前排从左至右：林亚南，刘建亚，张智民，付晓青；后排从左至右：张英伯，蔡天新，邓明立，顾沛，罗懋康，汤涛，励建书，游志平（刘青阳 摄）

主 办　香港 Global Science Press
沙田新城市中央广场第一座 1521 室

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者

《数学文化》欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com

本刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本刊淘宝网：http://mysanco.taobao.com/
本期出版时间：2012年11月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金和科学出版社的支持

Contents | 目录

数学人物

数学趣谈

数学烟云

数学教育

数学经纬

数学家随笔

致歉

因印刷设备的机械失误，《数学文化》2012/ 第 3 卷第 3 期的文章中部分引号出现了缺失，使得相应的文字间留下了诸多空白，从而一定程度上影响了读者的阅读，对此本刊深表歉意！

此外，山东大学金融研究院的时晓敏同学来信指出，同期 80 页数学家阿贝尔的图片说明其生卒年代有误，应为“1802-1829”。在此一并致谢！

威廉·瑟斯顿

陶哲轩／文　李玉田／译

编者按：威廉•瑟斯顿（William Thurston, 1946 年 10 月 30 日— 2012 年 8 月 21 日），美国数学家，低维拓扑学研究的领袖人物之一。1982 年，他因在三维流形方面的杰出工作被授予菲尔兹奖。此外他还获得 1976 年的维布伦几何奖（Veblen Prize in Geometry）。本文是著名数学家陶哲轩对瑟斯顿的悼念文章。

19 世纪最伟大的数学成就之一是从拓扑观点对二维曲面进行分类，也就是把它们看成橡皮膜，只要不撕破就可以任意变形。从抽象的观点来看，一个鼓胀的球和一个干瘪的球都是同一球面；另一方面，一个球面和一个救生圈是不同的曲面，因为球面不可能在不被破坏的条件下变形成为一个救生圈。在二维曲面的分类完成以后，自然的一步就是对三维曲面进行分类。这一工程在二十世纪七十年代由瑟斯顿开始。甚至这项工作还没有完成，他的成就就导致他获得 1982 年的菲尔兹奖。他证明：任何三维流形均容许一个几何分解，分解后的“零部件”拥有 8 种可能的几何结构之一，并指出庞加莱猜想只是几何化猜想的一个特例。

瑟斯顿认为好奇心与人类直觉紧密相连。他说：“数学是真正的人类思维，它涉及人类如何能有效地思考，这就是为什么好奇心是一个好向导的道理。”

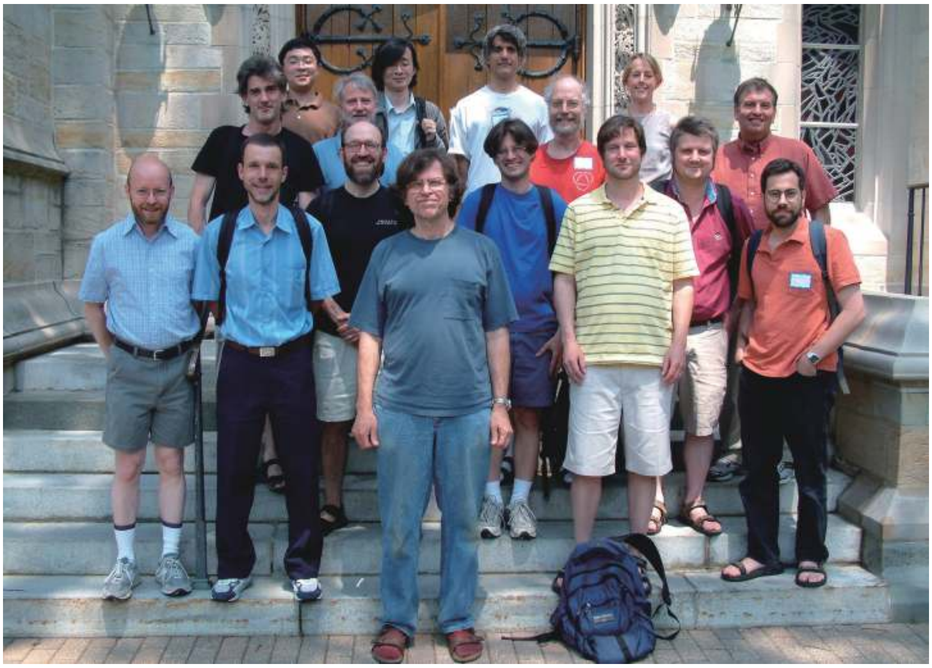
本文翻译自陶哲轩的博客，原文见 http://terrytao.wordpress.com/2012/08/22/bill-thurston/。

低维拓扑学研究的领袖人物之一瑟斯顿

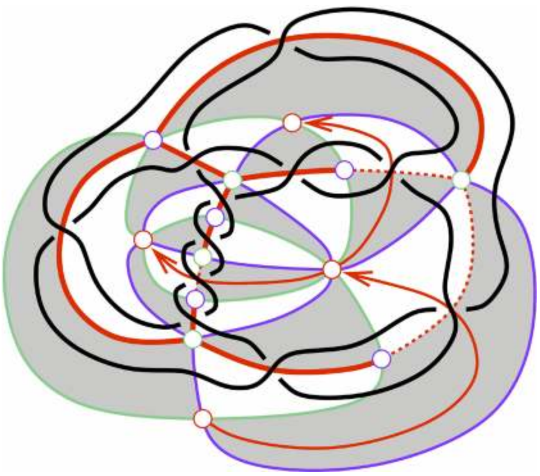
威廉•瑟斯顿（William Thurston），曾对低维流形和相关结构的理解做出过本质性贡献的著名数学家，在本周二（2012 年 8 月 21 日）去世了，享年 65 岁。

或许瑟斯顿最有名的成就是 Haken 流形的双曲化定理，该定理表明满足一定拓扑条件的任何三维流形都可以赋予一个双曲几何结构（即一个能够使得该流形等距于一个双曲的三维球面 $\mathbb{H}^3$ 之商的黎曼度量）。这个连接着三维流形的拓扑结构与几何结构的高难度定理引导瑟斯顿给出了有广泛影响力的几何化猜想，这个猜想（至少理论上）对任意三维流形的拓扑结构进行了完整的分类，分为八种标准的几何（现在被称为瑟斯顿标准几何）。这个猜想有很多推论，包括瑟斯顿的双曲化定理和（最著名的）庞加莱猜想。事实上，它把庞加莱猜想置于一个概念上更吸引人的一般框架中，这个框架中许多其他的情况已经被证实，瑟斯顿提供了一个指向证实庞加莱猜想的最强有力的证据。直到 2002-2003 年中，佩雷尔曼（Grigori Perelman）的工作通过发展哈密尔顿（Richard Hamilton）的里奇流（Ricci flow）的方法证明了庞加莱猜想和几何化猜想都是正确的。（现在有几个佩雷尔曼关于两个猜想证明的变体；在 Besseires, Besson, Boileau, Msilot，和 Porti 的几何化证明中，瑟斯顿的双曲化定理即是一个关键的部分，它容许绕过佩雷尔曼证明中关键的一步，即亚历山大洛夫空间理论。）

瑟斯顿结果中我最喜欢的一个是他关于球面反转的优



瑟斯顿（前中）在国际会议上



一个三维拓扑的示意图

美方法（光滑地将 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 S^2 球面内部翻到外面，翻转过程中不能有折叠或者奇点）。球面可以内外翻转这一事实是非常不直观的，经常被称为斯梅尔悖论，因为史提芬 • 斯梅尔（Stephen Smale）第一个证明了这样的翻转是存在的。然而，在瑟斯顿方法出现之前，关于球面翻转所有已知的构造都是非常复杂的。瑟斯顿的方法，依赖于先让球面产生波纹然后再扭曲球面，非常的概念化和几何化，它事实上可以用非技术性的语言来有效地解释，几何中心（The Geometry Center）制作了一个名为“Outside In”的视频很直观地解释了这一过程。该视频的网址是：http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=wO61D9x6lNY 或 http://v.youku.com/v_show/id_XMjYzNDY0NzY=.html?firsttime=1001。

除了对于数学研究的直接贡献，瑟斯顿也是一位出色的数学解释者，他有一套罕见的窍门，除了能描述数学发展的结果和所隐藏的直觉，他还能够描述数学思维的发展。他精彩的随笔文章“数学中的证明与进展”[1]，就是一个典型的例证，我本人非常欣赏这篇文章。更近的例证包括他在 MathOverFlow[2] 网站上的许多富有洞察力的问题和解答。

遗憾的是我从没见过瑟斯顿本人（尽管我们在网络上联系过几次），但是我认识很多深受他和他的工作影响的数学家。他的去世是数学界的一个巨大损失。

译者：李玉田，数学博士，香港浸会大学研究助理教授。

参考资料

1. 见网站 http://arxiv.org/pdf/math/9404236.pdf

2. MathOverFlow 是一个数学论坛，上面有很多专业的数学家进行提问和解答问题。瑟斯顿曾活跃在该论坛，他曾提出过很多有趣并非常有益的问题，比如他曾经提问：“在你对数学的认知和你向别人解释数学之间有多大差距？”该论坛的网址是：http://www.mathoverflow.org

瑟斯顿与低维拓扑

刘晓波

这个秋天美国拓扑学界巨星陨落。不世出的天才威廉•瑟斯顿（William Thurston）因病逝世。

威廉•瑟斯顿（1946-2012）

近几年来关于庞加莱猜想的新闻见诸中文媒体之上，使瑟斯顿的大名越洋远播，不少国人因而得知瑟斯顿的主要贡献在于提出并部分证明了蕴涵庞加莱（Poincaré）猜想在内的几何化猜想。2006 年国际数学家大会已经宣布几何化猜想被俄罗斯数学家佩雷尔曼（Perelman）攻克。我们现在解开束缚，可以完全自由地讨论三维流形的具体分类了。瑟斯顿此去应无遗憾。

瑟斯顿于 1967 年从佛罗里达州的 New College of Sarasota 获得他的生物学士学位。据他自己所述，这个学校非常重视独立研究，所以在本科期间他读了不少数学书。毕业以后去加州大学伯克利分校攻读数学博士。这个故事可以激励很多身在其它专业而热爱数学的同学。很多最具原创性的数学家并非一开始就研究数学。

瑟斯顿的博士和博士后期间的工作主要是关于分叶结构的。所谓分叶，就是将一个几何空间分解为维数统一的子空间的并集。对于封闭的几何空间，低一维的分叶 (codimension one foliation) 的存在性受到一个比较显然的限制，就是欧拉示性数必须是 0。球面的欧拉示性数为 +2，所以球面是不存在低一维分叶的，或者说，不存在一族互不相交的曲线来填充球面。轮胎面欧拉数为 0，它的确可以被一族圆圈填充。瑟斯顿在这个课题上获得了令人惊异的结果：在任何维数，如果仅考虑光滑的低一维分叶结构的存在性，那么这个对欧拉数的限制就是唯一的限制。也就是说，只要一个封闭流形的欧拉示性数是 0，那么就存在它的一个低一维光滑分叶结构。这个结果是出人意料的，一般而言，这类存在性问题不会有这么简单明了的充分必要条件。瑟斯顿就是这样，他得到的结果总是让人大吃一惊。

瑟斯顿博士期间关于三维空间上分叶结构的研究使得他对三维空间的内部构造有了非常敏锐的感觉。这种感觉把他引至关于三维空间的几何结构的研究，从而发现了最令人吃惊的结果——原来绝大多数不可约三维流形都能被赋予双曲度量。当黎曼（Riemann）在 1854 年提出他的“流形”概念的时候，他把当时还未被广泛接受的双曲几何 (即非欧几何) 作为他的一般度量概念的一个非常特殊的情形。现在我们看到在三维这个人类存在的空间维数，双曲几何是如此普遍的存在。当庞加莱在 19 世纪末将双曲几何从故纸堆里翻出来进行系统研究的时候，他不会想到这个几何结构同他另一个关心的问题（庞加莱猜想）正好构成三维流形结构问题中两个互补的方面。

瑟斯顿对待数学研究有一种与众不同的态度。他没有要把证明写得滴水不漏的习惯。他更强调观察、思考、直觉。他这种天马行空的风格不由得让人想到黎曼。所以瑟斯顿正式出版的作品不多，被业内人视为珍宝。我们来稍微领略一下他的这种风格，翻译一段瑟斯顿唯一正式出版的研究型教科书《三维的几何与拓扑》（Three-Dimensional Geometry and Topology）的导读：

当我们想介绍一个课题的时候，效率最高的叙述顺序莫过于逻辑顺序，正如很多书籍所做的那样：先给出一堆定义，却不解释背景和来源；给出好多答案，却没有先引出相应的问题。这样一个顺序跟我们接受这个课题的心理历程截然不同。当读者面对这样一个形式的逻辑演绎体系时，唯一的选择就是被牵着鼻子走，只能抱着最终能豁然贯通的希望。

然而数学是一个庞大且高度交叉的体系。这个体系远远不是线性展开的。学习数学需要始终保持活跃的思维，不断提出问题，不断在脑子里形成当前课题与其他内容的联系，这样才能建立自己对这整个体系的一个感觉，而并不仅仅是走马观花。

任何有趣的数学领域都不是自成体系的，也不是完备的：相反，到处都是不完全，到处都是自然而生却不容易通过本领域的方法技巧来解决的问题和想法。这些不完全经常能导致看起来毫不相关的几个领域之间的联系。人们在诠释数学时习惯于掩盖这些不完全，这样看起来更加流畅，然而，一块饱和的海绵就失去了吸收的能力……

这本书正如作者自己所说，运用了一种奇怪的、非逻

瑟斯顿在 2010 年的巴黎时装秀

辑的结构。很难说这本书到底适合有一定数学成熟性的人还是更适合初学者。很多证明和想法能让没有太多数学背景的人接受。比如第一章，只有一个公式和极少的数学符号，满篇都是文字说明和示意图。但书里的练习题和思考题真是又多又难。此书的原型是瑟斯顿的研究笔记。书里的内容大致相当于笔记的前三节的扩充。而笔记本身经过整理至少有十三节，越往后越艰深。1997 年这本书出版的时候，这些笔记已经在圈内人中流传了 20 多年。可惜的是，瑟斯顿本人并没有足够的动力去完成把研究笔记完全整理成书的工作。他的笔记固然已经十分可贵，《三维的几何与拓扑》这本书更添精彩。倘若十三节笔记都能由他本人成书，从而完全展现瑟斯顿数学思想的细节，将是数学人何等大幸。

瑟斯顿于 1982 年获得菲尔兹（Fields）奖的主要成果是提出并部分证明了几何化猜想。这个猜想是关于三维流形的。它在二维有一个类比。人们早就知道这个二维类比是成立的。从这个二维类比出发我们可能更容易理解几何化的背景。20 世纪初期大家已经知道，所有的曲面其实都可以实现为曲率为常数的黎曼流形。球面是最直观的例子，三维空间中的单位球面就是这样一种形态，它在每一点的曲率均为 +1；轮胎面的均匀弯曲形态不容易直接观察到，但是我们可以先看圆柱面，显然圆柱面的曲率为 0，而轮胎面实际上由把圆柱面的两个边界对接得到，这个对接可以保证度量的连续性，所以我们看到轮胎面具有点点曲率为 0 的形态；多环面就稍微复杂一些，但通过所谓曲面的多边形表示可以论证，多环面具有点点曲率为 −1 的形态。这些几何形态的特点是，由于每一点的几何性质都一样（特别的，这些例子里每一点的曲率都一样），所以在局部上不可能通过测量来区分两个点。这种性质称为局部齐性。本质上，这种局部齐性来自于它们的模型空间的整体齐性。也就是说，给定模型空间 X 的任意两点 x 和 y，总存在一个 X 到自身的等距映射 f，使得 $f(x)=y$。球面、欧氏平面、双曲平面都具有这样的性质。它们分别是二维世界中三种几何的模型空间：球几何、欧氏几何、双曲几何（或称为非欧几何）。所有的二维流形都可以被赋予这三种几何中的一种。这就是二维的几何化。瑟斯顿的想法是在三维也实现类似的几何化。

三维的情况当然比二维复杂。首先，如果一个三维流形 M 的拓扑比较复杂，比如，M 中存在一个拓扑球面 $\mathbb{S}^2$ 把 M 分成两个部分，使得两个部分都不是球体（这样一个球面称

拓扑结构的雕塑

为本质球面），那么这个三维流形的模型空间里也必然包含这么一个本质球面。而我们知道三维球面 $\mathbb{S}^3$ 和三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 都不存在本质球面。那么显然，M 不可能容许球几何、欧氏几何，或者双曲几何（双曲几何空间 $\mathbb{H}^3$ 也同胚于 $\mathbb{R}^3$），因为这些几何的模型空间不能包含本质球面。这一类的限制是拓扑限制，也就是说，要装配某种几何，必须要具有某种特殊的拓扑性质。其实在二维也有这样的限制，比如，高斯 - 博内（Gauss-Bonnet）定理断言曲面的欧拉示性数等于曲率的积分。所以欧拉示性数为 +2 的曲面、球面，是不可能被赋予曲率为 -1 的双曲度量的。三维的拓扑限制更大，比如本质球面的限制，实际上意味着大部分这样的三维流形不存在几何结构（瑟斯顿证明三维中存在 8 种几何，其中 7 种都不容许本质球面，因为它们的模型空间不是同胚于 $\mathbb{S}^3$ 就是同胚于 $\mathbb{R}^3$）。

容易想到，如果三维流形含有本质球面，那么就沿着这个球面切开，分成两个三维流形。如果这两个组成部分各自还含有本质球面，就继续施行这种切割，直到所有组成部分都不含有本质球面为止。这个程序是否总是可行呢？在瑟斯顿之前，拓扑学家们已经对三维流形的拓扑有很深的了解，其中大部分工作都是受到庞加莱猜想的驱动。他们为瑟斯顿提出几何化猜想准备了工具。比如，沿着本质球面切开的程序已被证明可行。普通三维流形都可以唯一分解成有限个不含本质球面的组成部分。类比代数概念，这些组成部分称为素三维流形或者不可约三维流形。这些在本质球面意义下不可分割的流形还可以沿一些本质环面切开而分解成更简单的组成部分。本质环面也限制三维流形上某些几何结构的存在性。瑟斯顿猜想，虽然在一般三维流形上不一定存在几何结构，但经过上述两步的分解之后，在它每个组成部分上都存在某种几何结构。

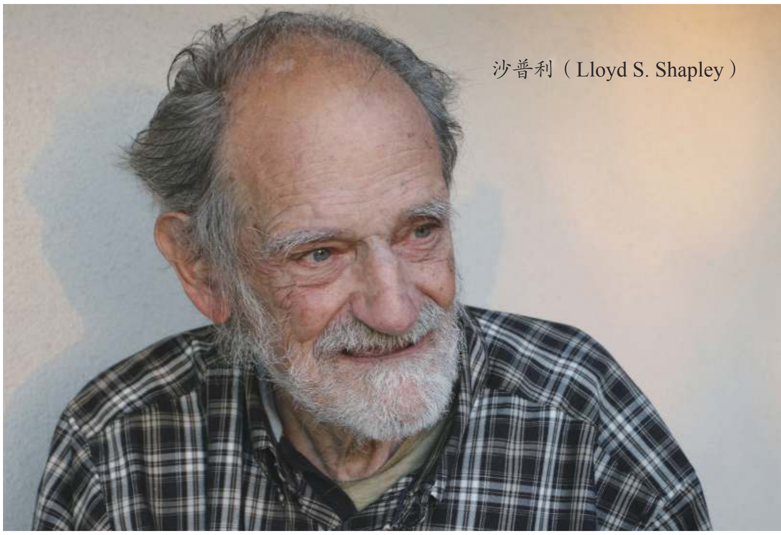
瑟斯顿最大的贡献在于他证明，经过两步分解之后，那些既不含本质球面又不含本质环面的组分上存在双曲几何结构。他证明的双曲化定理实际上要更广泛一些。结合其它一些结果，几何化猜想的很多情形都得到了证明，除了两个最困难的情形：1，封闭流形的基本群有限是球度量存在的充分必要条件（蕴含庞加莱猜想）；2，基本群无限而不含本质曲面的流形具有双曲度量。[这两个情形在 2004 年由俄罗斯数学家佩雷尔曼运用偏微分方程的工具里奇流（Ricci flow）证明。] 尽管瑟斯顿没能一鼓作气完全证明几何化猜想，他的双曲化定理已经给双曲几何在低维拓扑中的应用开拓了无限的空间。流形上的几何结构比拓扑结构更精细更丰富，现在既然我们知道大多数不可约三维流形能被赋予双曲度量，则利用这个双曲度量来研究流形的拓扑乃是事半功倍的。比如，困扰数学家们 100 年之久的纽结分类问题，在双曲几何的威力下基本上得到了解决。根据空间挖掉纽结之后的补空间的拓扑性质，复杂的纽结可以分解为简单纽结（同之前提到的本质环面分解相关），而简单纽结中绝大多数的补空间都具有双曲几何结构。这种纽结称为双曲纽结。对于双曲纽结，所有通过双曲几何计算出来的量都是纽结的拓扑不变量。这其中有一个量（实际上是一个图）被用来区分所有不同的纽结。类似的算法被归纳到计算机软件应用中（比如软件 SnapPea），用以对具体三维流形或纽结的拓扑做细致的研究。

瑟斯顿对双曲化定理的证明动用了大量工具，有直接采用前人的，有经过自己改进的，还有全新设计的。这些工具涉及的领域非常广泛，包括低维拓扑、微分几何、度量几何、复分析、群论、泛函分析。即便对这些工具及其在该证明中的使用仅仅进行扼要的介绍，也需要 400 到 500 页的篇幅，比如迈克尔 • 卡波维奇（Michael Kapovich）的著作《双曲流形与离散群》(Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups)。在如此丰富的思想与技巧的海洋中游弋无疑是种享受。这是瑟斯顿留给这个世界的宝贵遗产。

作者简介：刘晓波，本科毕业于北大数学学院，美国南加州大学数学博士，从事低维几何拓扑研究，现任职于中国科学院数学与系统科学研究院。

2012 年诺奖得主数学家劳埃德·沙普利

未铭


沙普利（Lloyd S. Shapley）

瑞典皇家科学院宣布，2012 年诺贝尔经济学奖授予哈佛大学商学院教授罗斯（Alvin E. Roth）和加州大学洛杉矶分校教授沙普利（Lloyd S. Shapley）。沙普利教授本科在哈佛数学系就读，研究生就读于普林斯顿大学数学系。他获奖后告诉记者："我自认为是个数学家，我一辈子没上过经济课。"（I consider myself a mathematician…I never, never in my life took a course in economics.）

生平

沙普利生于 1923 年 6 月 2 日，出生在哈佛大学的所在地——美国马萨诸塞州的剑桥。父亲是著名的天文学家哈罗·沙普利（Harlow Shapley, 1885 -1972），美国科学院院士，1921 年至 1952 年担任哈佛大学天文台台长；1943 年至 1946 年担任美国天文学会会长。二战时，在哈佛大学读书的沙普利于 1943 年来到中国成都的美军空军基地，期间因破获日军密码获得美军铜星勋章（Bronze Star）。战争结束后，他回到哈佛，并于 1948 年毕业于数学系。在兰德公司工作一年后，他来到普林斯顿大学攻读数学研究生，并于 1953 年获得了博士学位。他的博士论文和博士后研究工作引进了沙普利值 (Shapley Value)，并给出了博弈论的核心解（core solution)。毕业后他长期在兰德公司（Rand Corporation）工作，直至 1981 年加盟加州大学洛杉矶分校。

研究贡献

沙普利被很多专家认为是博弈论的具体化身。在 20 世纪 40 年代的冯·诺伊曼（von Neuman）和摩根斯坦（Morgenstern）之后，沙普利被认为是博弈论领域最出色的学者。他的贡献包括随机对策理论、Bondareva- Shapley 规则、Shapley–Shubik 权力指数等，并著有《随机博弈》、《简单博弈论》、《市场博弈论》等。与传统赛局理论着眼于个人间的彼此竞争不同，沙普利讲求合作，这也是他在经济学上的最大贡献。其著名的沙普利值（Shapley Value）即在于算出"合作解"，计算 3 个人或 5 个人在一场赛局中，透过合作可获得多少报酬。

博弈论从一开始就分为两个分支，一是非合作博弈，一是合作博弈。事实上，博弈论的早期开创者们，包括纳什 (John Nash)、沙普利、哈萨尼 (Mel Hausner)、泽尔腾 (Reinhard Selten) 和奥曼 (Robert Aumann) 等人对非合作与合作博弈均做出了奠基性贡献。后来的发展使这两个分支在不同时期受到不同程度的重视。由于 20 世纪后期信

