奇怪的、非逻


瑟斯顿在2010年的巴黎时装秀

辑的结构。很难说这本书到底适合有一定数学成熟性的人还是更适合初学者。很多证明和想法能让没有太多数学背景的人接受。比如第一章，只有一个公式和极少的数学符号，满篇都是文字说明和示意图。但书里的练习题和思考题真是又多又难。此书的原型是瑟斯顿的研究笔记。书里的内容大致相当于笔记的前三节的扩充。而笔记本身经过整理至少有十三节，越往后越艰深。1997年这本书出版的时候，这些笔记已经在圈内人中流传了20多年。可惜的是，瑟斯顿本人并没有足够的动力去完成把研究笔记完全整理成书的工作。他的笔记固然已经十分可贵，《三维的几何与拓扑》这本书更添精彩。倘若十三节笔记都能由他本人成书，从而完全展现瑟斯顿数学思想的细节，将是数学人何等大幸。

瑟斯顿于1982年获得菲尔兹（Fields）奖的主要成果是提出并部分证明了几何化猜想。这个猜想是关于三维流形的。它在二维有一个类比。人们早就知道这个二维类比是成立的。从这个二维类比出发我们可能更容易理解几何化的背景。20世纪初期大家已经知道，所有的曲面其实都可以实现为曲率为常数的黎曼流形。球面是最直观的例子，三维空间中的单位球面就是这样一种形态，它在每一点的曲率均为+1；轮胎面的均匀弯曲形态不容易直接观察到，但是我们可以先看圆柱面，显然圆柱面的曲率为0，而轮胎面实际上由把圆柱面的两个边界对接得到，这个对接可以保证度量的连续性，所以我们看到轮胎面具有点点曲率为0的形态；多环面就稍微复杂一些，但通过所谓曲面的多边形表示可以论证，多环面具有点点曲率为−1的形态。这些几何形态的特点是，由于每一点的几何性质都一样（特别的，这些例子里每一点的曲率都一样），所以在局部上不可能通过测量来区分两个点。这种性质称为局部齐性。本质上，这种局部齐性来自于它们的模型空间的整体齐性。也就是说，给定模型空间 $X$ 的任意两点 $x$ 和 $y$，总存在一个 $X$ 到自身的等距映射 $f$，使得 $f(x)=y$。球面、欧氏平面、双曲平面都具有这样的性质。它们分别是二维世界中三种几何的模型空间：球几何、欧氏几何、双曲几何（或称为非欧几何）。所有的二维流形都可以被赋予这三种几何中的一种。这就是二维的几何化。瑟斯顿的想法是在三维也实现类似的几何化。

三维的情况当然比二维复杂。首先，如果一个三维流形 $M$ 的拓扑比较复杂，比如，$M$ 中存在一个拓扑球面 $\mathbb{S}^2$ 把 $M$ 分成两个部分，使得两个部分都不是球体（这样一个球面称