信息经济学的发展，非合作博弈在研究不对称信息情况下市场机制的效率问题中发挥了重要的作用，从而使得非合作博弈相对于合作博弈在经济学中占据了主流地位。与之相应地，在发达国家的绝大多数大学经济学系的研究生课程中，非合作博弈是一门主要的必修课。而合作博弈的内容大多不在主要授课计划中。然而，合作博弈并没有随着时间而消失。事实上，起源于纳什的谈判博弈和沙普利值的公理化方法，在经济学中产生了广泛且深刻的影响。沙普利是同时代的合作博弈论里公认的权威，与沙普利同时获得此次诺贝尔经济学奖的著名博弈论学者埃尔文•罗斯曾在其编辑的《沙普利值》一书的前言里说道："我有幸常常朝拜性地会见沙普利，我们所有这一代的经济学家都欠沙普利一个智慧的账。"沙普利的主要贡献是提供了一个理论上的最优方案，和数学家盖尔（David Gale, 1921-2008) 共同提出了"盖尔 - 沙普利方法"，提出和发展了匹配理论（matching theory）。其研究重点是如何使双方不愿打破当前的匹配状态，以保持匹配的稳定性；这一机制还可对相关各方试图操纵匹配过程加以限制。以高考填报志愿为例，该方法的基本思想是，让分数最高的人先报，然后让分数次高的人填报，最后直到所有人填报完毕，这样可以确保公平和效率。具体的模型比较复杂，核心思想是确保所有人没有动力偏离均衡。2012 年另一位诺贝尔经济奖得主罗斯的贡献主要是做实验和经验检验，在很多方面印证了"盖尔 - 沙普利方法"。

当初"盖尔 - 沙普利方法"主要是应用于婚姻匹配问题。他们考虑的问题是，假如有 N 个男人和 N 个女人要结婚，如何匹配呢？第一步先对自己的意中人进行排名，要让每一个人都刚好能和自己最喜欢的人在一起基本上是不可能的，每个人都必须将异性按喜欢程度排序，简称"偏爱序"。第二天上午，所有的男人都向自己最爱的女人求婚。每个女人清点自己的求婚列表。如果只收到一个男人的求婚，那么就和他订婚。如果多于一人，就和其中她最爱的那个男人订婚；如果没有最爱的，就拒绝自己肯定不愿意接受的求婚，而把那些可以考虑的放在候选名单里。这一轮之后，每个没有成功的男人再向第二个满意的女人求婚，女人或者接受满意者，或者拒绝不喜欢的，或者把求婚者放在候选人名单里。这样反复此过程，直道所有女人接受了满意的求婚者，就完成了匹配的过程。

逸事

沙普利的学生回忆说他是个标准的数学家，有个大胡子，经常穿着短裤在校园行走，有时候上课时，还会看到他的衣服扣错扣子。不修边幅的沙普利还常穿着拖鞋在校园行走，深思他关注的问题。学生请他帮忙，他完全没有架子，讲话也非常温和。他的学术专长就是将赛局理论运用到经济学上，上课讲的也就是数学理论。获得诺贝尔奖之后，沙普利接受美联社采访时说："我一直将自己视为数学家，但奖项是给予经济学的。可我一辈子从来没有选过任何一门经济课。"（I consider myself a mathematician and the award is for economics. I never, never in my life took a course in economics.）

2012年诺贝尔经济奖得主罗斯（Alvin E. Roth）和沙普利（Lloyd S. Shapley）

除沙普利外，目前为止还有 6 位博弈论学者曾获得了诺贝尔经济奖，包括阿罗（Kenneth Arrow）、奥曼（Robert Aumann）、德布鲁（Gerard Debreu）、纳什（John Nash）、谢林（Thomas Schelling）和泽尔滕（Reinhard Selten）。沙普利和 1994 年诺奖得主纳什是普林斯顿数学系读博士时的同学，前者 1949-1953 年读博，后者 1948-1950 年读完博士；他们都是研究数学及其在博弈论中的应用的。纳什的传记《美丽心灵》有一章就是专门写沙普利的，说他是纳什的生活导师和朋友（mentor and friend），并且是终生朋友。事实上，《美丽心灵》这本书的书名就是沙普利建议的，他告诉传记书的作者，纳什有"敏锐的、美丽的、逻辑的头脑（a keen, beautiful, logical mind）"。

斯科尔斯（Myron Scholes）因著名的布莱克 - 斯科尔斯方程于 1997 年赢得了诺贝尔经济学奖，但方程式上排名第一的布莱克在 1995 年（年仅 57 岁）就去世了，错过了诺奖；今年的经济奖颁给了发明盖尔 - 沙普利算法的已经年近 90 的沙普利，可惜同为发明者的盖尔已于 4 年前以 87 岁高龄离世，与诺奖擦肩而过。

2012年邵逸夫数学奖得主康采维奇

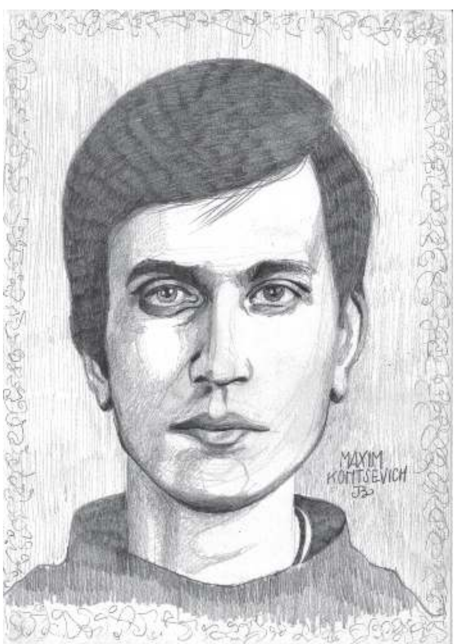
Maxim Kontsevich Laureate in Mathematical Science

Maxim Kontsevich/ 文　谢敏仪 / 译

编者按：2012年邵逸夫数学科学奖得主是马克西姆 • 康采维奇（Maxim Kontsevich），以表彰他在代数、几何和数学物理，特别是形变量子化、Motivic积分和镜像对称等方面的开创性工作。本文是他在香港领奖后的获奖感言。

近年来物理学的某些观念激发了代数和几何的深刻进展，康采维奇是这些进展的领路人。海森堡引入量子力学以来，量子化的数学过程，即从古典力学到量子力学的过程已经成为一个中心研究课题，其中关于泊松流形的形变量子化（某些特殊情形除外）是一个非常困难的问题，康采维奇使用量子场论的思想完美地解决了这一问题。他发明了一个令人惊奇的全新概念和工具——Motivic积分，并和其他数学家使用这一工具解决了代数几何中一些过去无法下手的问题（多变数的多项式方程组的解的研究）。弦理论学家发现“镜像对称”以后导致了一系列出人意料的数学预见，它断言关联到古典力学的辛几何和代数几何这两种明显不同的几何在弦理论中是互为“镜像”的。经过数学家们的努力，这些断言逐渐得以证实。现代的镜像对称是基于一些重要的洞察和进展表述的，其中大多数归功于康采维奇，从1994年最初提出同调镜像对称猜想开始，他不但重新回顾了最初的构想，而且对“什么是镜像对称”这一数学问题给出了更清晰的概念性的回答。

康采维奇1964年生于俄罗斯希姆基，1999年成为法国公民，现为法国高等科学研究所教授。他1992年获德国波恩大学博士学位，1990至1993年分别在德国马克斯普朗克研究所、美国哈佛大学及普林斯顿高等研究院等机构做访问学者，1993至1995年为美国加州大学伯克利分校教授。他曾获得1997年庞加莱奖、1998年菲尔兹奖、2008年克拉福德（Crafoord）奖等奖项。



I was born in 1964 in a suburb of Moscow, close to a big forest. My father is a well-known specialist in Korean language and history, my mother was an engineer (she is retired now), and my elder brother is a specialist in computer vision. The apartment where I grew up was very small and full of books – about half of them in Korean or Chinese.

I became interested in mathematics at age 10-11, mainly because of the influence of my brother. Several books at popular level were very inspiring. Also, my brother was subscribed to the famous monthly “Kvant” magazine containing many wonderful articles on mathematics and physics addressed to high-school kids, sometimes explaining even new results or unresolved problems. Also, I used to take part in Olympiads at various levels and was very successful.

In the Soviet Union, some schools had special classes for gifted children, with an additional four hours per week devoted to extra-curricular education (usually in mathematics or physics) taught by university students who had passed through the same system themselves. At age of 13-15 I

马克西姆•康采维奇（Maxim Kontsevich）

我 1964 年出生于莫斯科市郊，周边是一大片森林。我父亲是位著名的韩国语文及历史专家，母亲是位工程师，现在已经退休，哥哥是电脑视觉专家。我幼年时候一家人住在狭小的公寓里，家里放满了书，其中有一半是韩文或中文书籍。

我 10 到 11 岁开始对数学产生兴趣，主要是受到哥哥的影响。那时候，我看了几本对我启发很大的畅销书，也喜欢翻阅哥哥订阅的《量子》(Kvant) 月刊，当中有很多适合高中生阅读的数学和物理文章，有时会刊登最新的研究成果和有待解决的科学问题，内容非常精彩。另外，我参加过不同程度的国际数学奥林匹克竞赛，而且取得不错的成绩。

在前苏联，一些学校会为资优儿童提供增益课程，每星期花上四小时课外时间进行特别课（通常是数学和物理科），由曾经接受过一样的资优教育的大学生授课。我 13 岁到 15 岁时在莫斯科就读的学校就是这一类型的学校。1980 年至 1985 年，我在莫斯科国立大学读书，主修数学，其实大部分课堂的内容在高中时已经学过，所以我从来不上大学的正规课程，而是去参加一些面向研究生和研究人员的讲座，从中可以学到许多东西。我的指导老师是盖尔范德（Israel Gelfand），他是二十世纪最伟大的数学家之一。逢星期一他都会主持讲座，由来自苏联当地和海外的杰出数学家主讲，内容层出不穷，涵盖众多数学领域。我在如此浓厚的学术氛围

was attending such a school in Moscow, and from 1980 till 1985 was studying mathematics at Moscow State University. Because of my previous training in High School, I never attended regular courses, but instead went to several graduate and research-level seminars where I learned a huge amount of material. My tutor was Israel Gelfand, one of the greatest mathematicians of the 20th century. His weekly seminar, on Mondays, was completely unpredictable, and covered the whole spectrum of mathematics. Outstanding mathematicians, both Soviet and visitors from abroad, gave lectures. In a sense, I grew up in these seminars, and also had the great luck to witness the birth of conformal field theory and string theory in the mid-80s. The interaction with theoretical physics remains vitally important for me even now. After graduating from university, I became a researcher at the Institute for Information Transmission Problems. Simultaneously, I began to learn to play the cello and for several years enjoyed the good company of my musician friends with whom I played some obscure pieces of baroque and renaissance music.

In 1988, I went abroad for the first time, to Poland and France. Also in 1988, I wrote a short article concerning two different approaches to string theory, and maybe because of this result, was invited to visit the Max Planck Institute for Mathematics in Bonn for three months in 1990. At the end of my stay there was an annual informal meeting of mostly European mathematicians, called Arbeitstagung, where the latest hot results were presented. The opening lecture by Michael Atiyah was about a new surprising conjecture of Witten concerning matrix models and the topology of moduli spaces of algebraic curves. In two days I came up with an idea of how to relate moduli spaces but with a completely new type of matrix model, and explained it to Atiyah. People at MPIM were very impressed and invited me to come back the following year. During the next 3-4 years I was visiting mostly Bonn, and also IAS in Princeton and Harvard. My then future wife Ekaterina, whom I met in Moscow, accompanied me, and in 1993 we were married. In Bonn I finished several works which became very well-known: one on Vassiliev invariants, and another on quantum cohomology (with Yu Manin, whose seminar I had attended back in Moscow). Scientifically,

康采维奇 在 2012 年邵逸夫奖领奖台上

康采维奇（右一）

下学习，更有幸见证八十年代中期共形场论（conformal field theory）和弦理论（string theory）的诞生，这些理论与理论物理学的发展息息相关，有着划时代的重大意义。大学毕业后，我在俄罗斯信息传输研究所担任研究员。那时候，我刚开始学大提琴，我非常享受跟我的音乐家朋友们一起演奏巴洛克及文艺复兴时期的乐章，就这样渡过了几年的快乐时光。

我同时在罗格斯大学（Rutgers University）及普林斯顿高等研究院访问过好几年（我的老师盖尔范德在苏联社会经济改革之后赴美，并任教于罗格斯大学），而最近六年，我定期到迈阿密大学访问。

研究方面，我会不时转变研究主题，从费恩曼图（Feynman graphs）到抽象代数，一直到微分几何、动力系统、有限域等，不过主要研究方向还是涉及镜像对称。数学与理论物理学相辅相成，在过去二十年取得惊人的发展，不断创新突破。我有幸能够参与其中，不只是透过弦理论汲取数学的精髓，更重要的是能够回馈学术界，正如我跟长期合作研究伙伴索贝尔曼（Yan Soibelman）一同研究得出的“穿墙”（wall-crossing）公式，已经成为物理学家手中的重要工具，同时解答了有关超对称粒子的问题以及解决以渐近法解小参数方程的经典问题。

a very important moment for me was Spring 1993 when I came to the idea of homological mirror symmetry, which was an opening of a grand new perspective. In 1994, I accepted an offer from Berkeley, but one year later I moved to IHES in France, where I continue to work. In 1999 my wife and I were granted French citizenship (keeping our Russian citizenship as well), and in 2001 our son was born.

For a few years I visited simultaneously Rutgers University, where my teacher Gelfand moved to after the perestroika, and IAS in Princeton. During the last six years I have regularly visited the University of Miami.

In my work I often change subjects, moving from Feynman graphs to abstract algebra, differential geometry, dynamical systems, finite fields. Still mirror symmetry remains the major line. The interaction during the last two decades between mathematics and theoretical physics has been an amazing chain of breakthroughs. I am very happy to be a participant in this dialogue, not only absorbing mathematical ideas from string theory, but also giving something back, like a recent wall-crossing formula which I discovered with my long-term collaborator Yan Soibelman, and which became a very important tool in the hands of physicists, simultaneously answering questions concerning supersymmetric particles, and solving the classical problem about asymptotics for equations depending on small parameter.

我要我们在一起

木遥

编者按：2012 年度诺贝尔经济学奖的获得者分别是哈佛大学的埃尔文 • 罗斯（Alvin Roth）和加州大学洛杉矶分校的劳埃德 • 沙普利（Lloyd Shapley）。不过沙普利教授其实是一位数学家，在本期的人物栏目下已经介绍过他。早年沙普利和另一位名叫大卫 • 盖尔的数学家一起创立了盖尔 - 沙普利算法，这一算法是为了解决“稳定匹配难题（Stable Matching Problem）”而提出的。下面这篇文章以通俗兼演义的形式告诉我们这一理论的妙处所在。

诺贝尔奖得主纳什（左四）、沙普利（左二）于 2002 年受聘青岛大学名誉教授

张生在普救寺第一眼见到崔莺莺就陷入了不可自拔的境地。“呀！正撞着五百年前风流业冤。”于是为了搭讪，张生插科打诨无所不用其极。“月色溶溶夜，花阴寂寂春；如何临皓魄，不见月中人？”诗是好诗，可惜是隔墙念的。

崔莺莺听了只沉吟不语。然而回到家里，“神魂荡漾，情思不快，茶饭少进。”红娘瞧了暗笑：“姐姐往常不曾如此无情无绪；自见了那张生，便觉心事不宁，却是如何？”

这开头如此典型，以至于可以套在古今中外无数或真或假的八卦前面。19 岁的海涅第一眼见到 15 岁的表妹阿玛丽，就像维特见到了绿蒂，“一位天使！——没说的！谁谈起自己的意中人都这么说，不是吗？可是我却无法告诉你，她是多么完美，她为什么会那么完美；够了，她已经把我整个心都俘获了。”我不知道别人有没有产生过和我一样的疑惑，他们真的这么写情书么？收信人不觉得难受么……

还是中国人含蓄，“这个妹妹我曾见过的。”妥帖多了，但也多少有点无趣。严格说起来，贾宝玉也真的从来不曾像张生或者维特那样追过女孩子。在元宵夜宴上贾母声色俱厉地指出过张生模式的不靠谱。贾宝玉听了作何想法，我们不知道。但是我们知道的是他多少算是个被动的人，连

宝钗都算比他要勇敢些。

于是宝钗成功地和宝玉在一起了。这当然只是个和西厢记一样不靠谱的个案，但是也不是没有道理可言的。

花开两朵，各表一枝。话说在 1962 年，两个数学家大卫·盖尔（David Gale）和劳埃德·沙普利（Lloyd Shapley）提出了下面的问题：

给定若干个男生和同样多的女生，他们每个人都对所有的异性有一个心理的偏好次序。是否存在一种男女配对组合构成一种稳定的组合关系？这里稳定组合的意思是说，不存在两个非伴侣的异性对彼此的评价比对各自伴侣的评价还要高。(可以理解，那样的异性太容易红杏出墙了，所以是某种不稳定因素。) 进一步的问题是，在已知每个人对异性的偏好顺序的情况下，怎样求出这种稳定组合方式(如果它存在的话)？你可以理解为这是数学家们替月老问的问题：给定一群孤男寡女，寻找一种牵红线的方式，以确保把红杏扼杀在摇篮里。

这一问题被称为稳定婚姻问题。它有很多种可能的解法。为了让大家相信数学家不是真的如此无聊，我要指出它确确实实是一个地道的组合数学问题，有其特定的数学价值。当然啦，它也有很多别的背景和应用，比如用来在若干个公司和应聘者之间进行招聘中介……但是数学家们怎么会放过如此八卦的一个名字呢？于是它就这样流传下来了。

话说回来，有很多组合数学问题都可以如此这般地翻译为生活中的问题。比如著名的霍尔（Hall）定理：给定 n 个有限集合（其间可以有非空交集），如果其中任意 m 个集合的并集的元素个数都不小于 m，那么一定存在 n 个不同的元素，使得它们正好依次存在于这 n 个集合之中。我相信几乎没有人明白以上这是在说什么。可是它有一个很好的解释：把那 n 个集合想象成 n 个男生各自心仪的女孩子们（一般来说都不止一个），中间的那个条件是说，如果对于其中任意一部分男生，他们喜欢的女孩子的总数都不少于这组男生的人数（这个条件是必要的，否则就打起来了），那么总的说来一定存在一种办法给每个男生都分配一个女生恰好是他喜欢的。

听起来真是令人心情愉快啊……

（这个定理事实上还有很多别的解释方式，比如说，把 52 张扑克牌任意分成 13 堆，每堆 4 张牌，那么上面的定理告诉我们，一定存在一种方式从每堆牌中抽出一张来一共 13 张恰好凑成一条不一定同花的顺子。这件事情乍一听也是挺奇妙的，不过，

我们还是专注于我们的主题吧。）

回到一开始提到的稳定婚姻问题，给定每个人关于异性的偏好排序，要寻找一种男女配对组合构成稳定的组合。盖尔和沙普利不但提出了这个问题本身，而且给出了一种著名的解法。这个解法可以描述为如下的求偶过程：

首先，让这些男生去向他们最心仪的女生求婚——这是数学家们原本的用词。如果你觉得太快了的话，让我们暂时改成表白吧……

然后，等所有男生表白完毕后，所有收到表白的女生们都从自己的表白者中选择自己最喜欢的人接受为男朋友。没人表白的女生只能暂时等一等了，不要着急，表白会有的。

以上过程称为“一轮”。之后的每一轮都按照类似的方式进行。首先由还处于单身状态的男生们每个人再次向自己还没有表白过的女生中自己最喜欢的人表白（无论人家是否已经有了男朋友），然后，等所有单身男生表白完毕后，所有的收到表白女生们都从自己的表白者中选择自己最喜欢的人接受为男朋友。如果原来有男朋友而表白者中有自己更喜欢的，不要犹豫，立刻换之。等到尘埃落定之后，再开始如上所述的新的一轮表白。

依此类推。可以证明的是，这个过程一定是会终止的，也就是说，不会陷入任何死循环。并且一旦终止，每个人都会找到一个伴侣。更关键的是，这个过程最终得到的一定是如前所述的“稳定组合”：不存在两个非伴侣的异性对彼此的评价比对各自伴侣的评价还要高。——这几个事实都不难证明，有兴趣的话可以自己试试看。

所以这就得到了稳定婚姻问题的一个解（顺便也证明了解的存在性）。但是真正有趣的部分还在后面。一般来说，给定若干个男生女生和他们之间的偏好关系，稳定组合存在不止一种。上述“算法”只是给出了所有可能的稳定组合其中之一而已。但是这个特定的解具有某些特别的性质：可以证明（这一次证明不很容易了），上述方式得到的稳定组合和所有其他的可能的稳定组合相比，是对男生最优而对女生最劣的。

确切地说是这样：

它是对男生最优的。也就是说，对每个男生来说，按照这种方式最后找到的伴侣，是在所有的稳定组合中自己可能具有的伴侣中自己评价最高的。——注意这并不等于说每个男生都能追到自己最喜欢的女生，而只是说，他一定能追到“有可能

和他在稳定组合中在一起的女生”中自己最喜欢的。有些女生虽然很好，但是和他在一起是不可能形成稳定组合的。这就是人生啊……

另一方面，它是对女生最劣的。也就是说，对每个女生来说，按照这种方式最后找到的伴侣是在所有的稳定组合中自己可能具有的伴侣中自己评价最低的。同样的，这也不等于说每个女生都只有和自己最不喜欢的男生在一起，而只是说她最后的男朋友会是所有“有可能”的男生中自己觉得最勉强的。不过这样听起来也已经很悲惨了。

这两个结论并不直观，因为看起来在上面所描述的过程中，女生是相对占有优势的。作为男生，需要很辛苦地去不断表白，然后被拒，再表白，再被拒……而女生只要随心所欲挑选就好，而且还有随时更换男友的权利（在上面的规则里男生是不能主动提出分手的）。为什么结局会是如此？

但是如果仔细思考上面所描述的规则，会看到男生至少有一样优势——也许是至关重要的优势：他们是主动方。主动的好处是，即使一次又一次的被拒，他也仍然可以和剩下的女生中自己最喜欢的在一起。而对于女生来说，纵然有再多挑选的自由，可是一个女生也许永远也等不到自己最喜欢的男生来追自己——或者在她等到之前，游戏就已经结束了。

毫无疑问，你已经看出在上面的设定里“男生”和“女生”都只是代号而已，它符合古典文学的一贯叙事，但是在当代语境里也许并不完全正确。另一方面，这个定理也不是真的用来描述爱情的——数学家们还没有这么疯狂，认为可以用逻辑来推理情感。它只是一个过于简化的模型而已，比张生和维特的故事还要不靠谱的多。

但是我也相信你一定已经看出了我这篇文章的主题。在一切古典文学的叙事里，我们都满怀着希望注视着那些勇敢的孩子们，看着他们的努力和坚持，也许最后会失败，可是他们至少尝试过。

现在连数学也在帮着说明这个道理了，你还等什么呢？

原文链接：http://songshuhui.net/archives/9259

筹建“趣味数学”版块

万精油

《科学的美国人》杂志有一个专栏叫“趣味数学”（Entertaining Mathematics），这个专栏是由著名趣味数学家马丁•嘉德纳（Martin Gardner）创办的。嘉德纳为这个专栏写了二十多年，给《科学的美国人》带来很多读者。不少后来成名的数学家都说，他们开始就是受嘉德纳的影响而走上数学之路的。

《数学文化》杂志也可以有这么一个专栏。我们可以像嘉德纳那样以趣味数学问题为话题，介绍各种不同的数学领域、数学知识和数学文化。事实上，有好些有趣的数学文化知识都是通过嘉德纳的专栏走向世界的，比如康威（John Conway）的生命游戏，李维斯特（Ronald Rivest）的 RSA 公开密码等等。关于嘉德纳的更多故事，可参见我在《数学文化》杂志的另一篇文章《游戏人生》。

要开趣味数学问题专栏，我们就先来聊一聊什么是趣味数学问题。

黎曼猜想有没有趣，当然有趣。对有些人来说这是世界上最有趣的数学问题。但这是数学研究前沿的问题，许多数学家穷其一生尚且不能解决，对一般人来说它的趣味性就大打折扣。所以这种研究前沿或公开问题不在我们所说的趣闻问题范围内。

鸡兔同笼数头数脚的问题有没有趣，对小学生来说这是很有趣的问题，但对于学过代数方程的人来说就没有什么趣味了。所以这种过于初等的问题也不在我们所说的趣闻问题范围内。

一道题的趣味性因人而异，我们可以把趣味问题分为许多等级。不同级别的题目适合于不同的对象 。《数学文化》的读者大都有一定的数学基础，所以我们的趣味问题专栏应该有相对高级一点的题目。先来说一说题目的等级分类。

分牛或数鸡兔腿这类可以用中学代数解决的问题可以算是一类。这类题可以用来考小学生，因为他们没有学过线性代数，解起来很有趣，也有一定的启发作用。

对高中生来说上面的那些问题就太简单了。对付高中生要用微积分或复变函数。比如有这么一道题：一个矩形被分为许多大小不等的小矩形（就象一张建筑图），如果已知每个小矩形至少有一边边长为整数，则可推出原来的大矩形也至少有一边边长为整数。这个题如果用高等数学来做也就两行字。如果用普通语言来解，两页纸恐怕也不够。但不管多少页，如果能用普通语言说清楚也是很有趣的事。

对付学过高等数学的大学生，可以有更高一级的题。背景知识或许是泛函分析或微分拓扑之类的。比如：墙上贴一张中国地图，如果有人在这地图上再贴一张小的中

国地图，歪歪斜斜也没有关系，只要小地图完全落在大地图内，则可证明大小地图上必然有一点重合。也就是说一个图钉从这一点按下去，大小地图上都是同一点（比如说北京天安门）。这道题如果用泛函分析来做，也就是一行字。如果用普通语言来做大约要满满一页。

这些题的趣味性也就在此。包含较深的数学道理，却可以用普通语言来解释清楚。一个题目如果必须要用高深的数学语言来解，那它只能算是一道数学课的作业题，不能算是趣味问题。所谓趣味问题就是需要动脑筋但不一定必须用高深的知识来解决的题目。

当然，对有些人来说很高深的知识，对另一些人来说却算基本常识。我认识的一位俄国教授就一贯把研究生以下的数学称为幼儿园数学。他的口头习惯用语是："This can be done with kindergarten arithmetic"。三十年前我在中科院数学所读研究生，在数学所听的第一个讲演就是"魔方中的数学问题"。演讲者自然是把群论、不动点之类的知识当作基本常识的了。著名天才物理学家朗道小时候是一个神童，他的一句很著名的话是："记不得不懂微积分的时候了。"

还有一类题是几乎什么知识都不要，但却相当费脑筋，有点象围棋的死活题。当然，这类题也有难易之分。难的题可以难你几天、几月甚至几年，比如著名的十五个学生分组问题（Kirkman's schoolgirl problem）。容易点的也可以让你费上几小时脑筋，比如大家都知道的乒乓球问题。十二个乒乓球中有一个次品，其重量不等于标准重量。现在给你一台天平称。让你在三次之内找出次品，并指出这次品比标准球轻还是重。这样的题目动脑筋却不需要什么知识，很受欢迎。

顺便说一句，上面提到的乒乓球找次品的问题还可以进一步推广。当乒乓球数为 $(3^n-3)/2$ 时，要求在 n 次内称出次品球。对这个一般问题如果还是像球数等于 12 那样硬凑解，那就比较困难了。我们需要有一般解法，抽象的数学语言和思维这时就派上了用场。这种题目就很适合我们这个专栏，因为我们可以用它借题发挥，写出一篇有趣的数学文化文章。

事实上，这就是我们这个专栏所希望采取的形式。每期给一个趣味题目。下一期的文章是上期题目的解以及围绕这个题目的相关数学领域的知识和文化介绍。作为开场，我们先来一道经典的题目。这个题目的特例情况相信绝大多数人都见过。我们希望的是找出推广以后的一般解。

特例题目：一个能装 14 两酒的容器装满了酒。另有两个容器，一个能装 11 两，一个能装 5 两。这些容器都没有刻度，现要求你用这三个容器把酒分成均等两份。

推广题目：一个能装 X 两酒的容器装满了酒。另有两个容器，一个能装 Y 两，一个能装 Z 两。$X > Y > Z$。这些容器都没有刻度，现要求你给出一个通用步骤，使得对于任意的 X，Y，Z 都能用这个步骤决定是否能用这三个容器把酒分成均等两份。如果有解，找出相应步骤。

作者本人将主持一个网上趣味数学栏目：在 http://www.mysanco.com/wenda 里面，大家可以在上面讨论我出的趣味数学题，也可以出你认为好的趣味数学题。我会经常整理，把一些好题目整理出来放到《数学文化》的"趣味数学"版块里。

作者简介：万精油，本科毕业于四川大学数学系。中国科学院数学研究所硕士，美国马里兰大学数学博士。业余时间爱好写作。以杂文、记事为主，科普为辅，偶尔也写小说。代表作为科幻小说《墨绿》。因为兴趣广泛，起笔名为万精油。

千年书院中数学文化的播种者 —— 李冶

纪念中国古代数学家李冶诞辰820周年

刘鹏飞

楔 子

2011年10月，恰逢赴河北师范大学参加由中国数学会、国家自然科学基金委天元基金主办的首届“全国数学文化”论坛，参会临行前就决定前往有“北岳之英”美誉的封龙山，参观我国历史上唯一以数学文化闻名的封龙书院，并拜谒位于封龙山上的我国金元时期著名数学家李冶先生之墓，凭吊一位在千年书院中传播数学文化的先贤。为缅怀李冶先生，提前做了些功课，第一次较为认真地浏览了多年来国内外学者对李冶及其著作、思想的研究，着实受益匪浅、收获良多，尤坚前往封龙山追忆先人的决心。拜谒后敬仰之心更甚，顿生抚今追思之意，遂成此文，与君分享！

主席台从左至右：邓明立、顾沛、项武义、严加安、冯克勤、蒋春澜

一、生逢乱世、潜心学问

李冶（1192-1279），字仁卿，号敬斋，真定府栾城（今河北栾城）人。关于他的名字是叫李冶还是李治历来是有争论的，清代道光年间研究《金史》的专家施国祁（号北研，1750-1824）先生在文章《跋敬斋古今》中指出："……呜呼！其学术如是，其操履又如是，何后人不察，谬改其名，呼'治'为'冶'，……"提出要为"李治"正名，引发学者们对其名字是"李冶"还是"李治"的争论。

缪荃荪（字炎之，别字筱珊，1844-1919）支持施氏之观点。柯劭忞（字凤荪，1848-1933）《新元史》中谓李冶本名治，后改李冶。但也有学者如陈叔陶（1913-1968）认为"李冶"是对的，"李冶"固"李冶"也[1]。缪钺（字彦威，1904-1995）则认同原名"李治"并指出改名的原因可能是避讳与唐高宗同名[2]。近来也有学者认为使用"李冶"一名是为了避难、隐居需要所致，也可能与流经他家乡的大河"冶河"有关[3]。

著名数学史家李俨（字乐知，1892-1963）先生、钱宝琮（字琢如，1892-1974）先生以及著名数学教育家傅种孙（字仲嘉，1898-1962）先生在考证的基础上均认为"李治"是其原名，李俨先生的《中国算学史》专门列有"金李治传"一条[4]。程廷熙先生认为可写为"李冶（原名治）或李冶（更名冶）"[5]。因此，今天数学史著作中多为"李冶，原名李治"的提法。

李冶于金明昌三年（1192年）生于大兴（今北京大兴），可谓生逢乱世，金朝奸臣得势，忠臣受贬，整个皇朝正由盛至衰。但并未影响李冶求学历程，他与元好问（字裕之，号遗山，1190-1257）外出求学，拜文学家赵秉文（字周臣，1159-1232）和杨文献（字正卿，1197-1269）为师，不久就名声大振，与赵、杨齐名。金正大七年（1230年），李冶被录取为辞赋科进士，同年得高陵（今陕西高陵）主簿官职，但蒙古窝阔台（1186-1241）军已攻入陕西，所以没能上任。接着又被调往阳翟附近的钧州（今河南禹州市）任知事。金开兴元年（1232年）蒙古军队攻破钧州。李冶不愿投降，走上漫长而艰苦的流亡之路。

李冶北渡黄河后流落于山西的忻县、崞县（今山西宁武、原平）之间，过着"饥寒不能自存"的生活．一年以后（1233年），汴京（今河南开封）陷落，元好问也弃官出京到山西避难。1234年初，金朝终于为蒙古所灭，李冶与元好问都感到政事已无可为，于是潜心学问。李冶经过一段时间的颠沛流离之后，定居于崞县的桐川，已年过四十的李冶开始艰苦的学术研究之路。正所谓"隐身免留千载笑，成书还待十年闲"，1248年，李冶写成他的代数学千古名著《测圆海镜》。

李冶画像（侯幼珍 作） 图片来源：孔国平，《李冶传》卷首

李冶虽然生逢乱世，但在这种极为艰苦的条件下仍进行科学研究。他在桐川著书时，"聚书环堵，人所不堪"，但却"处之裕如也"。居室十分狭小，甚至常常不得温饱，要为衣食而奔波。但他却以著书为乐，从不间断自己的研究工作。他的学生焦养直（字无咎，1238-1310）曾说他"虽饥寒不能自存，亦不恤也"，在"流离顿挫"中"亦未尝一日废其业"，"手不停披，口不绝诵，如是者几五十年"。他的朋友砚坚（字伯固，1211-1289）说他："世间书凡所经见，靡不洞究，至于薄物细故，亦不遗焉"。虽然"饥寒不能自存"，但仍然痴心的研究数学。因为在李冶看来，学问比财富更可贵。他说："积财千万，不如薄技在身"，"金璧虽重宝，费用难贮蓄。学问藏之身，身在即有余"。另外，他的治学方法也值得称道，据记载，有人问学于李冶，他答曰："学有三，积之之多不若取之之精，取之之精不若得之之深"，可见李冶善于去粗取精，批判地接受前人的知识。

李冶虽是词赋科进士，但他认识到数学的重要性，在

[1] 陈叔陶．李冶李治辩．史学集刊,1937,(3):155-164.
[2] 缪钺．李冶李治释疑．东方杂志,1943,39(16):41-42.
[3] 杜宏权,赵平分．李冶李治辩．哈尔滨学院学报,2003, 24(5):87-90.
[4] 李俨．中国算学史．商务印书馆,1998:108.
[5] 程廷熙．随録：李治、李冶．数学通报,1953,(6):48.

《益古演段》自序中写道“术数虽居六艺之末，而施人之事，则最为切务”。长期以来，儒家传统认为读书人就该皓首穷经，算学并不是什么专门学问。北齐颜之推（字介，531-595）在《颜氏家训》中就说“算术亦是六艺要事，自古儒士论天道，定律历者，皆学通之。然可以兼明，不可以专业”[6]。

两宋盛行的程朱理学，甚至把算学说成是“九九贱技”，研究科技也被看作“玩物丧志”。李冶毫不客气地批评了这种错误观点，指出在朱熹（字元晦，号晦庵，1130-1200）的著述中“窒碍之处亦不可以毛举也”，用“技兼于事”、“技进乎道”的思想，批驳理学家的观点。他说：“由技兼于事者言之，夷之礼，夔之乐，亦不免为一技；由技进乎道者言之，石之斤，扁之轮，非圣人之所与乎？”（夷，黄帝臣名；夔，舜臣名；石、扁，均为古工匠名）这就是说，从技艺用于实际来说，圣人所作的礼和乐也可看作一种技艺。从技艺中包含自然规律（即“道”）来说，工匠使用的工具也是圣人所赞赏的。

如果我们把李冶的话同庄子所说的“道者，万物之所由也。……道之所在，圣人尊之”联系起来，李冶受庄子思想的影响是一目了然的。他认为数学这种技艺也是“道之所在”，也应受到尊重[7]。虽然数学作为一种技艺不受儒家文化主流所重视，但李冶坚持认为“小数之假所以为大道所归”，也就是说“道”既来源于“小数”（技艺），又借“小数”而体现。在《益古演段》序中说：“安知轩隶之秘不于是乎始？”（谁知道轩辕隶首得道的秘诀不是始于数学呢？）通过对数学这种“小数”的追求也可以达到“技进乎道”的境界。

在《测圆海镜序》中说：“览吾之编，察吾苦心，其悯我者当百数，其笑我者当千数。乃若吾之所得则自得焉耳，宁复为人悯笑计哉？”可见，即使是其悯我者当百数，而笑我者当千数，他仍然坚持继续研究数学[8]。

二、隐而不仕、讲学封龙

1251年，经济状况好转的李冶结束了山西的避难生活，回到少年求学时的元氏县封龙山定居，开始了隐士般的生活。对这种隐居生活，李冶曾在《敬斋古今黈（音tǒu）》中说：“必也身有其德而退藏于密，始得谓之隐者也。彼无一德之可取而徒蹙于寒乡冻谷之中，是则素隐者耳”[9]。他除了在封龙山下购置了一些田产以维持生活之外，开始收徒讲学，从事数学教育活动。后来李冶的学生越来越多，家里逐渐容纳不下，于是师生共同努力，在北宋李昉（字明远，925-996）读书堂故基上建起封龙书院。他呕心沥血，培养出大批人才，并常在工作之余与元好问、张德辉（字耀卿，号颐斋，1195-1275）一起游封龙山，被称为“龙山三老”。

1257年，忽必烈（1215-1294）听说李冶后派董文用（字彦材，1223-1297）专程到封龙山请李冶，在王庭问对中当面向其请教“天下当如何而治”。李冶答曰：“夫治天下，难则难于登天，易则易于反掌。盖有法度则治，控名责实则治，进君子退小人则治，如是而治天下，岂不易于反掌乎？无法度则乱，有名无实则乱，进小人退君子则乱，如是而治天下，岂不难于登天乎？”李冶会见忽必烈后，又回到封龙山，继续讲学著书。

1259年，他写成了另外一部推广和普及天元术的数学名著《益古演段》。1260年忽必烈继位，邀请李冶出任翰林学士，李冶以老病为辞，婉言谢绝。当时忽必烈初登大统，他的弟弟阿里不哥（1219-1266）不服他，起兵反抗，元朝陷入连年内战。李冶是不会在这种局势动荡情况下为官的，正如他所言“世道相违，则君子隐而不仕”，“盖有大智不得大用，故羞耻不出，宁与市人木石为伍也”。

1265年，朝廷又征召李冶为翰林学士，时年七十三岁的李冶，见忽必烈反复热情邀请，于是终于应邀出山，到北京的翰林院任职。可以想象，一个数学家到了翰林院能有什么可干，这份工作实在不适合李冶其人，况且李冶是个追求思想自由的人，尤其不愿在学术上唯命是从。无奈就职一个月后，李冶认为翰林院里自己不能畅所欲言，“翰林视草，唯天子命之；史馆秉笔，以宰相监之。特书佐之流，有司之事，非作者所敢自专而非非是是也。今者犹以翰林、史馆为高选，是工谀誉而善缘饰者为高选也，吾恐识者羞之”，于是他再次以老病为由辞去翰林学士职务，回到封龙山继续过着“木石与居，麋鹿与游”的田园生活。

李冶离开北京回封龙山，他的朋友诗人耶律铸（字成仲，1221-1285）有赠别的诗一首“一代文章老，素车归故山。露浓山月净，荷老野塘寒。茅屋已知足，布衣甘分闲。世人学不得，须信古今难”。虽然李冶隐士的道路实属不得已，但在他看来，真正的隐士也是君子，他以此为豪：“君子之道，或出或处，然则必有道而不肯以轻出者，谓之处士可也。中无所有而尸处士之名者，素隐而行怪者也。”他的隐居生活也并非消极避世，而是积极地投入到著书、讲学活动中。或许李冶认为，从事数学研究和教育活动可以

[6] 颜之推．颜氏家训．中华书局,2007:320.

[7] 孔国平．李冶．见吴文俊主编．世界著名数学家传记（上集）．科学出版社,2003: 319.

[8] 杜石然．数学·历史·社会．辽宁教育出版社,2003: 495.

[9] 梅荣照．李冶及其数学著作．见《宋元数学史论文集》．科学出版社,1966: 106.

让自己远离政治[10]。

书院是我国封建社会一种特殊的教育场所，在中国教育史上有着特殊的地位，但每每提到书院教育，人们常想起白鹿洞、岳麓、嵩阳、应天等四大书院。其实，封龙书院的地位，决不逊于四大书院。从创建年代来看，除了白鹿洞书院始创于唐代之外，岳麓、嵩山和应天书院都始创于宋代，而封龙山上的书院早在东汉就成为重要的教育场所。据《后汉书》中的伏恭（字叔齐，5-84）传记载，伏恭“迁常山太守，敦修学校，教授不辍，并注解《齐诗》”。同一时期，汉明帝刘庄（字子丽，28-75）的启蒙老师李躬在封龙山下龙山书院结庐授业，誉名“常山三老”[11]。书院有庙宇式讲堂、天然读书窑洞等，院内尚有清泉两眼，一曰蒙泉，水清且甜，是书院饮炊之水源。另一曰墨池，又称洗笔池，池水墨黑如漆，相传为莘莘学子洗笔之处。至唐代，又有郭震（字元振，656-713）等名流韵士游学或在此讲学立说，并题壁崖刻。

之后北宋名相李昉又投重资重新筹建了书院内部教学一应设施，正式命名为封龙书院。不久，李昉又在封龙山北坡创建了中溪书院。时隔两年，著名学者张著（字仲明，1221-1292）凭封龙福脉，借龙山灵气，择址峰西，创建了西溪书院。至此，封龙山三大书院步入全盛时期，并遥相呼应，教学相长，与保定的莲池书院统称为江北四大书院，与当时饮誉江南的四大书院竞相媲美。李昉是中国古代著名典籍《太平御览》和《太平广记》的总编纂，李昉之于封龙书院和朱熹之于白鹿洞书院，具有同样显赫的地位。而李昉在北宋政坛上的地位，却是朱熹所不可比拟的。

至金元时期，几经颓废的封龙书院又迎来了勃勃生机。李冶买田封龙山下，艰辛置业，重振封龙书院，聚徒授学，不多时便名流云集，海内景望。“教化大行，一时风气，为之转移”。封龙书院成为李冶后半生从事数学研究和数学教育活动的主要场所，李冶主持书院期间，与他被称为“龙山三老”的元好问、张德辉等著名学者都经常到此讲学。元曲名家白朴（字仁甫，1226-1306）、李文蔚（？ -1251）等真定名士都曾随学于山中。元朝名将史天泽（字润甫，1202-1275）的四子史杠（字柔明，1237-1315）、五子史杞（字子秀，1238-？），集贤学士焦养直、翰林修撰王德渊、宣抚崔莱等名人都曾就学于此。封龙书院也因李冶而声名大振，李冶越来越受到大家的尊重。

1265 年，山西平定建起“四贤堂”，内置赵秉文、杨文献、元好问、李冶四公画像，发人深思的是，当时四人当中只有李冶一人还健在[12]。1279 年，李冶卒于家中，享年 88 岁，谥号文正。自宋以来，“文正”就成为文臣的最高谥号。历史上得享此谥号者寥寥无几，宋代仅有范仲淹（字希文，989-1052）、司马光（字君实，1019-1086）等八九人，巧合的是早于李冶执掌封龙书院的宋代李昉死后也是谥号“文正”，可见大家对李冶评价之高。

李冶逝世后，就被葬在了封龙山上。人们建李学士祠堂来纪念他，“真定之学者升公之堂，拜公之像，未尝不肃容以增远想也。”至治元年（1321 年）重修封龙书院，元代著名学者袁桷（字伯长，号清容居士，1266-1327）在封龙山书院重修记中曰：“李氏世守家法，则书院永永，代有嘉誉。”继李冶之后，藁城籍学者安熙（字敬仲，号默庵，1269-1311）主持封龙书院，以“弟子去来，常至百人”，“四方来者，多所成就”蜚声江北江南。著名文学家苏天爵（字伯修，1294-1352）就是安熙的门生。

至明清，私学不显，此地学术式微，如明朝的乔宇（字希大，号白岩，1457-1534）游封龙山诗所云：“可怜书院无山长，半是黄冠半纳衣”。明嘉靖十八年（1539 年）魏谦吉（字子惠，号槐川，1509-1560）等出资修整封龙书院，聚徒讲学。康熙年间栾城人民仿封龙书院在城内建龙冈书院，并尊李冶为“先达”。乾隆和道光年间，书院曾两次重修。光绪年间，学院濒于颓废，讲堂、圣像藏室等建筑，先后遭到毁坏。封龙书院因为李冶的影响而在我国书院史中，成为唯一以研究数学而见长的书院，以数学成就赢得了世人的关注，封龙书院具有重要的数学文化价值。

在中国几千年的文化传统中，算学始终被认为“六艺之末”而不能进入中华主流文化层面，数学家也未能像古希腊数学家那样多为哲学家、思想家而居于社会主流地位，中国古代数学研究者也大多为术士、匠人，处于中国传统主流文化核心的士大夫群体均视算学为“九九贱技”而不耻为之。朱熹更以为：“且如今为此学而不穷天理，明人伦，讲圣言，通事故，乃兀然存心于一草木一器用之间，此是何学问？”修身、齐家、治国、平天下才是最重要、最根本的学问。李冶也是被这种观念束缚、徘徊直至中年以后才冲破传统观念的藩篱，最终选择数学作为主要研究方向，走上从通儒转变为数学家的道路，这在当时是离经叛道的，可见李冶坚定数学专业研究的决心。

[10] 蔡天新 . 数学与人类文明 . 浙江大学出版社 ,2008: 74.

[11] “常山”指的是“常山郡”，元氏县有古城。“三老”是汉代一种制度，各级“三老”的职务是掌教化。李躬，元氏人（常山郡），被汉明帝封为“国三老”。但李躬在历史上没能留下传记，据《元氏县志》记述中，李氏家族在元氏历史上有着辉煌一页，到底为什么没有李躬这么重要历史人物的传记，史学家争论不一，实在是一大遗憾。

[12] 孔国平 . 李冶传 . 河北教育出版社 ,1988: 28.

三、海镜宝书、演段益古

李冶一生著述颇丰，著书有《测圆海镜》十二卷、《益古演段》三卷，以及《敬斋古今黈》四十卷、《泛说》四十卷、《壁书丛削》十二卷等。其中《测圆海镜》与《益古演段》对于我国古代代数方法“天元术”有重要贡献，这两部著作一直流传到现在，是我国古代数学的宝贵遗产。可惜其他著作除了《敬斋古今黈》十二卷本流传下来外，皆已失传。

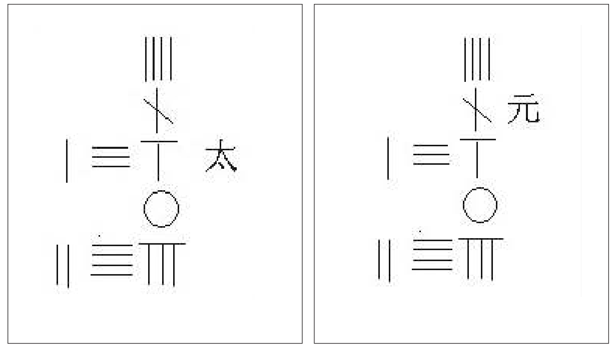
虽然，李冶生平有不少文史著作，但临死前却对儿子说：“吾生平著述，死后可尽燔去，独《测圆海镜》一书，虽九九小数，吾常精思致力焉后世必有知者。庶可不广垂永乎？”[13] 可见李冶对该书的重视。或许也正是因此原因才使得该书能得以流传、保存至今。

在古代中国，列方程的思想可追溯到汉代的《九章算术》，该书中用文字叙述的方法建立了二次方程，但没有明确的未知数概念。随着数学问题的日益复杂，迫切需要一种普遍的建立方程的方法，天元术便应运而生。天元术最早出现的时间史学家也有异议，钱宝琮先生认为在 12 世纪末，李迪先生认为 13 世纪初流行于金代。孔国平先生认为 11 世纪就已出现。

但在李冶之前，天元术还是比较幼稚的，记号混乱、复杂，演算繁琐。据祖颐《四元玉鉴》后序中说，金元之际研究天元术的数学著作除了李冶外，还有蒋周的《益古》，李文一的《照胆》，石信道的《钤经》，刘汝锴的《如积释锁》等著述[14]，但这些著作都已失传，只有李冶的流传下来，或许与李冶著作的深入浅出、晓然示人有关，对于中国传统算学的传承、发展贡献巨大。也使得《测圆海镜》成为我国现存最早的一部以天元术为主要内容的著作。书中的天元术达到相当完善的程度，堪称世界上第一流的数学著作，但在当时的中国却没有引起重视[15]。

宋代以前，方程理论一直受几何思维束缚，如常数项只能为正，因为常数项通常是表示面积、体积等几何量的。方程次数不高于三次，因为高于三次的方程就难于找到几何解释了。天元术的产生，标志着方程理论有了独立于几何的倾向。李冶对天元术的总结与提高，则使方程理论基本上摆脱了几何思维的束缚，实现了程序化。李冶认识到代数计算可以不依赖于几何，方程的二次项不一定表示面积，三次项也不一定表示体积[16]。

“天元术”其法是先“立天元一”表示所求的未知数，“立天元一为某某”就相当于我们今天的“设 x 为某某”的意思。再依据问题所给的数据条件立两个数量相等的多项式，然后相减并合并同类项，于是便构成了一个一端为零的方程。这种作法，与现在列方程的步骤完全一样。天元术中在常数项的旁边记一个“太”字，或在一次项旁边记一个“元”字来表达多项式或方程。例如，方程：$4x^2 - x+136 - 248x^{-2} = 0$ 可表示为如下图两种情形。[17]

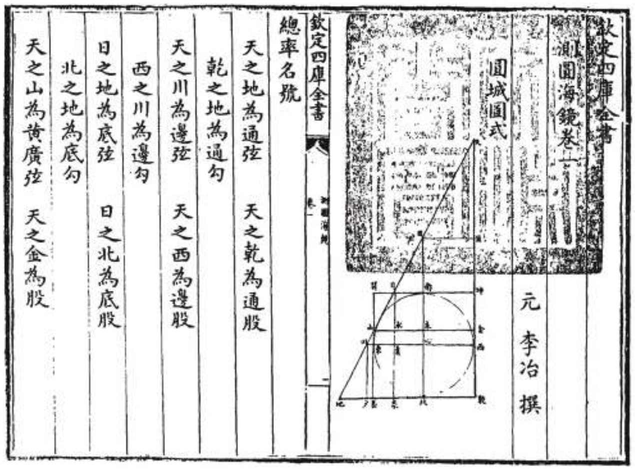


李冶的《测圆海镜》把勾股容圆（切圆）问题作为一个系统来研究，讨论了在各种条件下用天元术求圆径的问题。卷一的“圆城图式”是全书出发点，书中 170 题都和这一图式有关。李冶的《测圆海镜》是依据“洞渊”九容之说编撰的，“余自幼喜算数，恒病夫考圆之术，……，老大以来，得洞渊九容之说，日夕玩绎，而响之病我者，使爆然落去而无遗余。山中多暇，客有从余求其说者，于是乎又为衍之，遂累一百七十问。”[18]

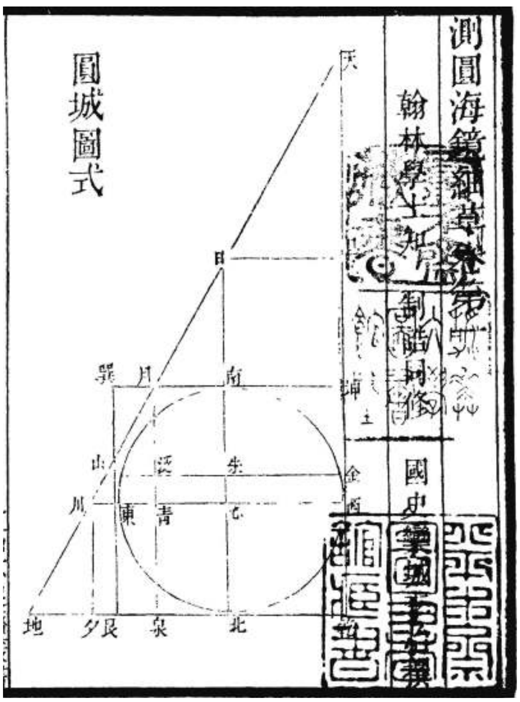
《测圆海镜》是我国现存最早的一部天元术著作，而且在体例上也有创新。孔国平先生认为《测圆海镜》全书基本上是一个演绎体系[19]，卷一包含了解题所需的定义、定理、公式，后面各卷问题的解法均可在此基础上以天元术为工具推导出来。李冶之前的算书，一般采取问题集的形式，各章（卷）内容大体上平列。李冶以演绎法著书，这是中国数学史上的一个进步。莫绍揆（1917-2011）先生也指出在卷一“识别杂记”里面有完整的定义，归结出合适的公理，推导出丰富多彩的定理，它已建立了一个很好的公理系统，为我国开创了一条公理推演的新路，因而是一篇价值非凡的作品[20]。

《测圆海镜》的成书标志着天元术的成熟，对后世有深远的影响。元代王恂（字敬甫，1235-1281）、郭守敬（字若思，1231-1316）在编《授时历》的过程中，曾用天元

[13] 郭金彬，孔国平．中国传统数学思想史．科学出版社 ,2004: 197.
[14] 周翰光．论李冶的科学思想．吴文俊主编．中国数学史论文集（三）．山东教育出版社 ,1987: 80.
[15] 孔国平．李冶传．河北教育出版社 ,1988: 19.
[16] 孔国平．测圆海镜导读．湖北教育出版社 ,1996: 19-20.
[17] 郭金彬，李赞和．中国数学源流．福建教育出版社 ,1990: 157.
[18] 白尚恕．《测圆海镜》今译．山东教育出版社 ,1985:2-3.
[19] 孔国平．《测圆海镜》的构造性．自然科学史研究 ,1994,13(1):10-17.
[20] 莫绍揆．对李冶《测圆海镜》的新认识．自然科学史研究 ,1995,14(1): 22-36.

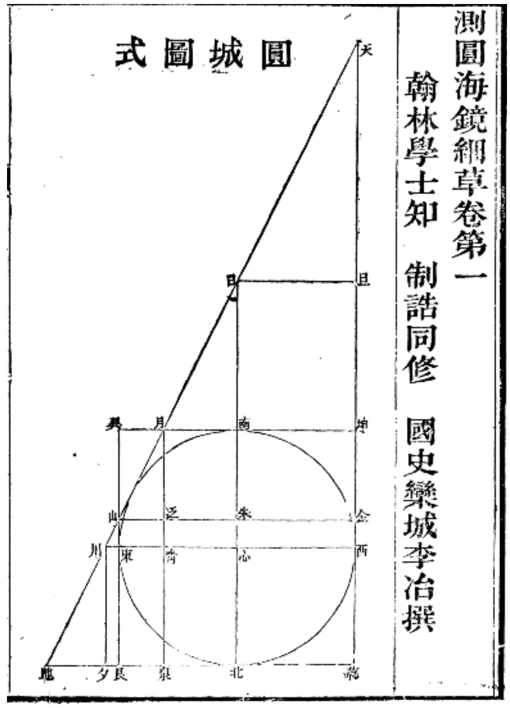


文渊阁四库全书《测圆海镜细草》卷一



知不足斋丛书本《测圆海镜细草》卷一

术求周天弧度。不久，沙克什（1278-1351）在《河防通议》中用天元术解决水利工程中的问题，瞻思（1278-1351）利用天元术计算工程土方，都收到良好的应用效果。



白芙堂算学丛书《测圆海镜细草》卷一

元代大数学家朱世杰（字汉卿，号松庭，1249-1314）评价说:“以天元演之、明源活法，省功数倍。”清代阮元（字伯元，1764-1849）评价说：“立天元者，自古算家之秘术；而海镜者，中土数学之宝书也。”

李冶的另一项重要的数学成就就是《益古演段》，是李冶在研究了蒋周（北宋）的《益古集》之后写出的又一部天元术著作，也是一本推广天元术的数学教材。益古无疑是取自《益古集》，至于“演段”的意思，李锐做过解释:“所谓演者，演立天元；段者，以条段求之也。”也就是说，演段包括两种建立方程的方法：一是用天元术推演方程，二是以条段法求得方程。条段法的基础是出入相补原理，实际上就是一种图解法，其渊源可以追溯到刘徽和赵爽。在宋初期刘益的《议古根源》中已经非常熟练运用，到蒋周《益古集》已经非常完善，只不过在蒋周那里还未能抽象出“天元一”的特定概念，还未能摆脱几何思维[21]。

《益古演段》全书共三卷六十四个问题，处理的主要是方、圆组合的平面图形的面积问题，所求多为圆径、方边、围长之类。除四道题是一次方程外，全是二次方程问题，内容安排基本上是从易到难[22]。《测圆海镜》虽然是一部高水平的著作，但由于内容较深，粗知数学的人看不懂。并且，当时“天元术”传播速度比较慢。李冶清楚看到这些，他坚信“天元术”是解决数学问题的一个有力工具，同时深刻认识到普及“天元术”的必要性，写《益古演段》的

[21] 孔国平 . 对李冶《益古演段》的研究 . 吴文俊主编 . 中国数学史论文集（三）. 山东教育出版社 ,1987: 58-72.

[22] 孔国平 . 金元之际的著名学者——李冶 . 自然辩证法通讯 ,1986(5):66.

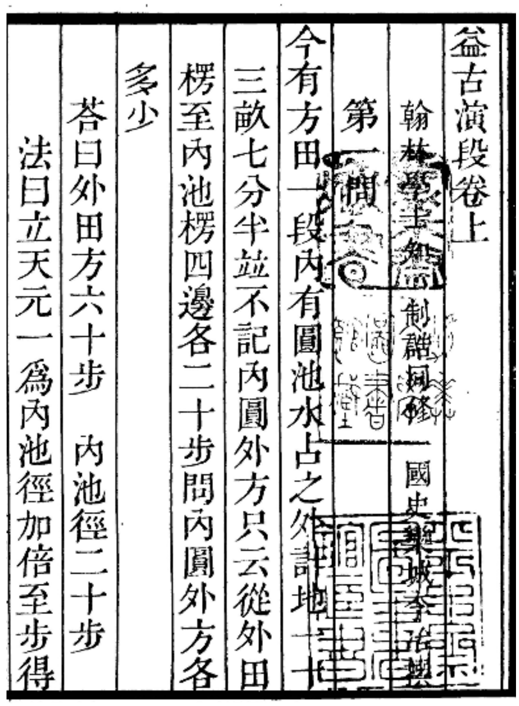
目的就是“使粗知十百者，便得入室啖其文，顾不快哉！”通过新旧二术的并列，李冶让人们看到“条段法”比较直观，但复杂多变，需要较多技巧。“天元术”比较抽象，但方法是一般的，思维过程简单。

《益古演段》的成书，为天元术的应用开辟了更为广阔的道路。砚坚在《益古演段》序中称赞此书说：“说之详，非若溟涬黯黮之不可晓；析之明，非若浅近粗俗之无足观……颇晓十百，披而览之，如登坦途，前无滞碍。旁溪曲径，自可纵横而通……真学者之指南也。”李冶主张数学教育要晓然示人，在《益古演段》序中说：“今之算者，未必有刘（徽）李（淳风）之工，而编心跟见，不肯晓然示人，唯务隐互错揉故为溪滓黯哭，唯恐学者得窥其仿佛也。”《益古演段》对完成从条段法到天元术的过渡有着重要的意义，这也是李冶的苦心所在。《测圆海镜》是天元术的代表作，而《益古演段》则是普及天元术的杰作。两书相辅相成，互为表里，反映了作者既努力提高数学的一般化程度，又注意发挥其社会效益的精神。二者都是我国十三世纪时期的优秀数学著作，是中国古代数学的宝贵遗产。

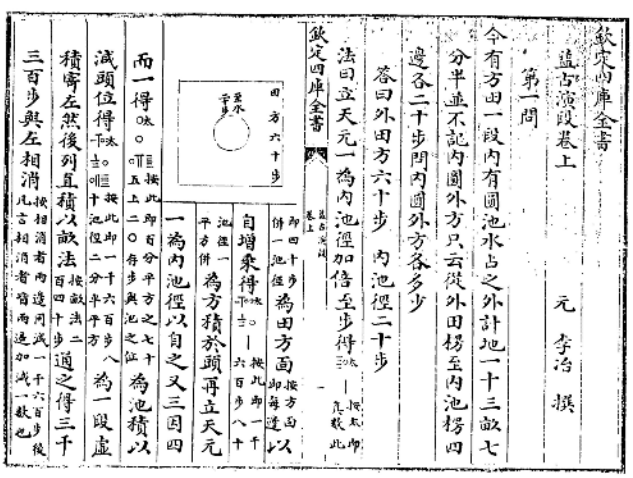
李冶死后不久，天元术理论便经过二元术、三元术，迅速发展为朱世杰的四元术。如果说在李冶手中，天元术已成为参天大树，那么在李冶之后，这棵大树便在元代第二代数学家的培育下，结出了四元术的累累硕果。

四、经为通儒、文为名家

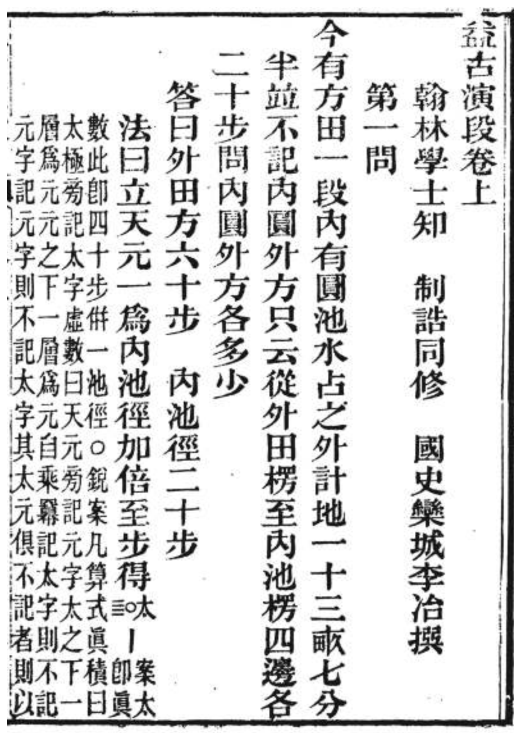
童年时代的李冶即天资聪慧、喜爱读书，“公幼读书，手不释卷，性颖悟，有成人之风”。在文学方面的天赋很早就流露出来，据说他的老师李纯甫（字之纯，号屏山居士，1177-1231）先生请他代写几篇墓志铭，李冶一个晚上挥笔立就，使屏山先生大为赏异，并赠诗曰：“仁卿不是人间物，


益古演段卷上
翰林學士知制誥同修國史欒城李冶撰
第一問
今有方田一段內有圓池水占之外計地一十
三畝七分半並不記內圓外方只云從外田
楞至內池楞四邊各二十步問內圓外方各
多少
荅曰外田方六十步　內池徑二十步
法曰立天元一為內池徑加倍至步得

知不足斋丛书本《益古演段》卷上


欽定四庫全書
益古演段卷上　元　李冶　撰
第一問
今有方田一段內有圓池水占之外計地一十三畝七
分半並不記內圓外方只云從外田楞至內池楞四
邊各二十步問內圓外方各多少
荅曰外田方六十步　內池徑二十步
法曰立天元一為內池徑加倍至步得
為田方面以
自增乘得
為方積於頭再立天元
一為內池徑以自之又三因四
而一得
為池積以
減頭位得
為一段虛
積寄左然後列真積以畝法
通之得三千
三百步與左相消

文渊阁四库全书《益古演段》卷上


益古演段卷上
翰林學士知制誥同修國史欒城李冶撰
第一問
今有方田一段內有圓池水占之外計地一十三畝七分
半並不記內圓外方只云從外田楞至內池楞四邊各
二十步問內圓外方各多少
荅曰外田方六十步　內池徑二十步
法曰立天元一為內池徑加倍至步得
數此即四十步併一池徑○銳案凡算式真積曰
太極旁記太字虛數曰天元旁記元字太之下一
層為元元之下一層為元自乘羃記太字則不記
元字記元元字則不記太字其太元俱不記者則以

白芙堂算学丛书《益古演段》卷上

太白精神义山骨。”

李冶虽以数学家闻名于世，但在当时还是与元好问等人齐名的文学家。有《文集》、《敬斋古今黈》、《壁书丛削》与《泛说》等内容丰富的文学著作。《文集》、《泛说》、《壁书丛削》均已失传，但从《敬斋古今黈》的记载中我们仍可窥见其深湛的文学和史学功底。《敬斋古今黈》是他的一本读书笔记，内容包括文学、史学、医学、天文历法、数学和哲学等方面的记述。人们对该书评价很高，认为“上下千古、博极群书”，“词锋骏利、博辩不穷”。

李冶指出：“为言不难而文为难，为文不难而作史为最难。史有体有要，体要具而后史成焉，体要不具而徒文之骋。史乎！史乎！而非千万世之法也？”[23]，主张史笔取舍要得当，作史当褒贬善恶、为万世之法。“史”的作用与“经”相当但又不同，“经、史意一而体二。经可以言命，而史自不可言之。”李冶主张在考证史实时要重视原始资料，“凡注解文字，其所援据有重复者，止当引用前人，而其在后者，略之可也。”[24]他继承了疑古派和考证派史学的传统，考证了扁鹊名字的由来、牛耕最早使用的时间等具体的史料考证问题。

对于写文章，李冶提出五条原则：“文章有不当者五：苟作，一也；徇物，二也；欺心，三也；蛊俗，四也；不可以示子孙，五也”。从写文章的态度、目的、风格、格调和社会效果等方面，全面总结了文学作品的基本要求。李冶还认为，写文章应当善于借鉴吸收前人的精华，为己所用，但他同时也嘲笑盲从古人的态度。文学作品上李冶重立意、意境和气质，追求韩愈、柳宗元的“理融而情畅”的境界和艺术风格。

对于诗文鉴赏，李冶认为诗文的气质重于文采，重在骨格。他称赞杨万里的诗说：“杨诚斋诗句句如理。予尤爱其送子一联：‘好官难得忙不得，好人难做须著力’。著力处政是圣贤阶级。”可见他对诗文中“理”的重视。至于“情”，他主张“千载而下，读其诗则犹能使人酸鼻。此岂真有物以触之，特诗人能道人情之所同然者，人易为之感动耳”。他自己作过不少诗，但都已失传，其中有五首保存在《元诗选癸集》中。从他一首朴实无华又引人入胜的《潇湘夜雨》，我们就能感受到他对“情”的主张，诗中所流露的真挚情感，不禁使人黯然神伤。

远寺孤舟堕渺茫，雨声一夜满潇湘。
黄陵渡口风波暗，多少征人说故乡。

[23] 周翰光．李冶评传．见周翰光，孔国平．刘徽评传．南京大学出版社,1994: 96.

[24] 孔国平．李冶传．河北教育出版社,1988: 28.

五、龙山寻踪、敬斋千古

2011年10月21日清晨，笔者与爱人兼同事徐乃楠老师，领着硕士研究生张建双、徐聪同学坐火车到达石家庄站，匆匆寄存我们厚重的行囊，便坐上开往封龙山的直通大巴，一路上虽风光无限，然对从未来过的封龙山更向往之。约一小时路程来到位于河北省石家庄市西南方向大约15公里处的封龙山。时间尚早，人丁稀少，太阳未出，天有微雾。远远望去新复建的封龙山山门还是比较雄壮威武的。不过与预先网络查询的有所不同，经过询问工作人员才得知，封龙山位于鹿泉和元氏交界，南坡、东坡为元氏所辖，我们在网上看到的是元氏线路的山门。而这里为北坡，为鹿泉所辖。山门前一棵不知道名字的小树在十月的秋风中非常显眼，像枫树一样红透的树叶让我们不由得好似感受到封龙山好客的如火热情。只是树下所立大石头略显突兀，与树之间也不搭调，

鹿泉线路的封龙山山门（图片来源：如无特殊注明的均为笔者所摄，下同）

元氏线路封龙山牌楼（本图片来源于网络）

石上亦无字。

封龙山西依巍巍太行山脉，东临茫茫冀中平原，是元氏、鹿泉两县市界山，以山上最高分水岭为界，以南属元氏、以北属鹿泉，最高海拔 812 米。封龙山历史悠久，自古以来，特别是汉唐以后一直是河北名山。自然风光秀丽，有深洞幽林、清泉碧溪、奇石怪峰。

封龙山历史底蕴深厚，有汉碑、书院、石窟、石刻等。碑碣石刻是封龙山的一大特色，有东汉以来的碑、碣、题刻百余处，尤其是汉碑，无论从书法艺术，还是内容诸方面，都是中国石刻中的珍品，素来为金石学家所注目。封龙山的摩崖石刻，尤其是题景摩崖石刻，是封龙山书法艺术的瑰宝。另外，历代赞咏封龙山的诗词歌赋，也多赖刻石传世。景诗互映，诗石相衬，珠联璧合，构成了封龙山这座历史文化名山的主调。

封龙山山门前宣传板

李冶雕像亭，在栾城一中院内，亭内所立之李冶雕像，系由河北师大美术系教授、雕像家阎明魁所雕。图片来源：栾城年鉴.1999：27 页。

封龙山有佛教、道教、儒教的诸多流派，早在东晋十六国时，这里便有佛教寺院兴起，并因著名高僧释道安（312-385）与他少年时的朋友、著名的学僧释僧光在此进行禅学辩论，写就封龙山在中国佛教史上的重要一笔。封龙山也汇融了道教的诸多源流，历代道家也在这里兴盛发展，留下了宫观庙宇及遗址十几处。宋徽宗（1082-1135）曾为修真观题写匾额，宋代著名道长陈抟（字图南，号扶摇子，871-989）也曾在封龙山修行，留下了众多传说。李冶的思想也明显受到道家思想的影响。

进入封龙山山门后，按照图示我们一直顺路攀沿向上，其间溪水潺潺、巨石频现，果然如史料记载“是山形势宛如伏龙，预飞举状……龙首峰在山之阳，高二百丈，顶上有立石，望之如龙角”[25] 之气势，虽已游历过国内许多名山，但封龙山山势确实也出乎我们预先所料，几经休息历时两小时才爬到山顶。期间也参观了复建的各种庙宇、堂舍，但我们还是略微驻足即直奔山上的封龙书院和李冶墓寻去。

唐、五代以后，书院这种传授知识的形式在我国逐渐兴盛起来，封龙山成为河北书院的发祥地。北宋时期河北见诸记载的书院就有三处在封龙山中，在河北名震一时，封龙山遂成为文化教育发达之区。特别是因李冶而奠定了封龙书院在中国科学技术史上的地位。早在 1992 年栾城县就举办了李冶诞辰 800 周年国际学术研讨会，建立了“李冶陈列馆”，并请河北师大艺术系阎明魁教授雕刻了李冶雕像，立在栾城一中校园内，建立纪念亭，以鼓励青少年刻苦学习，勇攀世界科学高峰，国内外学者经常到栾城一中瞻仰李冶雕像。

据李迪先生记载，1992 年中国数学史研究的学者们参加栾城纪念李冶诞辰 800 周年之际曾拜访过封龙书院旧址，看到近人在封龙书院旧址修建的一幢古式房子，权做书院，供人凭吊[26]。可喜的是，近来河北石家庄政府认识到封龙书院是石家庄最值得标榜的文化品牌之一，也是中国科学技术史和河北教育史上一个彪炳千古的地标[27]。

早在 2004 年，河北省、石家庄市就提出了复建封龙书院的愿望，开始策划封龙书院的复建工程，全方位展示书院的历史，让世人了解封龙书院的辉煌过去，但经过千曲百折才于 2011 年基本完工，后续还将建设中华数学园，以期成为从公众到专家，从科普到学术的中国数学文化中心，为世人呈现出中华文化的科技之光[28]。

看来，我们来的还正是时候，复建的主体工程已然完

[25] [元] 安熙 . 安默菴文集
[26] 李迪 . 中国数学通史（宋元卷）. 江苏教育出版社 ,1999: 196.
[27] 裴建东 . 千年书院即将再现封龙山 . 石家庄日报 ,2006-8-29(9).
[28] 洪蔚 . 封龙书院：唤起历史的记忆 . 科学时报 ,2011-7-13,A3.

工。不过封龙书院中还是有很多地方尚在修缮，我们进入院中时，尚有三五工人在轰鸣的机器声中作业。因时间已至晌午，一位老大娘正在“学斋”门前露天搭灶做饭，浓烟阵阵。向几位打听李冶墓地位于何处，均做不知状。看来没有几个游客像我们一样，对一个几百年前先人的墓地这么感兴趣。环视一周，熙熙攘攘的游人最感兴趣的还是

复建的封龙书院正门[29]

已然繁茂千年的隋代古槐树，照相、祈福者不在少数。正巧一位大叔土法取水，我们每人瓢饮一杯甘泉，果然清凉异常、沁人心脾。稍作休整，我们继续寻找李公之墓。

书院主殿为藏书阁，旁边是封龙书院现今仅存的“原物”——“读书洞”。此洞为天然山洞，相传是书院学子读书所在地，洞内有两室，以小门相通，洞内墙壁上凿有石窟，曾用来摆放书龛、灯龛。由于日积月累地点烛读书，洞顶早已被烟痕熏染。可以认为，读书洞是封龙书院的精髓所在，灵魂所在，根之所在。虽然简陋破败，不是轩屋高堂。但凿壁可以偷光，荧荧可以灼雪。古人刻苦学习的劲头和精神真是值得我们后人敬仰和效仿。

百般打听，几经找寻，我们终于在位于封龙书院侧面地势较低的偏僻山坳里找到了李冶先生之墓，墓地不大，略显冷清，墓旁立有两块石碑，分别镌刻了“李冶墓修复记”及“墓志铭”。在旁边工人们修缮封龙书院的机

[29] 封龙书院正门悬挂了一副对联：“正心修身齐家治国平天下，志道据德秉义怀仁惠众生。”儒家味道非常浓厚，想来复建者更加重视李躬、李昉等李氏先儒，不知对以算学而中兴封龙书院的李氏敬斋先生是否是种讽刺，因为儒家主张“君子志道据德而游于艺”，可李冶先生恰恰在这里研究了儒家传统非常鄙视的算学，而也正是这种“技艺”让封龙书院声名远播，蜚声海内外。

复建的学斋匾额

封龙书院中千年隋槐

龙山三老塑像、读书洞

封龙山李冶墓

李冶墓修复记碑

（修复记全文：李冶的毕生精力在封龙山书院教学育人，弘扬中华先进文化，搞数学科学研究，直到病逝。他研究的数学科学成果在十三世纪远远走在世界前列，是古代世界著名的科学家。逝后就葬在封龙山上，墓在何处没有明确记载。但后人只流传着在百草寺附近有个先生坟，葬的是何人也不明确。2004 年我公司在山顶修步游路时，在环境优雅的密林处采石时发现了这个墓丘，从上到下均由石块砌成，墓顶端的石板下用白石英石块排有李冶墓三个大字，后经多方考察研究，实为李冶墓，为了保护和纪念，便在原地进行了修复。刘俊亭撰　聂养君书 张树义镌石 公元二〇〇九年八月八日　吉立）

李冶墓志铭碑

（墓志铭全文：李冶，字仁卿，号敬斋，栾城人，性颖悟，善攻读，经为通儒，文为名家，金哀宗正大七年，中词赋科进士，任高陵主簿，钧州知事，金亡后，于蒙古宪宗元年，到封龙山重振封龙书院，有教无类，聚众授徒，多达千人，影响深远，盛名天下，育才仕之广矣。元世祖忽必烈几请问策纳谏，然公不以仕禄为己性，屡婉辞，一生严谨治学，凡天文象数名物，无不精研，著述颇丰，尤以《测圆海镜》、《益古演段》领先数学环宇，实乃学子之师表也。元至元十六年，病逝于封龙书院，享年八十八岁，谥号文正。

呜呼！李公仙逝，神留世间，撮土为丘，长眠青山，每登至此，敬仰思贤。仁以治学，公之义焉；广识精理，公之博焉；集成著述，公之智焉。才可富国，己匮如洗，丘高三尺，芳草萋萋，秘演象数，星海归依，后世楷模，天人共祭！　己丑年夏月　立）

器轰隆声和游人喧嚣鼎沸的笑语声掩映下，先生之墓倒是个清净之所。上山的游人数十百计，然只有我们几个对先生之墓感兴趣，我们驻足拜谒期间未见其他游人光临此处。

想想敬斋先生一生勤勤恳恳从事学术研究，从文史到自然科学，无所不包，尤以数学最为突出。后半生兢兢业业教书育人，培养了众多优秀学子。人们评价他："金亡北归，讲学著书，秘演算术，独能以道德、文章，确然自守，至老不衰。"尤为客观、中肯，先生确是吾等后辈敬仰、学习之楷模。

拜谒完李冶先生之墓后，立于"北岳之英"牌楼下

封龙书院前“北岳之英”牌坊

驻足遐思，十月的瑟瑟秋风从耳畔划过，脑海中不禁想像八百二十年前李冶先生所处乱世，却能在如此简陋的山中成就流芳百世的千古功业，心中敬佩不已，并渐起文思。回望游人熙攘、人声鼎沸的封龙书院，真是“可怜书院无山长，半是黄冠半纳衣”，一股悲凉之感油然心生，这种感觉犹似笔者 2009 年在三峡顺流而下途中忆起宋朝大诗人陆游（字务观，号放翁，1125-1210）站在秭归楚城遗址上所作的怀念屈原（名平，字原，前 340- 前 278）之咏叹诗《楚城》：

江上荒城猿鸟悲，隔江便是屈原祠。
一千五百年前事，唯有滩声似旧时。

想想身后早已不再承载教化功能的千年书院，只有质朴、简陋的读书洞和粗壮、繁茂的隋朝古槐见证了这里的岁月变迁，遂萌发不揣浅陋写首小诗之意，草而为之，虽然难登大雅，只为祭奠先贤！

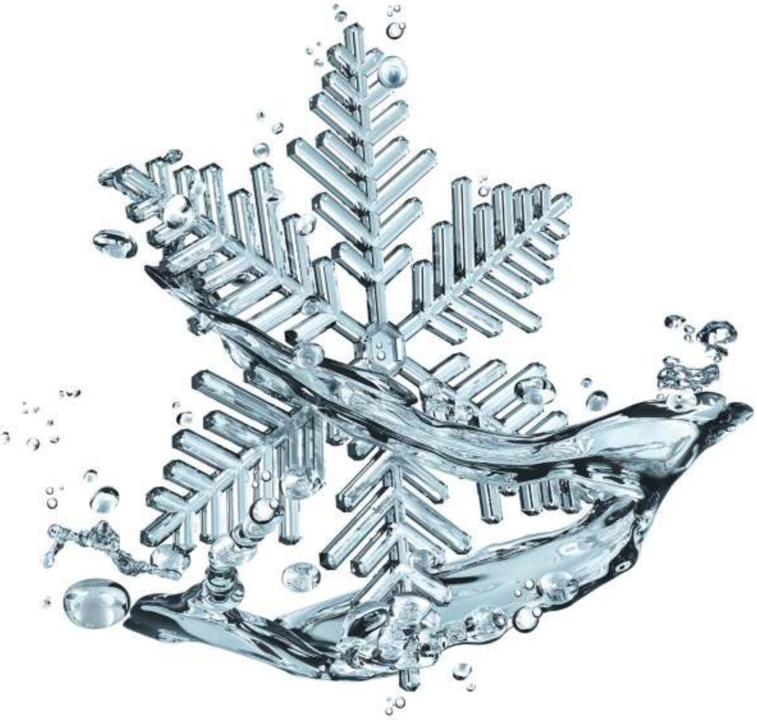
《辛卯秋谒李公敬斋先生墓》
临行已萌拜谒意，封龙山上觅仙踪。
千年隋槐今犹在，书院已无读书声。
李公英名昭海内，海镜宝书式圆城。
吾辈不识天元技，忝作数海一书生。

[30] 白尚恕 . 金、元数学家李冶诞辰 800 周年纪念 . 见：数学史研究文集（五）. 科学出版社，1993,159-162; 或见：李仲来主编 . 中国数学史研究——白尚恕文集 . 北京师范大学出版社 ,2008: 258-264.

后 记

封龙山上抚今追昔，仿佛与先生人神之间有了些许交流，圆满完成临去之前的拜谒心愿，悠然下山途中，漫步遐思之际，便萌发归乡后撰写一文以祭先人的想法。仔细查阅资料发现，1992 年白尚恕先生曾撰写过“金、元数学家李冶诞辰 800 周年纪念”的经典文章，详细介绍了李冶先生的生平、经历和在数学、文学、校勘学、考古学、史学、天文历法、医药养生、处事等方面的贡献和独到见解，并盛赞“李冶之才大而雅，识远而明，闳于中而肆于外，以其之文而鸣其之道”[30]。2012 年，白先生撰写此文已历 20 个春秋，又恰逢李冶诞辰 820 周年之际，谨以此短文同时祭奠为发展和弘扬中国数学文化做出突出贡献的两位先贤。先生们的精神，千古长存！

作者简介：刘鹏飞，吉林师范大学数学学院讲师，东北师范大学教育学部博士研究生，师从于数学家史宁中教授，主要从事数学教育、数学文化史研究。



雪花里的数学

蒋迅

雪花研究史

图 1 漂亮的雪花（来源：SnowCrystals.com）

当我们看到这些漂亮的雪花时，我们一定对大自然的奇妙力量而感到神奇。有人说，每一片雪花都是不同的。真是这样吗？美国《国家地理》有一篇文章说“这很可能是真的”[1]。但《生命科学》上刊登了一篇文章指出“雪花是可能重复的”[2]。有人甚至宣布发现了两个完全一样的雪花[3]。其实这并不难理解。专家们估计，每年有 10^{24} 个雪片飘落下来，从统计学的角度说，当然很可能有相同的雪花。不过笔者对这样的“数学”问题并不感兴趣。如果我们试图穷举雪花的图形的话，我们就走进了一个死胡同，因为我们是不可能收集所有的雪花图形的，这样做只能让我们更加迷茫。我们更感兴趣的是，人们能否用数学作为工具彻底解决雪花形成的奥秘：它们有多少种？它们是在什么条件下形成的？它们能否在计算机上模拟？

让我们首先来了解一下人类对雪花认知的历史。人类对雪花的研究已经有上千年了。松鼠会有一篇桔子作为新年礼物奉献给读者的走笔优美的“雪花史”[4]。维基百科也有一篇“雪花研究史”，记录追述到西汉经学家韩婴。

雪花也是数学家感兴趣的课题。1611 年，天文学家和数学家开普勒就

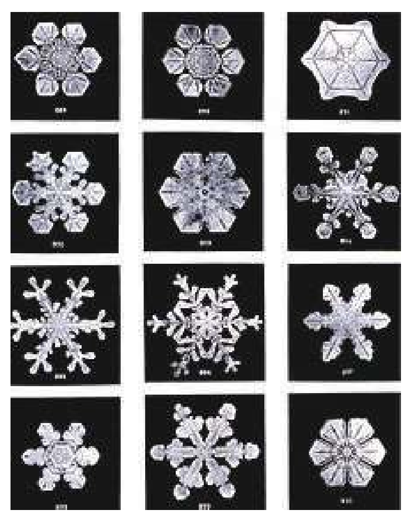


图 2 班特雷雪花（来源：wikipedia.org）

预言，六角结构将反映出位于其下的结晶结构[5]。二十六年后（1637 年），数学家和哲学家笛卡尔第一次详述了雪花的外形[6]。几乎是同时，英国博物学家、发明家罗伯特 • 胡克（Robert Hooke）在他 1665 年出版的《显微图谱》中描述了雪花的结晶[7]。此后对雪花的研究就在很长一段时间内处于停滞的状态。

在研究雪花的历史里，有一位不能不提的是美国农民维尔森 • 班特雷（Wilson Bentley）。他在少年时代就对雪花开始感兴趣。他的母亲送给他一个显微镜，他就在显微镜下观察雪花并随手画下来。但是雪花融化得太快了。正好市场上有了大画幅相机，班特雷倾其所有买下了昂贵的相机。在经过了一番挫折后，他终于在 1885 年 1 月 15 日拍下了第一张雪花照片。值得一提的是，他拍摄雪花的技术事实上一直延续至今。他一生一共拍摄了五千多张雪花照片，这些照片对于科学家和数学家影响巨大。通过自己的亲身观察他得出结论：没有两个雪花是相同的（不知道这是不是第一次书面的记录）。2010 年，他拍下的最早的雪花照片在纽约拍卖，每张 4800 美元。不过他在世时却少有人问津。尽管有一些机构购买了他的作品，但远远不够他在拍摄雪花中的投入。所以他一直过着贫困的日子。1931 年 12 月 23 日是一个暴风雪的日子，身患肺炎的他却坚持步行出去拍摄雪花，不幸的是他体力不支终于倒在了荒野中。班特雷远非一位数学家，但他是一位在雪花史中不能不特写的人物。

对雪花的研究迈出一大步的是日本物理学家中谷宇吉郎（Ukichiro Nakaya）。他在 1930 年代第一次把雪花分了类，并首次在实验室实现了人工结晶。在此基础上，他制作了一个雪花形态图表。用他的这个图表可以预测在任何给定温度和饱和水平条件下的雪花的主要类型[8]。通过班特雷、中谷宇吉郎等人的努力，人们把雪花大体分为 80 种类型，其中一种叫作“其它”，意味着这项工作还应继续下去。这个分类被称为“Magono-Lee 类”[9]。

关于班特雷和中谷宇吉郎，还是去读桔子的精彩“雪花史”吧，现在让我们继续讨论雪花里的数学。

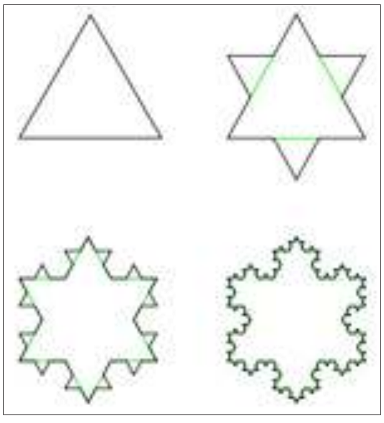


图 3　科赫雪花（来源：wikipedia.org）

计算机辅助

在二十世纪开始时，对雪花的研究向几何方法上发展。1904 年，海里格 • 冯 • 科赫（Helge von Koch）发表了一篇论文“关于一个可由基本几何方法构造出的无切线的连续曲线”[10]，描述了科赫曲线的构造方法。这是最早被描述出来的分形曲线之一，这就是著名的“科赫雪花”。虽然“科赫雪花”不是真正意义上的雪花模型，但是科赫的方法——在多面体上无限地改进——与班特雷使用的图解方法异曲同工。目前，人们所知道的是，雪花的基本构造是基于天然冰之分子的六边形。但人们对水汽到底是如何如此自我精心设计成美丽的雪花仍然知之甚少。

1986 年，美国混沌理论方面的物理学家诺曼 • 帕克（Norman Packard）提出了一个极其简单的格状自动机模型[11]。帕克是对结晶过程

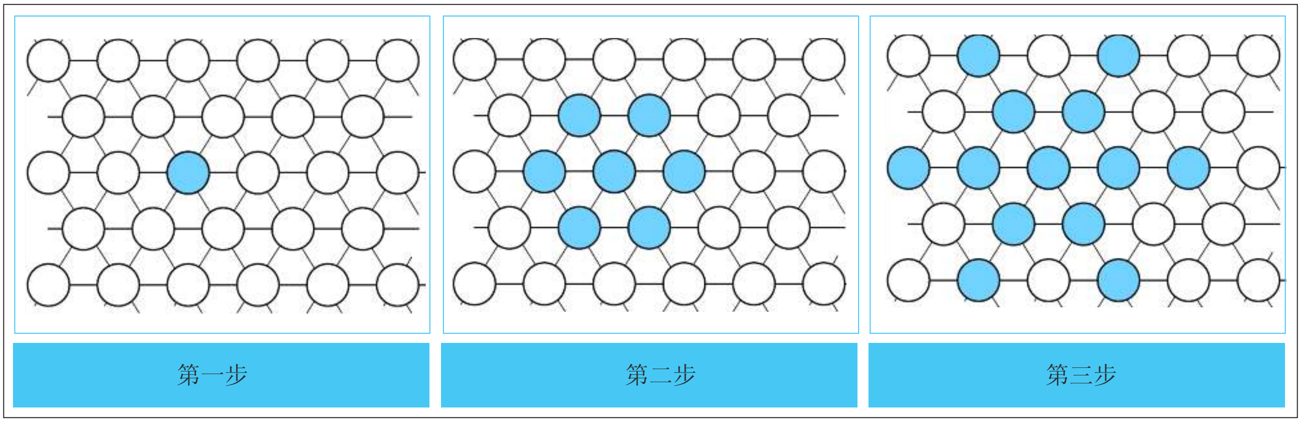


图 4　帕克雪花 Hex 1

提出他的模型的，当然对雪花也适用。格状自动机也叫细胞自动机，最早是由冯•诺依曼在1950年代为模拟生物细胞的自我复制而提出的。而帕克则注意到了结晶的自我复制机制。这一步为人们在计算机实现数字雪花打开了大门。

帕克还注意到雪花的自我复制是在尖头上，所以他做了一条假设：如果一个节点只有一个邻居是结晶的，那么这个节点就结晶，如果有两个是结晶了的，那么这个节点就不结晶；当然已经结晶了的节点保持结晶。这个过程无限重复。图4显示了在重复两次之后的效果。这只是其中一种假设。还有其它的假设，就导致不同形状的雪花图形。比如，可以假定当有1个，3个或5个邻居是结晶时，这个节点就被结晶。为后面叙述方便，我们把第一种结晶法则称为“Hex 1”，把第二个称为“Hex 135”。这样的选择法则在 {3, 4, 5, 6} 这四个邻居数量上可以不同，一共有16种法则。图4是我们说的第一种选择法则 Hex 1 过程的第一、二、三步。史蒂芬•沃尔夫勒姆（Stephen Wolfram）研究了这种选择法则，他在观察了30步之后，得出结论[12]：

人们预计在一片特殊雪花生成的过程中会在树状和面状两种状况里交替，新的分支不断生成但又互相碰撞。如果我们观察真正的雪花，一切迹象表明，这正是所发生的事情。事实上，一般地说，上面的简单的格状自动机似乎显然成功地复制了雪花生成的所有明显的特征。

上面的讨论中，我们默认了一个事实：在一个迭代过程中，雪花一直保持着同一个法则扩散。但显然在自然界中的雪花不一定是按照一个固定的法则扩散的。很有可能，第一步遵循“Hex 1”，第二步就变成了“Hex 135”，第三步又成了“Hex 1345”。这样的格状自动机模型也有人考虑过。

从这个例子，我们看到了计算机模拟开始扮演重要的角色。帕克的这一步是成功的，因为帕克生成的雪花即使让一个小学生去看，他也会说出那是一个雪花（Steven Levy 语[13]）。还有一点更重要，正如沃尔夫勒姆说的：通过计算机模拟可能是预测某些复杂系统如何发展的唯一途径。……生成“帕克雪花”模式的唯一可行的方法是由计算机模拟。

物理学的帮助

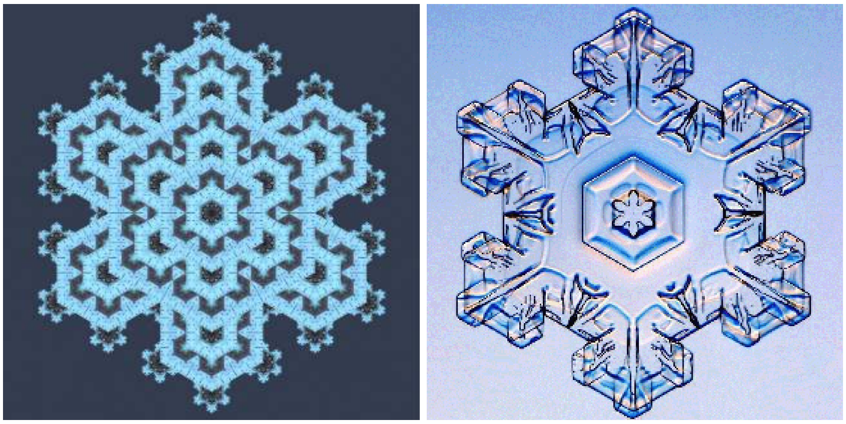


图5　比较帕克雪花和真实雪花（格拉夫纳提供）

但是帕克方法还是有局限性的，人们对雪花的物理属性的认识还必须深入。让我们再回到物理学家在这方面的努力来。有时候对自然界的认识就是这样通过数学家和物理学家的相互促进完成的。在加州理工学院有一位天体物理学教授肯尼思•利伯布莱切特（也译为利波瑞特，Kenneth Libbrecht）。他1984年毕业于普林斯顿大学，获得博士学位，现任加州理工学院物理系主任。利伯布莱切特是学天文学的，但他近年来对雪花做了大量研究。这多么像400年前的开普勒啊。一开始利伯布莱切特完全是出于好奇，但很快他就把好奇与自己受到的数学、物理学方面的严格训练结合到一起，成为了一名研究雪花微观世界的自觉的科学家[14-19]。

虽然雪花千变万化，但科学家感兴趣的是：有多少种不同类型的雪花。在这一点上利伯布莱切特和中谷宇吉郎不谋而合。利伯布莱切特把雪花的分类从中谷宇吉郎等人的80种简化到35种。现在比较标准的平面结晶分类是19种 —— 13个 Magono-Lee 类，6个利伯布莱切特类，都是六边形的形状。对雪花分类的意义在于，虽然人们不可能用计算机复制所有的雪花，但是可以试图复制全部的雪花类形。

对雪花分类的意义还在于，人们可以针对雪花的每一类给出一个比较合理的物理解释。下面这些图片是利伯布莱切特利用特制的雪花显微照相机拍摄的，展示的是在安大略北部地区、阿拉斯加州、佛蒙特州、密歇根州上半岛以及加州内华达山脉地区飘落的雪花。下面是他对几种雪花给出的描述解释[20]。

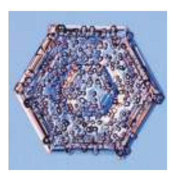
		
六棱柱状雪花:这是雪晶最为基本的形状。类似这样的雪晶个头通常很小,极少能够用肉眼进行观察。六棱柱状雪晶是绝大多数雪花开始时的样子,之后才是从 6 个角长出“枝杈”,形成更为精细的结构。	普通棱柱状雪花:这与上一种类型比较相似,所不同的是,它的表面装饰着各种各样的凹痕和褶皱。	星盘状雪花:这种薄薄的盘状雪晶拥有 6 个宽大的“枝干”,形成与星星类似的形状。它的表面经常装饰着极为精细的对称性花纹。盘状雪花在气温接近零下 2 摄氏度或者接近零下 15 摄氏度时形成,是一种比较常见的雪花类型。
		
扇盘状雪花:这也是一种星盘状雪晶,所不同的是,在邻近的棱柱表面之间长有与众不同的指向边角的脊。	树枝星状雪花:这种外形的雪晶个头很大,直径通常可达到 2 到 4 毫米,可以很容易用肉眼观察。	树枝星状雪花:这种树枝星状雪晶的枝干生有大量边枝,看起来很像蕨类植物。它们是所有雪晶中个头最大的,经常是带着直径达 5 毫米或者更大的身躯降落地面。它们是单一的冰晶——水分子首尾相连而成。
		
空心柱状雪花:这是一个六角形柱体,两端拥有锥状中空结构。空心柱状雪晶个头很小,需要使用放大镜才能看到空心。	针状雪花:这是一种身材“苗条”的柱体,在大约零下 5 摄氏度时形成。当温度发生变化时,雪晶形状便会从薄而扁平的盘状变成细长的针状。	冠柱状雪花:这种雪晶首先长成短而粗的柱状,而后被吹进云层的一个区域并在那里变成盘状。最后,两个薄薄的盘状晶体在一个冰柱的两端生长,形成图片所示的冠柱状。
		
罕见的 12 条枝杈雪花:这种雪花实际是由两片雪花组合而成的,其中一片相对另一片进行了 30 度旋转。	三角晶状雪花:在温度接近零下 2 摄氏度时,雪盘“生长”成被截去尖角的三角形,此时,图片中的雪晶就形成了。	霜晶状雪花:云是由无数小水滴构成的,有时候,这些小水滴与雪晶发生碰撞并最终粘在一起。这种冻结的水滴被称之为霜。

表 1(来源:新浪科技[20])

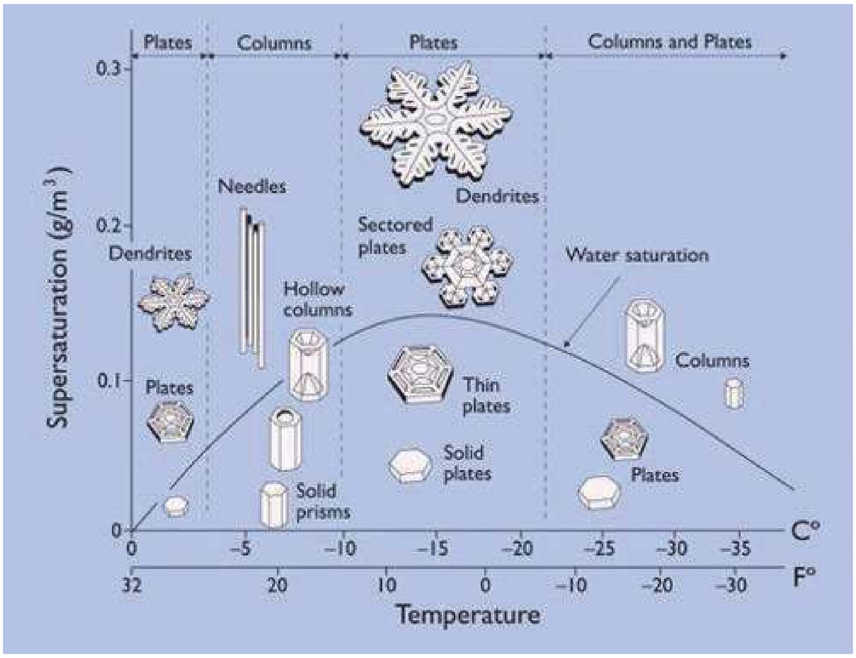


图 6　雪花形状与温度、饱和度的关系（来源：SnowCrystals.com）

通常的雪花是正六边形的，但是我们发现也有其他形状。现在，通过在可控制的实验室条件下，人们可以培育雪花。科学家发现雪花形状在很大程度上取决于温度和饱和度。图 6 就是雪花在不同条件下形成的形状。

图 6 告诉我们，在通常条件下，雪花都是正六边形的。这一点在现在的科学理论框架下不难理解。松鼠会上的文章做了一个清晰的解释：雪花由水分子组成。“一粒沙子见世界”，小单元是六边形，当水分子以不同速度粘到这个单元的各个表面，最终形成的大雪花便也是六边形。后边，我们还将对这个图做一些讨论。

利伯布莱切特的研究得到了世人的注意。2004 年，利伯布莱切特获得了美国“国家户外图书奖”。2006 年，美国邮政局把利伯布莱切特的四个雪花图片印到了当年的圣诞邮票上。2010 年，瑞典把“伦纳德 • 尼尔森奖”授予他。他的工作把数学、物理和化学转化成了完美的图案，让人们从微观看到了千变万化的大自然是有其内在规律的。

从 1980 年代起，物理学家和数学家开始寻找合理的数学模型。他们的途径包括：表面张力模型、蒙特卡罗方法、偏微分方程、元胞自动机、混沌理论、有限元方法等。所有这些努力为数学家建立合理的数学模型做好了准备。现在，数学家可以披挂上阵了。

元胞自动机模型

在数学家中，首先应提到的是加州大学戴维斯分校的杨可 • 格拉夫纳教授（Janko Gravner）和威斯康星大学麦迪逊分校的大卫 • 格里夫耶斯教授（David Griffeath）的工作。他们花费了四年的时间终于开发出了一种电脑模型，可以随意模拟出具有对称平衡之美的雪花的数学模型。格拉夫纳和格里夫耶斯的模型对雪花的生成提供了一个令人瞩目的数学基础[21-29]。

格拉夫纳他们从 2005 年起开始研究雪花模型，2006 年开始建立 3D 模型并在 2007 年基本完成了建模[28]。他们的工作首先从二维开始。他们对于帕克雪花进行了深入研究，得到了一些不可思议的结果。比如，他们从数学上严格地证明了帕克雪花的“密度”都是严格小于 1；他们还证明了一个有悖直觉的结论：Hex 14 的密度大于 Hex 134[23]。

前面说过，帕克雪花一直保持着同一个法则扩散，但在自然界中的雪花不一定是按照一个固定的法则扩散的。虽然有人考虑过这样的格状自动机模型，但从数学上研究其可行性还是未知的。

在此基础上，他们又向前迈了一步，而这一步是突破的一步，是使人类对雪花的认识更上一层楼的一步。他们把雪花结晶的动力学归

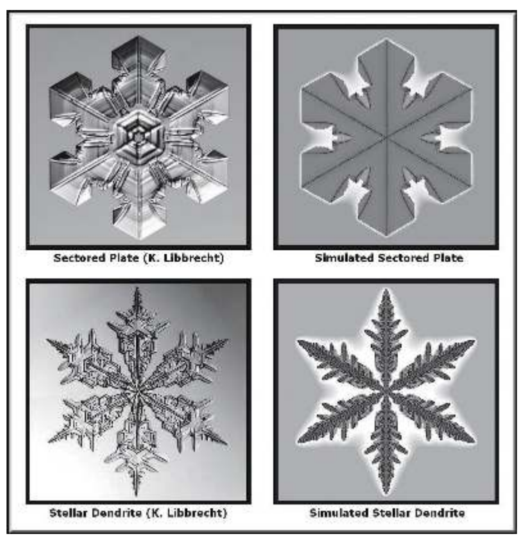


图 7　比较真实雪花和计算机产生的雪花（来源：Janko Gravner 提供）

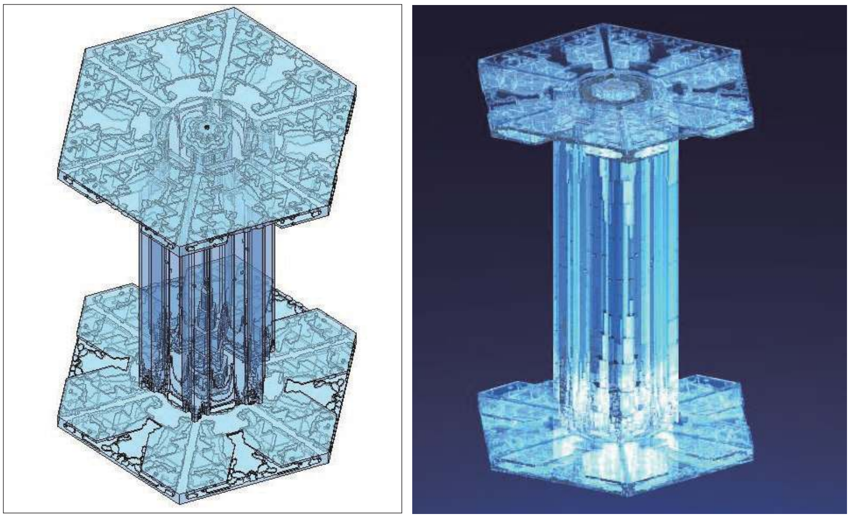


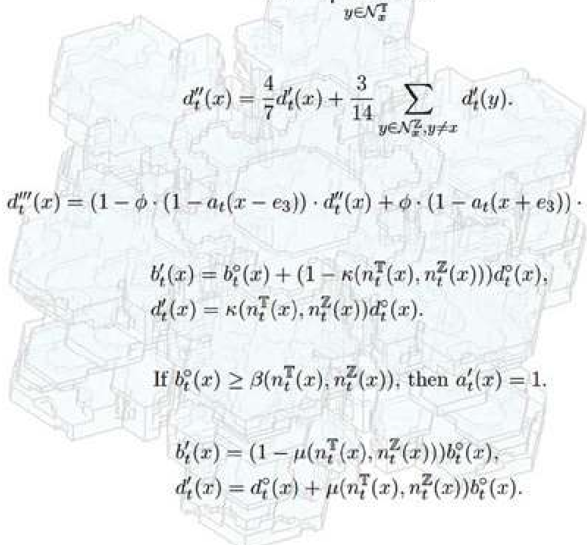
图 8 （来源：Janko Gravner 提供）

入粒子系统的流体动力学，以雪花的物理原理为基础，并力图在介观体系（Mesoscopic）的层次上抓住雪花形成过程中的物理、化学特征，运用非线性动力系统中三维耦合映像格子模型和布朗运动理论中的粒子内部扩散限制聚集模型，深刻描述了雪花的结构形态。在研究中大量运用了随机过程、统计物理和偏微分方程理论的新成果，并把它们交会到一起。另外，他们建立的模型也从二维推广到了三维。图 8 显示的就是其中之一：左边是用 Matlab 生成的图像，右边是在左图基础上用光线跟踪软件加工后的效果。我们不可能把他们的结果全部介绍出来，仅仅用下面一组方程式来让大家看一看其复杂度。

细心的读者可能发现前面表 1 和图 6 的雪花中有一个是三角形 (还有一个十二边形的)。人们几百年前就注意到了这种形状，但一直无法解释。尽管三角形雪花很少，他们在实验室里看到的三角形雪花比统计模型显示的要多。这说明，在自然界里的三角形雪花也应该更多，更经常。他们还注意到，有些雪花虽然是六边形的，但仔细看的话，你会发现，它们有三条边长一些，而另三条边短一些，所以从总的形状上看，它们其实是三角形的。三角形雪花与温度、湿度似乎没有紧密的关系。利伯布莱切特提出一种假设：在雪花飘落的过程中，有时一条边会沾上一点点尘埃。这造成了雪花飘落时向上倾斜，而在下面的一条边会在风的作用下更快地成长，使得雪花变成了稳定的三角形。当雪花成了三角形形状之后，它就一直保持着这种形状。

格拉夫纳他们也研究了三角形和十二角形雪花。不过，他们不是按利伯布莱切特的解释做的模拟。他们是从一开始就假定雪花的生成元是三角形的，因此最后生成的雪花也是三角形的。这似乎与利伯布莱切特的猜测不同。其实关键是利伯布莱切特所说的尘埃的影响是在什么时候发生的。如果是在雪花核一开始就已经发生了的话，那么利伯布莱切特的说法就和格拉夫纳的假定相吻合了。当然这个解释还不具有太大的说服力。仔细观察的话可以注意到，自然界的雪花很多都是不对称的。有理由猜测这样的雪花从一开始就是不对称的。三角形雪花只是一个特例。也许，最终的答案还要数学家们去解决呢。

2008 年 1 月，加州大学戴维斯分校首先宣布了格拉夫纳他们的工作。随后，包括路透社、发现频道、芝加哥论坛、洛杉矶时报、科学日报等媒体对他们的工作加以报道。可以说，他们的工作在数学领域上开创了一个新的领域。



$$d_t'(x) = \frac{1}{7} \sum_{y \in \mathcal{N}_x^{\mathbb{T}}} d_t^\circ(y). \tag{1a}$$

$$d_t''(x) = \frac{4}{7} d_t'(x) + \frac{3}{14} \sum_{y \in \mathcal{N}_x^{\mathbb{Z}}, y \neq x} d_t'(y). \tag{1b}$$

$$d_t'''(x) = (1 - \phi \cdot (1 - a_t(x - e_3)) \cdot d_t''(x) + \phi \cdot (1 - a_t(x + e_3)) \cdot d_t''(x + e_3), \tag{1c}$$

$$\begin{aligned} b_t'(x) &= b_t^\circ(x) + (1 - \kappa(n_t^{\mathbb{T}}(x), n_t^{\mathbb{Z}}(x))) d_t^\circ(x), \\ d_t'(x) &= \kappa(n_t^{\mathbb{T}}(x), n_t^{\mathbb{Z}}(x)) d_t^\circ(x). \end{aligned} \tag{2}$$

$$\text{If } b_t^\circ(x) \geq \beta(n_t^{\mathbb{T}}(x), n_t^{\mathbb{Z}}(x)), \text{ then } a_t'(x) = 1. \tag{3}$$

$$\begin{aligned} b_t'(x) &= (1 - \mu(n_t^{\mathbb{T}}(x), n_t^{\mathbb{Z}}(x))) b_t^\circ(x), \\ d_t'(x) &= d_t^\circ(x) + \mu(n_t^{\mathbb{T}}(x), n_t^{\mathbb{Z}}(x)) b_t^\circ(x). \end{aligned} \tag{4}$$

图 9（来源：http://demianrepucci.com）

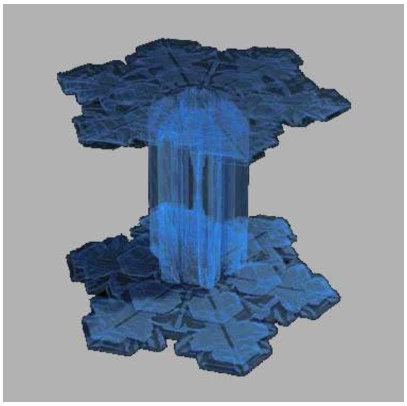


图 10（来源：NASA）

NASA 科学家汤姆•克鲁恩（Tom Clune）和郭国森在他们的基础上研究了雪花形成的数学模型。他们在计算机模拟过程中间有意改变代表物理量的参数值，得到了一些有趣的结果。图 10 就是先选取适合纵向增长然后在中途变成适合横向增长的参数所得到的雪花图片。图 10 与格拉夫纳和格里夫耶斯的图 8 非常相像，因为他们借鉴了格拉夫纳和格里夫耶斯的模型，也使用了同一个光线跟踪软件。重要的是，他们把格拉夫纳和格里夫耶斯的算法在集群计算环境里利用“讯息传递介面”（MPI）和“区域分解方法”来实现并行计算。特别地，他们没有局限于原来的对称性限制。因此更容易实现在现实中常见的非对称雪花结晶。

现在，在计算机上实现一片雪花已经不是一个太难的事情了。如果读者有兴趣的话，也可以自己在计算机上“制造”出雪花来。格拉夫纳和格里夫耶斯提供了他们的 MATLAB 程序。不过，因为 MATLAB 是 Scripting 语言，所以运行起来可能会比较慢。还有一个办法就是笔者前面提到过的分形，最早、最著名的科赫雪花就是其中之一。

相变的有限元解

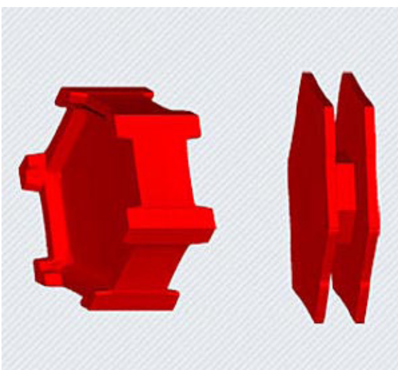


图 11　用有限元方法生成的雪花（来源：科学美国人）

还有一个研究以相变（phase transition）为出发点。相变是指物质在外部参数（如：温度、压力、磁场等等）连续变化之下，从一种相（态）忽然变成另一种相，最常见的是在一定的条件下，冰变成水和水变成蒸气等，也有可能是相反的过程。我们把这样的过程称为相变。因为水和冰之间的边界不是固定的，所以它形成的热传导方程是一个自由边界问题。对这个自由边界的最简单描述（或者说，最简单模型）就是在这个界面上，温度为零摄氏度。让我们考虑一个最简单的一维情况。这个情况和本文讨论的雪花问题不完全一样，但是也许可以帮助读者加深理解。假设在 $[0, +\infty]$ 区域上的冰和水。假定在开始时整个区域都是冰。我们从左边提供一个热源，于是冰开始熔化，在 t 时刻，区域 $[0, s(t)]$ 变成了水。忽略边界条件和初始条件，我们得到在 $[0, s(t)]$ 上的热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x,t):0<x<s(t),t>0$$

这里，$u = u(x, t)$ 是温度，$s(t)$ 是自由边界。在自由边界上温度是零，所以 $u(s(t), t) = 0$。注意自由边界 s 是随时间而变的曲线（或曲面），我们还应该有一个在 s 上的条件。最常见的就是著名的“史蒂芬条件”（Stefan Condition）：

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x} \qquad t>0$$

也就是说，自由边界随时间的变化率和温度在自由边界上位移的变化率成正比，方向相反。相应的偏微分方程就是“史蒂芬问题”（Stefan Problem）。为了说明相变的性质，我们再稍微深入一步。物理实验表明，在自由边界上，温度达到零度，但不会立即继续升温。这里有一个积蓄能量的过程，直到增加了 L 单位的能量（潜热）后温度才会继续增长。让我们引入一个新的变量 y 来表示水的浓度，并假定 $L = 1$。我们定义 $v = u + Ly = u + y$。这里，y 是阶梯函数：$y = 1$，如果 $0 < x < s$；$y = 0$，如果 $x > s$；$0 < y < 1$，如果 $x = s$。

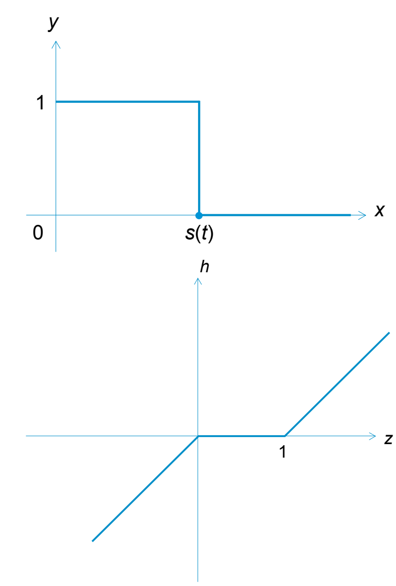


图 12　阶梯函数 $y(x)$ 和分段线性函数 $h(z)$

v 决定了相变的热动力。引入函数 $h(z) = \min(z, 0) + \max(z - 1, 0)$。则上面的热传导方程可以写成：

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,.$$

经过这个变换，上述方程在整个半实数轴 $(0, +\infty]$ 上成立，温度 $u = h(v)$。方程本身成为退化的抛物形偏微分方程。这样做的好处在于，人们可以运用变分和有限元的方法在一个固定的区域里得到方程的数值解。

上面的讨论不是一个严格的讨论，只是希望帮助读者理解下面要介绍的相变的有限元解法的思想。从这样的描述看，雪花的形成问题应该是与相变问题紧密相关的，因为在第三节里我们已经看到，雪花是由水珠在一定的温度和饱和度条件下形成的，从这个意义来说，就是一个结晶的过程。从数学上说，人们需要做的就是研究自由边界表面随时间的变化。一片雪花的形成过程是否也能用相变的数学模型来描述呢？

2012 年初，英国伦敦帝国学院的约汉 • 巴瑞特（John Barrett）教授和罗伯特 • 纽伦伯格（Robert Nurnberg）教授与德国雷根斯堡大学的哈罗德 • 加克（Harald Garcke）教授就按照这个思路做出了一些新的工作：“雪晶体生长中分面格式形成的数值计算”[30]。这是他们在自由边界问题的有限元分析的成果之上对雪花研究方面的一个有意义的新尝试[31, 32]。

让我们先回到在第三节中的“雪花形状与温度、饱和度的关系”那张图[16]。很明显，雪花的形状与温度和饱和度有关。当温度刚刚在冰点之下的时候，如果饱和度比较低的话，出现柱状雪花；如果饱和度比较高的话，就出现树突状雪花。当温度在 -5 °C 附近时，如果饱和度比较低的话，出现实心柱状雪花；如果饱和度比较高的话，就出现空心柱状雪花和针状雪花。当温度低到 -10 °C 以下时，如果饱和度比较低的话，出现实心盘状雪片；如果饱和度比较高的话，就出现树突状雪花。当温度到 -25 °C 以下时，如果饱和度比较低的话，出现实心盘状雪片；如果饱和度比较高的话，就又出现柱状雪花。从物理意义上说，雪花的形成过程是固体和气体的边界（即自由边界）变化的过程。而这个自由边界的变化是由于水分子的分离和附着等过程。在这个过程中满足物质守恒定律，同时表面能量达到极小。另外我们知道，冰是一种六方晶系的晶体，基本形态是六角形的片状和柱状。冰晶体的各向异性导致其物理性能（如导热性）随着方向的不同而有所差异。这种六边形的各向异性（hexagonal anisotropy）也必须考虑进去。巴瑞特、纽伦伯格和加克根据上述条件引入了一个与雪花相关的结晶（Crystallization）的数学模型——准静态的扩散问题（quasi-static diffusion problem）。

他们的巧妙之处在于把雪花的轮廓看成是一个自由边界，然后在自由边界上施加具有物理意义的复杂条件。对相应的偏微分方程建立其变分形式，以便运用有限元方法找到数值解。为

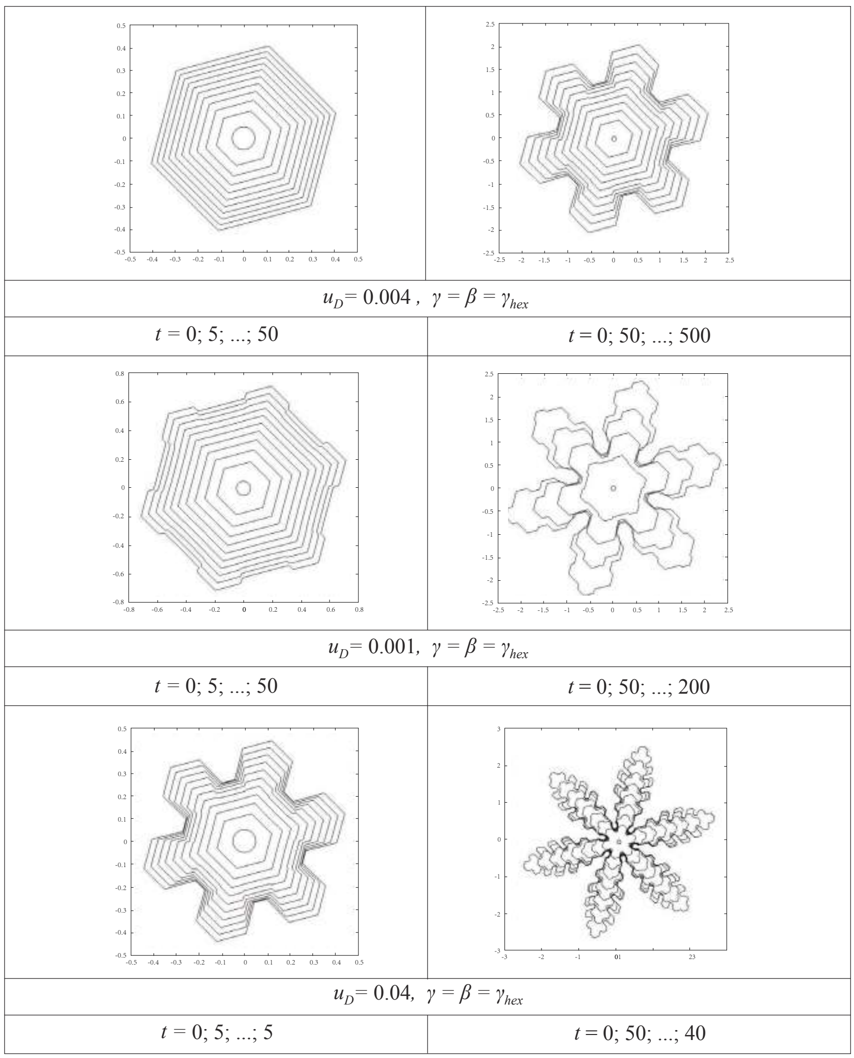


图 13　二维雪花（来源：Harald Garcke 提供）

了实现不同形状的雪花，在他们通过改变方程组里的饱和参数 $u_D=u_{\partial D}$、凝结系数 β 和表面能量六边形的各向异性参数 γ 来实现。我们同样不准备对他们的方程组进行详细的讨论，而是转到数值计算上来。

在建立了一组偏微分方程之后，他们进而用有限元方法进行了数值计算。上图就是他们数值计算的一些结果。为了方便观察雪花界面（即自由边界）随时间的变化，每一行中并列的两个图分别记录了这个曲线在不同时间段的形状。注意这里的每张图都是多个界面的叠加图。我们看到，除了参数 u_D 以外，其他参数都是相同的。这三个雪花分别由 u_D= 0.004, 0.01 和 0.04 生成。从而从数学上解释了雪花形状和饱和度的关系。在他们的论文中有两类雪花：刻面

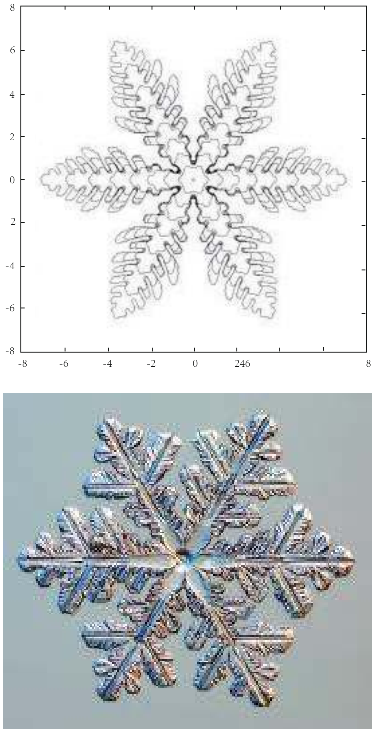


图 14　比较真实雪花和计算机产生的雪花（来源：Harald Garcke 提供）

（facet）和树突（dendrite）。这些图形都是在不同的参数选取下得到的。加克对

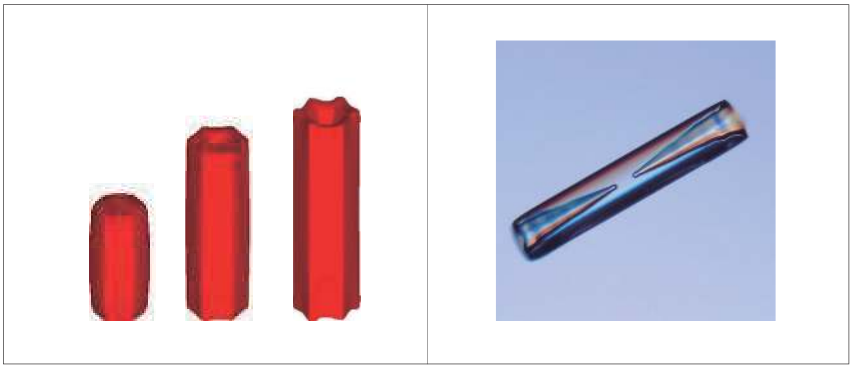


图 15　三维雪花（来源：Harald Garcke 提供）

科学美国人记者说，他们“是第一个用能量守恒和热力学理论同时实现这两种生长”的小组。

为了在计算机上模拟这组偏微分方程代表的雪花的生成，人们必须准确地描述结晶面（即自由边界）随时间的变化。人们通常是把这个曲面用不断加细的三角形来近似，这是有限元法所必须的。但这些三角形经常会退化从而导致模拟失败。他们的办法就是用现在比较时髦的平均曲率（Mean curvature）来控制模拟以达到在计算机上实现的目的。他们表示，这个办法可以避免三角剖分退化的难点[33, 34]。笔者认为这是他们成果的一个亮点。

他们也对偏微分方程的数值解做了分析。他们发现，结晶体中表面分子的结合对结晶的生长有很强的影响。他们还发现，雪花尖端的生长速度与空气中的水蒸气的多少成正比。他们认为，雪花的结构源于扩散有限晶体生长在各向异性的表面能量和各向异性吸附动力。冰晶形态的稳定在很大程度上依赖于饱和、晶粒尺寸和温度。他们注意到了尖端速度和饱和度之间有线性关系。他们还得出结论，表面能量的影响尽管很小，却对雪花的形成有较大的影响。最后一点最为重要，它也许揭示了一个可能最后解决雪花形成问题的新的思路。

他们的模型——第一次用能量守恒和热力学理论建立的连续模型成功地研究了雪花的生成，这是此模型与格拉夫纳 - 格里夫耶斯模型的本质区别。由于这个原因，他们的途径自然地被物理学家所欣赏。重要的是，他们开辟了用偏微分方程和有限元方法研究雪花的新方向。麻省理工学院的“科技评论”（Technology Review）、英国的“邮件在线”（Mail Online）以及“科学美国人”（Scientific American）都报导了他们的成果。

在这里，笔者需要对“科学美国人”的报导做一点说明。“科学美国人”在文章中也提到了格拉夫纳和格里夫耶斯的工作，但把他们的工作误解成了在分子的层次上的格状自动机模型。其实，格拉夫纳和格里夫耶斯的工作是在介观体系的层次上，也就是说他们只是到了微米的范围。他们在论文标题上就写清楚了这一点[27]。事实上，目前对雪花的形成人们还没有一个完美的解释。从物理上还无法在分子的层次上解释分子的附和和分离的机制。利伯布莱切特认为[17]，可能有某个物理性质还没有被认识到，比如雪晶形状的不稳定性。在这样的情况下，在分子的层次上建立数学模型也就无从提起了。

有一个有意思的巧合是，德国雷根斯堡大学正是第一个研究雪花的天文学家和数学家开普勒逝世的地方。加克教授说，他们可以在办公室的窗

前就见到真正的雪花。这是在加州洛杉矶的利伯布莱切特教授和在加州戴维斯的格拉夫纳教授不能享受的优越待遇。

雪花的快乐

一篇多少有些数学的短文到此应该收笔了。作为结尾，让我转引一下徐志摩的《雪花的快乐》。这首诗作于 1924 年 12 月 30 日，发表于 1925 年 1 月 17 日《现代评论》第一卷第 6 期：

假如我是一朵雪花，
翩翩的在半空里潇洒，
　　我一定认清我的方向——
　　飞扬，飞扬，飞扬，——
　这地面上有我的方向。
不去那冷寞的幽谷，
不去那凄清的山麓，
　　也不上荒街去惆怅——
　　飞扬，飞扬，飞扬，——
　你看，我有我的方向！
在半空里娟娟的飞舞，
　　认明了那清幽的住处，
　　等着她来花园里探望——
　　飞扬，飞扬，飞扬，——
　啊，她身上有朱砂梅的清香！
那时我凭借我的身轻，
盈盈的，沾住了她的衣襟，
　　贴近她柔波似的心胸——
　　消溶，消溶，消溶——
　溶入了她柔波似的心胸！

雪花飞来，一片两片三四片，飞入芦花总不见。微小轻盈的雪花能令诗人动心，让农民入迷。天文学家不放过它，数学家决心彻底解决它的奥秘。这就是雪花的魅力。

致谢：笔者感谢格拉夫纳教授和加克教授提供多张图片！

参考文献

1."No Two Snowflakes the Same" Likely True, Research Reveals, National Geographic News, February 13, 2007.
2. Charles Q. Choi, "Scientist: Maybe Two Snowflakes are Alike", LiveSciecne, January 19, 2007.
3. Scientists discover snowflake identical to one which fell in 1963, NewsBiscuit, December 3, 2010.
4. 雪花史，科学松鼠会，2008 年 12 月 25 日 .
5. J. Kepler, "Strena Seu de Nive Sexangula," 1611. Translated as"The Six-Cornered Snowflake," trans. Colin Hardie, Clarendon Press, Oxford, 1966.
6. R. Descartes, "Les M' et' eores," 1637; ' ed. Adam et Tannery, Paris, Vrin, t. IV, 1965.
7. R. Hooke, "Micrographia," 1665; Dover, 2003.
8. U. Nakaya, "Snow Crystals: Natural and Artificial," Harvard University Press, 1954.
9. C. Magono and C. Lee, Meteorological classification of natural snow crystal , J. Fac. Sci.Hokkaido 2 (1966), 321-335.
10. H. von Koch, Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction g' eom' etrique ' el' ementaire, Arkiv f ¨ or Mathematik, Astronomi och Fysik 1 (1904), 681-702.
11. N. H. Packard, Lattice models for solidification and aggregation, Institute for Advanced Study preprint, 1984. Reprinted in "Theory and Application of Cellular Automata," S.Wolfram, editor, World Scientific, 1986, pp. 305-310.
12. S. Wolfram, "A New Kind of Science," Wolfram Media, 2002.
13. S. Levy, "Artificial Life: The Quest for a New Creation," Pantheon Books, 1992.
14. K. Libbrecht, Morphogenesis on ice: The physics of snow crystals, Engineering and Science 1 (2001), 10-19.
15. K. Libbrecht, Explaining the formation of thin ice crystal plates with structure-dependent attachment kinetics, Journal of Crystal Growth 258 (2003), 168-175.
16. K. Libbrecht, The physics of snow crystals, Reports on Progress in Physics 65 (2005), 855-895.
17. K. Libbrecht, Observations of an Edge-enhancing Instability in Snow Crystal Growth near -15 C, arXiv:1111.2786 (2011).
18. K. Libbrecht, "Field Guide to Snowflakes," In preparation, 2006.
19. K. Libbrecht, P. Rasmussen, "The Snowflake: Winter' s Secret Beauty." Voyageur Press, 2003.
20. 绝美雪花显微照片：形状各异结构精细，新浪科技，2008 年 12 月 11 日 .
21. R. Fisch, J. Gravner, D. Griffeath, Metastability in the Greenberg-Hastings model. Ann. Appl. Prob. 3 (1993), 935-967. (Special Invited Paper.)
22. J. Gravner, D. Griffeath, Multitype threshold voter model and convergence to Poisson–Voronoi tessellation. Ann. Appl. Prob. 7 (1997), 615-647.
23. J. Gravner, D. Griffeath, Cellular automaton growth on Z2: theorems, examples and problems, Advances in Applied Mathematics 21 (1998), 241-304.
24. J. Gravner, D. Hickerson, Asymptotic density of an automatic sequence is uniform, in preparation.
25. J. Gravner, D. Griffeath, Random growth models with polygonal shapes, Annals of Probability 34 (2006), 181-218.
26. J. Gravner, D. Griffeath, Modeling snow crystal growth I: Rigorous results for Packard' s digital snowflakes, Experimental Mathematics 15 (2006) 421-444.
27. J. Gravner, D. Griffeath, Modeling Snow Crystal Growth II: A mesoscopic lattice map with plausible dynamics. Physica D: Nonlinear Phenomena 237 (2008), 385-404.
28. J. Gravner, D. Griffeath, Modeling snow crystal growth III: 3d snowfakes, in preparation.arXiv:0711.4020.
29. J. Gravner and D. Griffeath, Robust periodic solutions and evolution from seeds in one-dimensional edge cellular automata, in review.
30. J. W. Barrett, H. Garcke and R. Nurnberg, Numerical computations of facetted pattern formation in snow crystal growth, arXiv:1202.1272v1 (2012).
31. J. W. Barrett, H. Garcke and R. Nurnberg, On stable parametric finite element methods for the Stefan problem and the Mullins-Sekerka problem with applications to dendritic growth, J. Comput. Phys. 229 (2010), 6270-6299
32. J. W. Barrett, H. Garcke and R. Nurnberg, Finite element approximation of one-sided Stefan problems with anisotropic, approximately crystalline, Gibbs--Thomson law, arXiv:1201.1802v1 (2012).
33. J. W. Barrett, H. Garcke and R. Nurnberg, On the parametric finite element approximation of Evolving hypersurfaces in R^3, preprint.
34. H. Garcke, Kepler, Crystals and Computers - How mathematics and computer simulation help understanding of crystal growth, preprint.

法兰西英才教育掠影

张英伯　文志英

在大学数学系里教书，经常看到和听到与法国有关的事情。主要是他们的数学如何厉害，像笛卡尔、伽罗瓦、庞加莱、嘉当这些在数学史上振聋发聩的名字就不用说了，仅就上世纪中叶开始颁发的菲尔兹奖而言，美国有 15 位获奖人、法国 11 人、俄罗斯（包括前苏联）8 人、英国 6 人、日本 3 人、比利时 2 人，欧洲和澳洲的一些国家，包括德国各 1 人，共 52 人。美籍获奖者有 5 人来自欧亚两洲，法籍有 2 人，分别来自德国和越南。有趣的是，法裔的获奖者全部都在法国，好像这里的环境非常适合数学家的生存。1994 年法国有两人获奖，2002、2006 年各一人，2010 年两人。2002 年的世界数学家大会是在北京召开的，会议期间，北师大还邀请世界各地的数学家到京师大厦晚宴，当年的菲尔兹奖得主 Laurent Lafforgue 也来了。我们有些熟悉的德国代数界的同事，在本国没有找到位置，去了法国，他们说法国政府吸引欧洲、拉丁美洲一些有成就的数学家来到法国任教，中国也有三十多位数学家在那里找到了教职，其中以数学著称的巴黎六大、七大和十一大各有一人。2009 年初，法国教育部有一位数学督察访问北师大，谈到了法国数学教师的培养和选拔，还给了一份法国一般方向科学系列数学课程第三学年的课程纲要，水平果然不凡。[1, 2]

法国的人口约为六千五百万，是美国的 22%，中国的 5%，他们的教育是怎样搞的？他们的数学成就何以会如此出色？

出类拔萃的中学

请示了中国数学会，首师大李克正、李庆忠教授，北师大二附中金宝铮、实验中学姚玉平两位特级教师，北师大王昆扬、张英伯教授共 6 人于 2012 年 5 月 27 日来到巴黎考察数学教育。

第二天一早差五分七点，我们到达旅馆大堂，按照约定的时间七点去拜会巴黎七大的 Michèle Artigue 教授。Michèle 曾经担任过国际数学教育委员会（ICMI）的主席，去年年初在北京师范大学召开的 ICMI 执委会的会议上，担任本届执委的张英伯与她谈到中国的数学教授和数学老师想了解法国数学教育的愿望，这次访问就是她安排的。没想到 Michèle 早就到了大堂，已经等我们十分钟了。按照法国的礼节拥抱问候完毕，她立刻带领我们动身前往此次访问的第一个学校：路易大帝中学。这是法国最顶尖的一所学校，只设高中和预科，不设初中。

路易大帝中学是公办学校，拥有选择学生入学的权力，选择的方式是按照各校初中生的学习档案和成绩，

由学校拍板录取，没有入学考试。主要生源为市中心地区的初中，这里集中了文化与经济水平较高的家庭。为了阻止名校变成“贵族学校”的趋向而引起社会的不公和不满，巴黎学区决定高水平的中学有强制性义务去发现郊区的优秀初中生，学区会特别观察这类学生从高一到大学的整个历程。于是负有此项社会义务的中学与一些较差地区的初中建立了特别的关系，派老师每周去给这些选拔出来的优秀初中生上补习课，为他们来市中心的学校顺利学习做准备，这些课程都是义务的，学校和老师分文不取。应该指出的是，法国初中数学纲要的原则是提出对学生的最低要求，如果老师认为学生在认知上能够接受就可以超过纲要讲得更深一些。

法国各省都有这类优秀的高中。与世界上其他国家不同的是，这类高中开设两年制的大学预科，学习大学本科课程，而大学一年级的微积分和向量已经在高三学完了[2]。学生高中毕业经过严格的挑选进入预科，毕业后可以报考法国的大学校。法国高中毕业有统一的会考，发放毕业证书。进入一般的大学没有入学考试，报名即可，但是大学校各自的入学考试题却严格、高深得令人惊叹。

我们进入学校大门时，路易大帝中学的副校长和几位负责的老师已经站成一排在门口等候，寒暄了几句，我们被领着参观了学校的全貌。学校位于巴黎拉丁区的中心，已经有 450 年的历史，目前的校园是 200 年前建造的，在上世纪中期和末期进行过翻修。教学楼都是四层的，建筑风格与巴黎城一致。校园有四个由若干座教学楼围成的院子，一所钟楼和教堂，其中两个院子以校友的名字冠名，分别叫做雨果院和莫里哀院。如果不是看到课间休息时院子里生龙活虎的现代派的孩子们，单就建筑风格而言，你会觉得走进了雨果笔下十九世纪的法兰西。

光荣院

路易大帝中学的小教堂

法国的预科一般分成文、理、商三科，各自按照法国大学第一阶段（即大学第一、二年）的课程纲要授课。法国的纲要是针对课程内容的最低要求给出的指导性意见，弹性很大，各校可以根据学生和师资水平因材施教，路易大帝中学的授课内容要远远多于和深于纲要。预科也没有统一的课本，课本由老师自行选择，或者自己编写讲义；考试也都是老师自己出题，自己判卷，从来没有统考。

自 70 年代至 90 年代中，理工科预科一般用 Jacques Dixmier 的《第一阶段数学教程》，至今一些著名的预备班仍然以此为蓝本，武大“中法班”从 80 年至 90 年也一直在用。仅从教材的目录，对其深度和广度就可窥见一斑。 教材的出台还有一段背景：在 60 年代的西欧，法国几何学家埃里·

Mathematics Education 数学教育

工科的数学分析复习课

商科的数学分析课

嘉当（Élie Cartan）的儿子亨利•嘉当（Henry Cartan）领衔发起了高等数学教学的一场改革，摒弃了十九世纪以来一些陈旧的内容，适应现代需要，从教材的整体结构上给予更新。一方面增加了不少新的内容，另一方面用新的观点和视角去介绍传统内容，强调了不同学科之间的联系。法国大学的数学纲要也适应了这一背景。稍后苏联亦更新了传统的菲赫金哥尔茨的数学分析，代之以佐里奇的新课本。

路易大帝中学共有约 1800 名学生，850 名高中生，22 个班级，每班 35-40 人；950 名预科生，20 个班级，每班 40-45 人，约 350 名学生住校。预科当中以理科为主，占 60%；文科 25%；商科 15%。其中理科又分为数学物理工程班，每年级有 4 个班；物理化学工程班，每年级有 2 个班；文科和商科每年级各 2 个班。

在欧洲的中学进教室听课不太容易，校方无权命令老师接待来宾，需要和任课老师沟通协商。托 Michèle Artigue 教授的福，我们得以进入预科的教室。遗憾的是我们来的时间不对，赶上期末复习考试，没有正课了，听的第一节课是工科的数学分析复习。当副校长把我们领进教室，全体孩子起立欢迎。我对教室的第一个印象是三面白墙到底，没有一幅图画或板报，也没有多媒体，如果将一面墙上的现代化绿色大黑板换成一块木质的老黑板，你会觉得雨果或者伽罗瓦在这里上课也很协调。Jérôme Dégôt 老师四十岁左右，笑眯眯的，我们看不懂法文，但是看得出来板书规范。学生手里有老师编的复习题，已经都做过了，课上对一些较难的题目进行讨论，内容是定积分和不定积分。孩子们交头接耳，十分活跃，每当老师写下一道题目，至少有十个孩子高高举手，并不断地提出问题。孩子们的板书不太规范，却很认真，演算之外还不时地画图进行几何解释。

Michèle Artigue 教授告诉我们，为了更好地了解学生，因材施教，预科的数学老师要在两年的时间全程跟随学生，师生关系融洽。同一个老师需要教数学分析、线性代数、抽象代数、常微偏微、实变复变、数论、几何学、拓扑学等大学一、二年级的所有课程，而且课程进度比我们的大学数学系要快，部分内容要深。我们一下子被震住了，这就意味着，预科的老师要对现代数学的全部基础知识了如指掌，独当一面，自主性极强。我们当中有人教了一辈子代数或一辈子分析，还从来没有互换过角色。

路易大帝中学每堂课 55 分钟，课间休息 5 分钟。我们听的第二堂课是商科的数学分析。教室后面有一张不大的世界地图，黑板上方正中贴了一幅威廉王子和凯特王妃的小照，看来法国孩子也挺喜欢英国王室啊。

Jerôme Gartner 老师是一位不到三十岁的小伙子，非常文静，讲课时显出些许腼腆。Michèle 说他刚从高师毕业，来这里试教。这堂课的内容是用 ε - δ 语言复习函数的极限，举了一个二元连续函数的例子，老师在黑板上画出 ε 在直线上的取值区间和对应的 δ 在平面上的取值区间，图形漂亮，公式清晰。课堂相当安静，学生没有课本，都在飞快地记笔记。我们旁边坐着一个女孩，身材纤细，面容姣好，斜眼看看她的笔记，十分整齐流利。让人觉得严格的数学推导与法国姑娘的美貌不大相宜。下课之后，我们就这节课对 Michèle 表达了由衷地赞赏，她笑笑说，这是路易大帝中学的一般水平，今天没有机会进入最高水平的课堂。

午饭时间到了，孩子们排成长龙，叽叽喳喳愉快地等待进入食堂，校方招待我们在食堂的包间用餐。下午去听了 10 年级（相当于我们的高一）的三角函数复习，由一位三十多岁，棕发披肩的女老师任课。可能因为孩子小，老师和学生都极其活跃，老师不停地发出“嘘嘘”声维持秩序。复习的内容不少，有两角和与两角差的公式、倍角公式以及公式的推导。然后参观了学校的物理实验室，有激光、机器人等等，实验室显不出一点富丽堂皇，反而有点像几十年前我们在中学读书时的样子，但是就从这些实验室里，很多学生进入了闻名世界的巴黎综合理工学院（École Polytechnique de Paris）。

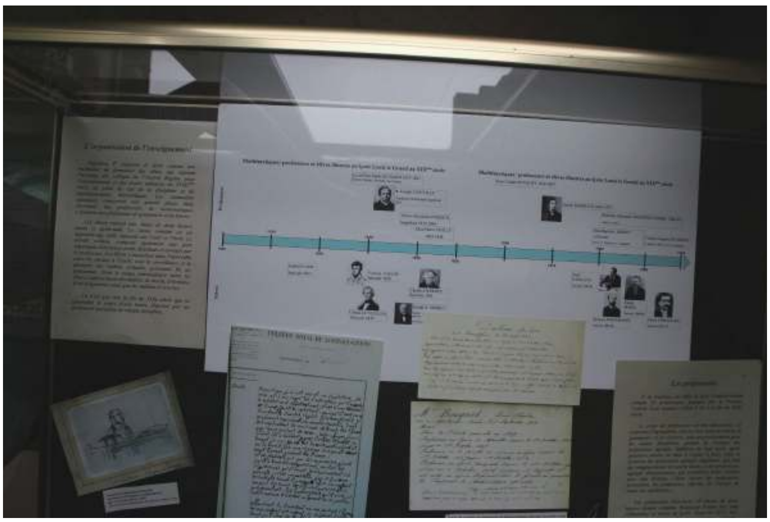
朴实无华的实验室

自豪的图书管理员

在路易大帝中学最生动有趣的节目当属参观图书馆。图书管理员 Agnès Franck 是一位身材丰满、精神矍铄的银发女士，提起自己的学校，脸上洋溢着无限的骄傲与自豪。法兰西有过辉煌的历史和文化，有过拿破仑时代对世界的征服，有过欧洲贵族以讲法语为高雅的年代，法国人的自豪和骄傲是可以理解的。Agnès Franck 告诉我们，在国家的高中毕业会考中，路易大帝中学的合格率为 99% 左右，其中三分之一能够留在本校的预科班；学校百分之百的预科毕业生能够考取高等学校，其中至少三分之一考入著名的巴黎综合理工学院，而该校每年有四分之一入校生来自路易大帝中学的预科。网上的统计数字显示，在 2006 年，巴黎高等师范学校数学物理科入学考试的第 1，2，3，8，9 名，数学物理信息科的第 1 名（中国学生），和物理化学工程科的第 1，3，4，7，11 名；巴黎综合理工学院的数学物理工程、物理化学工程、物理工程的三科状元；巴黎国家高等矿业学院的三科状元均出自路易大帝中学[4]。

Agnès Franck 指给我们看图书馆里十九世纪的硬木书柜，书柜中有他们的校友哲学家伏尔泰的全集。接着又拿出一本 1588 年法国王后凯瑟琳•德•美第奇（她原来是一位意大利公主）组织出版的书，书中介绍了意大利的历史和文化，使用了丝绸做成的

与安老师共进午餐



毕业于路易大帝中学的数学家

纸张和特殊的油墨，用手指一弹，发出清脆的金属般的声响，永远不会褪色。意大利文艺复兴时代的繁荣，真是名不虚传哪。

Agnès Franck 说学校是路易十四建立的（应该是一些教士建立，路易十四支持的），他是法国历史上很有作为的一位国王。路易大帝中学的命运随着法国近代史上的政治动荡而历经磨难，在路易十五时代再一次得到皇家的支持，学校的印章刻上了皇家的旗帜（天蓝色背景下的三朵金百合花）；学校大门刻上了路易十四和路易十五的雕像。她问我们是否知道罗伯斯庇尔，我们当然知道，那是法国大革命时期的革命领袖，中国的历史课本上必写的。她告诉我们罗伯斯庇尔是路易十六时代这个学校的学生。1775 年，在一个下大雨的天气，路易十六坐马车来学校视察，老师和学生们站在雨地里夹道欢迎。因为罗伯斯庇尔书读得好，又乖巧听话，校方让他做代表致欢迎词。他讲得很漂亮，盛赞国王的英明。十八年后，他鼓动国民公会把这位“英明的国王”送上了断头台。

从图书馆出来，路易大帝中学一位曾在北京语言大学学习了三年的数学老师Rémi Anicotte 陪我们继续参观。这位老师的中文就像我们一样流利，看上去非常机敏，他的中文名字叫安立明。路易大帝中学从高一到高三都有欧洲班（历史和地理课程特殊、英语加强），还有一个东方班，每周有一小时的中文数学课。当我们走进学校的小教堂时，安老师告诉我们其实伏尔泰不是路易大帝中学的毕业生，那个年代资源紧缺，每年冬初神父都在教堂放一小盆圣水，圣水什么时候结冰，学校什么时候给学生升火。有一年很冷，伏尔泰看到教堂的圣水总是不结冰，就偷偷去河里取来一块冰放进了圣水盆中。事情被发现了，神父大怒，伏尔泰被开除。安老师笑笑说，这件事不是伏尔泰的耻辱，而是学校的耻辱。我们问是不是因为这个，学校里没有伏尔泰院。

学校正门内的大厅中有一个小小的玻璃柜，里面陈列着从路易大帝中学毕业的数学家。其中有伽罗瓦、刘维尔、埃尔米特、阿达玛、勒贝格、波莱尔、达布等 17 位，10 位有肖像或照片，伽罗瓦的像特别可爱，20 多岁决斗身亡的他在一群表情严肃的数学家之间活脱一个小娃娃。安老师开玩笑说，幸亏学校当年没有开除伽罗瓦，否则这个玻璃柜里就无权摆上他的肖像；学校也没有伽罗瓦院，因为数学不像小说戏剧那样广为民众所知。

从路易大帝中学走过一条街，就看到了圆顶的法国先贤祠矗立在一个小高坡上，伏尔泰、雨果、皮埃尔•居里、玛丽•居里、卢梭等等为法兰西和世界的科学文化做出过杰出贡献的人们安息在这里。学校周围还有索邦大学、法兰西学院等著名的建筑，充满了学术氛围。

Michèle Artigue 教授还带我们去了巴黎东郊 Vincennes 市的 Hector Berlioz 中学，这也是一所不错的学校，具有招收预科班的资质，高中毕业国家会考的通过率在 90%。这里的每节课也是 55 分钟，课间休息 5 分钟。我们在这天下午连续听了同一个老师的三节课，再一次领教了法国中学教师的数学功底。Rhydwen Volsik 老师高高的个子，朴实而内敛。他每周上 17 节课，教三个正常班，5 个兴趣班：兴趣班包括 10 年级的图论，11 年级的概率论，12 年级的群论。第一节是 10 年级正常班的三角函数复习，第二节是 12 年级兴趣小组的群论，有五个男孩儿，三个女孩儿，因为这几个孩子准备高中毕业后去英语国家留学，老师用英语授课，并发给学生和我们每人一份他编写的英文讲义 An Introduction to Group Theory，我们终于能够听懂整节课，不用看着公式猜了。 这节课的内容是群的定义，孩子们争着到黑板上证明诸如等边三角形的对称变换为什么构成一个群，而非零有理数的除法为什么不能构成一个群之类的问题。第三节是 10 年级兴趣小组的图论，不到 10 个学生，仍然发讲义，讲英语，不是一般性的介绍，而是严格的定义和推导，小小的孩子们看来是听懂了，课堂上仍然异常活跃。

特别搞笑的是，下课后我们打算在校门口拍照留念，绕校园一周竟然找不到我们心目中一所重点中学应该有的排场漂亮的大门。直到 Michèle Artigue 和学校的老师谈完事情出来，才告诉我们进入学校大楼的铁栅栏门旁有一个牌子，那就是学校的标志。

图论兴趣小组

学校的标志

制度化的英才教育

Michèle Artigue 毕业于巴黎高师，在七大数学系工作，多年来讲授数学分析。她组织并领导了系内一个数学教育研究所（IRME），研究所的成员有几位七大的老师，半天在系里上课，半天在研究所，或者四分之三时间搞数学，四分之一在研究所；还有十几位巴黎市内各地区的数学督查，二十几位中学数学老师。我们问其他大学有没有这样的研究所，她说极少，也没有全职从事数学教育研究的教授，最多半职，但是社区大学有全职从事这方面工作的老师。

Michèle Artigue 特别敬业，她领我们去学校或者研究所访问，从来都是健步如飞，我们当中比她年轻二十岁的老师都不大跟得上趟。作者与她在执委会共事三年，经常通过 ICMI 的电子邮件交流得知她在世界各地的发展中国家飞来飞去，如非洲、拉丁美洲，在一些条件特别艰苦的国家和地区举办教师培训班，组织各种活动，有时甚至在那里滞留一个多月。最近她又

Michèle Artigue 教授

发起了一个克莱因（Klein）项目，请数学家们撰写短小的科普文章，帮助中学老师了解数学的最新动态。如果吉尼斯要评选最诚恳、最敬业、最勤奋的人，Michèle Artigue 应当是一个合适的人选。在我们离开之后的一周，世界各地的数学教育工作者来到巴黎，为她的光荣退休举行了纪念会，我们未能出席，请出席会议的中国老师转达了我们的感谢和敬意。

在巴黎七大与 IREM 的老师座谈时，他们不理解并感到惊讶的一点是：中国的数学基础教育那么出色，国际奥林匹克竞赛连年第一，国际上针对中学数学课堂的各种测试从来名列前茅，你们这几个人为什么要来法国考察数学基础教育呢？

应 Michèle Artigue 的邀请，张英伯和李庆忠联名在他们的讨论班上做了一个《中国数学教育的传统》（Tradition of Chinese Mathematical Education）的报告，介绍了中国数学教育的历史和现状。我们五千年的文明古国是一个非常重视教育的国家。在渔猎和农耕时代，中国的生产力名列世界前茅。当然从工业时代开始中国就没有跟上世界前进的脚步，但是清末民初以来，我们逐步发展了民族工业，引入了世界通行的学校教育。1949 年之后，我国教育的基本特点是中央集权下的高度统一：统一管理，统一大纲（或课标），统一课本，统一考试。改革开放后课本有所松动，考试改为各省命题，但全国的中小学仍然在统一课标的指导下齐步前进。在大多数国家作为最低标准的课标，在我们这里却是上下均不可超越的绝对标准。

在我国与国际社会隔绝的上世纪 49-78 年，这种体制培养了一批国防工业和其它领域亟需的科技人才。改革开放之后，这种体制使得我们的学校总体水平高于发达国家的一般中小学，使得我们可以倾全国之力，像培养参加奥林匹克运动会的运动健将那样，选拔和训练数学出色的中学生去参加国际奥林匹克数学竞赛，并连年高居榜首。但这却无法产生引领科学技术发展的大科学家。西方国家的数学基础教育有很多弊病，特别是过度的去数学化倾向，但是他们十分重视英才教育，因而可以培养出最优秀的人才去引领科技发展，去治理企业和国家。

事实上，孩子们的天赋和才能表现在各个不同的方面，差异是非常大的。这就像在体育课上让学生们跳高，假设有 5% 的孩子能够跳过一米八，95% 的孩子只能跳过一米二，如果标杆一定要固定在一米五不许改变，那么很多孩子因跳不过去而丧失了信心，少数有天赋的孩子因无法继续提高而丧失了成为运动健将的可能。

当得知我们的国际奥林匹克数学竞赛金银铜牌得主大部分没有继续学习数学，而是选择了大学的其它院系，学了数学的也只有少数人在从事数学研究；我们同一个区县的所有中小学里所有的学生，无论喜欢数学与否都用同样的数学课本，所有的初中生都参加市或区县统一的高中入学考试（简称中考）；同一个省或直辖市的所有高中毕业生都参加统一的高等院校入学考试，所有的高等院校都按照统考成绩统一录取学生时，IREM 的老师也很惊讶，难以理解这种官方对学校的严格控制是如何操作的。看来是不同的政治体制造就了不同的教育制度，互相理解起来还真有点儿费劲。

在 IREM 的讨论班上，2009 年春天访问过北师大的教育部数学督察也来了，我们高兴地握手问候。记得他那时候说过，中国学生的数学基础水平比欧洲国家要高，比法国德国高两年，比意大利高三年。

法国的小学（5 年制，6-11 岁）和初中（4 年制，11-15 岁）课程纲要对全国学生的要求是一致的，但是学生从高中开始分流，40% 进入两年的职业教育，称为 Professional，毕业后使学生具有最低的工作技能，但仍然有机会进大学深造。这部分学校又分成三类：

CAP	一般教育和特殊的实践技能
BEP	技术教育
Baccalauréat Professionnel	职业本科

数学课的周学时分别为 1.5-2,2-3, 和 2 学时。课程内容差别很大，视专业而定，比如有平面和空间几何、三角函数、方程和不等式、指数和对数、金融数学基础、经营数学，也有一些微积分初步等等。

60 % 的学生进入高中（三年制，15-18 岁），头一年是所谓的“判断阶段”（cycle de détermination），学习相同的课程；后两年是所谓的“结业阶段”（cycle terminal）在老师的指导下分科。这分为一般方向和技术方向。其中一般方向包括三个系列：

L	文学
ES	经济和社会科学
S	科学

而技术方向包括四个系列：

STT	第三期科学与技术
STI	工业科学与技术
STL	实验室科学与技术
SMS	医药和社会科学

其中一般方向科学系列的 12 年级（高三）课程纲要由北京师范大数学系留法教授邓冠铁译成中文了，内容有复数、微分、积分、向量，相当于工科大学一年级的数学水平[2]。法督所言我们的数学基础水平比别国高，当指小学和初中。

我们很长时间搞不明白中国小学和初中的数学为什么会比欧美国家强，这些课程不是我们从十九世纪末二十世纪初开始向西方国家，五十年代后向前苏联学过来的吗？在今年七月份韩国举行的 ICMI 执委会上，有一次作者与意大利的执委 Mariolina Bartolini Bussi 一起乘出租车，她是搞小学数学教育研究的，为人真诚，谦和善良。意大利的小学数学被认为最差，Mariolina 曾感叹过多次，在车上她又一次谈到中国小学生的计算能力要比意大利强得太多。作者告诉她中国上世纪前半叶所用的数学课本都是从发达国家引进，或参照他们的课本编写的。她说在那个年代我们意大利小学生的计算能力也是很强的，这话肯定不假，因为她本人就是那个年代的小学生。这句话令人恍然大悟，我们在上世纪后半叶的很长时间里与国际社会脱节，始终不知道西方国家已经在实施大众教育，推行教育公平的过程中将数学大大地弱化了。我们将那时的课程保留了下来，现在还没有完全被弱化掉；加之我们中国老师的勤恳敬业，并且国家多年来在中小学数学教育中贯彻了重视“基础知识，基本技能”的双基原则，自然比别人强了。看来有一弊也可能会有一利，历史就是这样螺旋式上升的啊。

数学家的主导作用

Michèle Artigue 还陪同我们访问了法国教育部，接待我们的是教育部国际司亚非科科长 Marc Melka 先生及其秘书，他们系统地为我们介绍了法国教育的全貌。他说法国每年有 280 万学生进入高等教育，高等教育分成两个部分：83 所大学（Université）和 300 所大学校（Grandes Écoles）。学生申请入大学不用考试，60%都能成功。大学校则不然，只有不到 7%的学生可以通过各校严格的考试被录取，每年进入大学校的学生约为十一万人。大学校规模很小，著名的巴黎高等师范学校只有 900 名学生。

《泰晤士高等教育》对巴黎高师的介绍是这样的：“巴黎高等师范学校…被普遍视为法国最具选拔性和挑战性的高等教育研究机构，很长时间以来它一直是法国的一个传奇。”[4] 高师的学生得到学士学位后，需要在本校教师的指导下准备法国教师会考（agrégation），这个会考极为重要，不但确定是否具有中学教师资格，而且会考成绩将成为其它求职，例如高校求职的重要参考。学校全部的教育、科研、硕士与博士的培养都是与大学合作完成的，学生一般到巴黎六大、七大或十一大注册博士，论文答辩后就取得他们注册学校的博士学位。巴黎高师的学生最为重视的就是高师的文凭，他们自我介绍时首先说自己是高师的学生，然后才说是哪个学校的博士。

高师有 14 个教学研究系。与这些系关联的有 35 个混合研究单位，与它们合作的科研中心有国家科学研究中心（CNRS）、国家健康与医药研究所（INSERM）、国家信息与自动化研究所（INRIA）、国家农业科学研究院（INRA）、国家教学研究院（INRP）[4]。不同领域的科学研究为巴黎高师的学科建设创造了得天独厚的条件和源源不断的滋养。往往前沿的科研成果一旦出现，就能够很快在巴黎高师发展成一个新学科。在法兰西学院和法国科学院的院士中，巴黎高师的毕业生分别占 1/4 和 2/5。

Marc Melka 先生说大学校是在法国大革命后的拿破仑时代，受到中国古代科举制度选拔官员的启发而产生的，初衷是希望建立一个新的人才培养模式，适应工业革命后科学技术的发展。

法国的经济位于世界第五，科研教育位于世界第四。法国不仅有引领世界的时尚和闻名世界的美食，也有高科技领域中的诸多成就：比如核工业、航空工业、世界最长的海底隧道。法国有 56 名诺贝尔奖得主，居世界第四，11 名菲尔兹奖得主，居世界第二。

Marc Melka 先生最后谈到了近些年萨科齐政府推行的教育改革。改革的起因是大学校规模太小，在名目繁多的世界大学排行榜上无法名列前茅，比如在上海交大的榜上所有的大学校都名列第 70 位以后，文章篇数比中国的大学要少很多。为了将名次提前，达到吸引国内外学生的目的，进行了

代表团与法国教育部官员合影

大学校的扩招与合并。另外法国在国际奥林匹克竞赛中成绩不突出，在历次国际中小学测试中排名并不靠前，Michèle Artigue 和安老师也谈起过这些事情。在法国民众当中有各种各样的舆论，其中一种舆论认为大学校每年只能培养出少数几位拔尖的科学家，许多进入预科没考上大学校，或者进了大学校没成为大科学家的学生都给他们垫背了。

Marc Melka 先生说，从另一个角度来看，这些大学校走出了很多诺贝尔奖得主，法国的 11 位菲尔兹奖得主，除 Alexander Grothendieck 一人之外全部毕业于巴黎高师。法国虽然奥数奖牌不多，可是有许多天赋很高，有培养前途的学生，就是我们常常谈到的尖子生（elite students）。

法国数学家温德林•维尔纳（Wendelin Werner）曾就 2009 年 1 月 22 日萨科齐总统所做的演讲写过一封公开信[3]。他在信中说：“在短短数十分钟之间，就将学术界和政坛间尚存的脆弱共识化作乌有。”“身为一个精明强干的政客的你，以及你那些通晓大学事务的顾问们，本应该预见到此演讲将带来怎样严重的后果。”“这十五天来，许多出色的学生和同事，因心生反感，纷纷向我表述了他们渴望出国的意愿。我自己也承认，在网络上聆听你的发言的某个瞬间，我亦萌生去意。”

“对于科学事业的价值，你所表现出来的微不足道的敬意，并不仅仅局限于你将它歪曲成追名逐利，而是你斩断了多少聪颖的青年学生投身于科学的信念。一年多以来，科研部长和诸位顾问一再向我们保证，你何其由衷地希望支持和帮助法国科研。然而，你最终却予它以羞辱，并不惜触及它的原动力：科学伦理。”

2006 年的菲尔兹奖得主温德林•维尔纳没有因获奖得到利益（那里的大学不因获奖而提高工资或发放奖金），而是用获奖之后的学术地位从而在政界得到的话语权，勇敢地站出来为法国的科学和科学家说话，用自己的良知捍卫着科学的纯洁与尊严，令人肃然起敬。正是因为一代又一代科学家不懈地努力，法国的科学才有今天崇高的社会地位。

在上世纪八十年代，关于法国的平面几何教学曾经爆发过数学家之间的一场争论。争论的一方是以迪多涅（J. Dieudonne）为代表的布尔巴基学派，主张取消平面几何，理由是它已经没有用处，应该用更加严格的解析几何取而代之。另一方以菲尔兹奖得主托姆（Thom）为代表，观点如下：第一，平面几何反映了现实空间的客观形态，人们需要了解诸如点、线、面一类的基本概念；第二，平面几何为人们提供了人生第一次系统的逻辑训练；第三，平面几何提供了几何直观。托姆举了个例子，说他给迪多涅的儿子（也是一位数学家），在纸上画了一条直线，问这是不是直线，小迪多涅说不能断定，需要给出方程。

美国的数学家经常抱怨美国的数学基础教育很糟，几何推理全都没有了。还是在今年七月韩国的ICMI执委会上，一天清晨，作者和来自美国的执委，耶鲁大学的代数学家 Roger Howe 教授一起散步。Roger 谈到中国的数学基础教育比美国强很多，作者问他美国有杰斐逊科技高中吧？ Roger 反应特快，说那是极个别的现象（very exceptional），作者说不是太个别吧？每所城市都有，大城市还有多所。Roger 说那倒不假，有些私立中学质量非常高。作者说那就够了，扯平了。中国也有自己的问题，并且在改革开放以后从美国进口了全套的数学教育理论，包括取消或削弱平面几何。Roger 问：引起了中国数学家的集体愤怒？作者说美国数学家不是也在上世纪末集体愤怒过一次吗？现在不是有很多像您这样的数学家积极参与进去力求改进吗？又扯平了。Roger Howe 是美国科学院院士，是我国代数学家励建书在博士期间的导师，近十年来，他和美国的一些数学家，如几何学家伍鸿熙在基础教育领域脚踏实地、全心全意地工作，诸如参与数学课标的制定，为中学老师们编写辅导教材。在世界数学教育大会上（ICME），Roger Howe 认真地从头到尾旁听了几次主报告和分组报告。数学家打算做点什么，总是非常投入。

我们的英才教育尚未真正起步

从发达国家的经验看来，一个有数学天赋的孩子成长为数学家有两个要素：第一是深厚宽广的基础知识，就像法国的预科和高师为学生打下的底子，这是数学家一辈子受用不尽的童子功；第二是在博士阶段能够被领进数学的核心领域，去思考深刻的本质问题。

如果说从十八世纪到二十世纪中叶的工业时代，数学基础教育的主要内容是初等数学，以欧几里得原本作为蓝本，那么到了二十世纪下半叶以后的信息时代，随着人类知识迅猛的积累，数学基础教育的内容应该包括部分高等数学。牛顿说他发现微积分是因为站到了巨人的肩膀上，而一个现代人要想站到知识巨人的肩膀上去搞发明创造（或曰创新），必须加快攀爬的速度。

诚然，一个出色的企业家比如乔布斯和盖茨，可以不读博士，甚至可以不必读完大学，一个作家也可以不读博士，甚至不读大学，他们需要的是另一种智慧。但是从事科学研究和前沿技术工作的人们，必须有专业领域深厚的知识积累。特别是基础科学研究，站不到巨人的肩膀上，是万万做不出来的。

按照法国的传统，很多行业的高级工程师，比如汽车业、制造业不一定要有博士学位，此外工厂或公司的经理、管理人员也不一定要有博士学位，但是他们当中的佼佼者，大部分出自工科或商科的大学校，其中特别突出的是巴黎综合理工学院。而一些现代科学，比如在医学、计算机科学、经济学等等领域工作的技术人员，一般需要在大学拿到博士学位。

政界对知识的需求也越来越明显，如果说上个世纪前半叶还可以有草莽英雄打江山、坐江山，那么现代社会的国家元首们一般都是学富五车，深谙社会科学与人性的本质，名大学甚至名校博士毕业的。

中国的报纸和广告常常说不要让孩子输在起跑线上，我们是不是把起跑线提前了十年？提到幼儿园了？有的孩子还没有跑到真正的起跑线，就已经累得精疲力竭，或者已经被超量的解题训练逼得不胜其烦，反而跑不动了。

实际上，我们对于有科学天赋的孩子的培养确实输在了起跑线上。从初中到高中，除了初等数学的大量题型，除了奥数，从来没有认真设置过针对他们的数学课程，而数学思维，是科学研究和技术创新的基础，从法国的预科，不但理科，而且工科和商科都要学习很深的数学就可以看到这一点。

对于这一套做法老百姓也早已习以为常。前几天有个重点中学给即将进入高三的学生发了份调查表，问他们愿意在数学课上学点与高考没有直接关联，但对未来发展肯定有用的 AP 课程，还是愿意反复练习课内的知识备考，竟然所有的学生都回答愿意备考。涉及到命运攸关的高考，谁敢掉以轻心呢？这个暑假我们在首都师范大学办了一个免费的暑期班，请来几位数学家，其中包括四名院士为中学生介绍一些目前数学的前沿领域，并给出高等数学的两个系列课程，来者寥寥无几。据一位重点中学的老师说，通知发下去了，如果是与高考有关的辅导，收费再高也会有很多人去，否则不花钱也没有人愿意“耽误时间”。联想到北大中文系教授钱理群为中学生讲文学，开始时还颇有一些学生去听，越到后来人越少了。孩子们说，“钱老师，我们喜欢您的课，但是学习太紧张了”。

改革开放以来，我们从计划经济走向了市场经济，但是教育制度并没有实质性的改变。近二十年来，高考加分引发了奥数的全民化；从全国统一高考改成各省市分别高考又引发了地区之间高等教育资源进一步向大城市倾斜，农村孩子入学更加困难。难怪有些人呼吁恢复全国统考，似乎高度统一的权利需要高度统一的配套政策，稍微放开一点儿在公平性上就会出现问题。北京近些年逐步形成的小升初择优电脑派位，即小学推选少数学生，由重点中学挑选，一方面引发了奥数在小学阶段的泛滥；另一方面加剧了教育领域的钱权交易。原本在发达国家的一项按照学区入学的教育公平化政策，到我们这儿就走板变味儿了。

个中原委大约有三：第一西方国家的学校有自主办学的权利，公权力不得干涉，更不能介入。设想要是他们的部长把自己的孙子跨学区送进好学校，有可能第二天就被媒体曝光，第三天就辞职下台了。第二这些国家的中产阶级足够强大，人数众多并且有充分的经济实力，他们要想把小孩子送到好学校去读书，只要在那个学区买房搬家就行了。第三西方的社会讲究诚信，小学的成绩和老师的推荐都是可信可靠的。

但是在我们这里，中产阶级人数很少，经济实力不够，即便北京一般的白领，买房搬家换学区也是不可能的，一年的工资只够买两、三平米甚至不到。而一些高官的孙子不必按学区，一个电话就上最好的学校；一些大亨的孩子也可以通过捐助上好初中，甚至为学校修半座教学楼、一个新大门，更加凸显了社会的不公。买房不可能，小学的成绩不能全信，重点初中想招好学生怎么办呢？或者反过来，一般家庭的孩子想上好学校怎么办呢？只能依靠相对客观的奥数了。据北京某些优秀的初中估计，大约有50％的学生靠着奥数入学，这部分学生是学校保持高水平的希望所在；而40％左右择优电脑派位的学生当中一半靠撞大运，另一半就是以各种名目，很多是由企事业或政府单位出面进行的公权力的干预了；剩下的10％进行

所谓共建，那就是金钱交易了。上述比例在各个优秀的初中可能上下波动，但都有比例不小的靠奥数入学的生源。怪不得有些重点中学主管招生的校长每到七、八月份就不得不关闭手机，甚至逃到外面去住，否则铺天盖地的电话和条子会把人淹没。在偏远地区的省会、中等城市、地级市和县城、在乡镇农村，基本没有奥数，但无论是大城市还是中小城市，公权力对中小学招生的干预和介入都是共同的。事实上，公权力对招生工作、课本选择等方方面面的强大干预及其幕后交易，已经成为教育领域心照不宣的潜规则。

举个不恰当的比喻，庙里老和尚命令一个小和尚扫院子，如果老和尚坐在石凳上，不断地指使小和尚第一扫帚扫脚下，第二扫帚扫花坛，第三扫帚扫路边，没有起码的信任和尊重，小和尚还扫得下去吗？现在的教育行政部门与中小学的关系，就有点类似于这个样子。看来我们的许多事情要做回符合常识、常理都是极其不容易的。

说到底，我们教育的病根儿不在教育，而是在体制。实事求是地讲，有能力辅导奥数的老师数学功底都是不错的，只是我们的路走偏了。

在目前的信息时代，知识和资讯的广泛传播，使得人类的学习能力越来越强。孩子们见多识广，很多孩子的学习能力远比上个世纪的同龄人要强。

发达国家早就认识到这一点并且付诸行动了，从起步到现在，他们已经有了五六十年在中小学进行英才教育的经验。比如美国的 AP 课程，英国的 A-level 课程，法国高中一般方向科学系列的高三课程，都是为数学天赋较好的中学生讲授大学一年级的微积分和线性代数。更令人不得不服的是，除此之外，他们还有特别优秀的高中，经过严格的选拔对天赋很高的学生特殊培养。比如美国的私立中学和公立的科技高中，英国历史悠久的私立中学，法国设置预科的高中，德国则是把优秀的高中生直接送到大学上数学课。这些特殊的学生，在进大学之前已经到达了大学数学系二年级，甚至三年级的水平。

近几年来，我们国家大城市的很多重点中学设立了国际班，将国外高中不同的高等数学体系引入中国，孩子们毕业时报考相应国家的大学。据社会科学文献出版社发布的《国际人才蓝皮书：中国留学发展报告》显示，中国出国留学人数已占全球总数的 14%，位居世界第一，2011 年人数达 33.97 万人。“大众化”、低龄化成为中国留学生的突出特点，有九成的留学生出国依靠自费。那么，家庭没有经济实力将孩子送往国外大学怎么办呢？最近，相当多的重点中学产生了编写自己的校本教材，建立中国自己的英才教育体系的想法。

在我们的中学和大学，颇有一些有识之士认为我们可以在逐渐宽松的政治气氛中做点事情。中国是到了发奋图强，把我们自己的数学英才教育搞上去的时候了。法兰西的经验和做法，值得我们借鉴。

致谢：Rémi Anicotte 先生认真核对了文章的细节，提出修改意见，并提供了光荣院的照片，特此致谢。文中的其他 11 张照片由金宝铮和姚玉平拍摄。

参考文献

1. 数学通报，中法数学教育座谈会实录，叶彩娟整理，第 48 卷 1 期，P12-16，2009 年。
2. 数学通报，法国数学课程标准简介，邓冠铁译，第 48 卷 9 期，P1-6，2009 年。
3. 数学文化，Wendelin Werner 的公开信，本刊 2012 年第 3 卷第 4 期，52 页。
4. 维基百科

作者简介：张英伯，北京师范大学数学科学学院教授，本刊编委，国际数学教育委员会（ICMI）执行委员，原《数学通报》主编。

文志英，现任清华大学数学系教授。武汉大学数学系毕业，获南巴黎大学数学博士。曾任武汉大学数学系教授和清华大学数学系主任。

致法国总统萨科齐的公开信

Wendelin Werner/ 文　陈昕昕 / 译　文志英 / 校阅

背景资料：温德林·维尔纳（Wendelin Werner）为世界著名概率论专家，1991年毕业于法国高等师范学校，1993年于巴黎六大获博士学位，他在自回避随机游动，Schramm-Loewner演化和相关的概率论理论，以及数学物理等领域有突出贡献，于2006年获菲尔兹奖，此前还获得过Loève奖，费马（Fermat）奖和Davidson奖等国际著名奖项。现为法国科学院院士，巴黎十一大与巴黎高等师范学校教授。下面的公开信源于萨科齐2009年1月22日在法国总统府爱丽舍宫的一次讲话。在那次讲话中，萨科齐指责法国教育科研落后，要在高校进行人事制度改革，大幅裁减教育科研经费，削减新的职位以至撤销法国国家科研中心等，他的这个讲话激怒了法国教师、科研人员和学生，引发了强烈的反对。维尔纳在这封信中表示了他的态度，有很大代表性。作为一个科学家，他将菲尔兹奖不单视为荣誉，而是代表他的社会责任，用来坚持真理和正义，捍卫教育、科研与学习的权利。同时他对数学基础的认识以及对法国教育科研发展的真知灼见值得我们认真思考。此信发表在法国《世界报》上，该报刊蜚声国际新闻界，在世界上有很大影响。（文志英提供）

总统阁下：

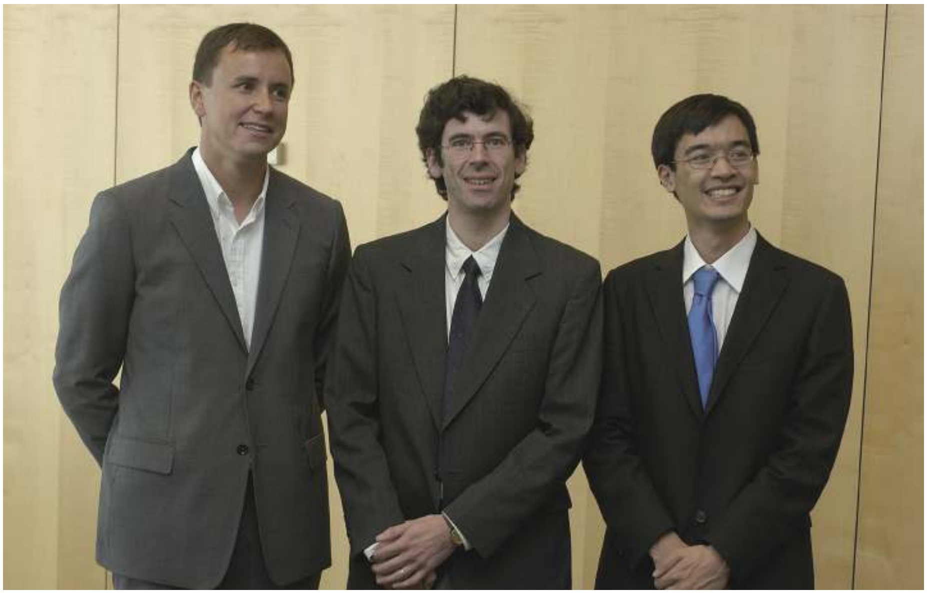
我从未料想，有朝一日我会处于今时之境地，提笔写一封公开信予法兰西共和国总统。因我心意之所向、志趣之所在，且愿为之奉献终身的，唯有研究数学结构，兼以此探讨于志同道合者（无论他们身在法国还是国外），并传道授业于生徒。我有幸于有生之年功成名就，获取殊荣[1]。此荣耀赋予我之于学术界特定之责任，允我在媒体与政界之前不至于人微言轻。正如德国社会学家马克斯·韦伯于著作《学者与政治家》[2]（巴拉克·奥巴马也曾于就职演说时隐晦的引用）中所示，我们应该共同承担社会责任。正是以此之名，我今日写信与你。

你或许并没有觉察到，在我们科学界，对于你的态度几乎是一致性的心怀疑忌。在你我仅有的短暂面谈中，你对我坦言，相互交流、彼此沟通是何其重要，因唯有如此，才能协调分歧、重聚人心。故此，请再一次容许我向你阐明心迹，改以公开信的方式。

一年前，你前往Orsay[3]庆祝Albert Fert获得诺贝尔奖[4]。当时你所做的演讲中有一段话愈加坚定了我畅言的信念："这任务如此之复杂，故而我希望围聚团结更多的法国学者与学术团体，以计议如何重新构建我们的科研机构并以至高效的方式引领其前进。我将会定期咨询学者大师们，以期倾听他们的意见。"既如此，我便直言不讳地向你陈述我的意见。

2009年1月22日，你所做的演讲，在短短数十分钟之间，就将学术界和政坛间尚存的脆弱共识化作乌有。诚然，在那之前，针对贵政府采取的施政方略和表达的意识形态，学术界之主流已然表现出敌对的姿态。然而，我于此信中，只想论述你的那次演讲以及其造成的种种后果。

我那些听过你那次演讲的同僚们，无论他们是现场聆听还是借由网络，无论他们的政治倾向是左派还是右派，无论他们身处法国还是海外，无不为之骇然（请见《自然》



2006 年菲尔兹奖获得者安德烈•奥昆科夫（左），温德林•维尔纳（中）和陶哲轩（右）。另外一个获奖者俄国数学家佩雷尔曼拒绝接受菲尔兹奖

对于科学事业的价值，你所表现出来的微不足道的敬意，并不仅仅局限于你将它歪曲成追名逐利，而是你斩断了多少聪颖的青年学生投身于科学的信念。一年多以来，科研部长和诸位顾问一再向我们保证，你何其由衷地希望支持和帮助法国科研。然而，你最终却予它以羞辱，并不惜触及它的原动力：科学伦理。

正如你自己所述，对于法兰西这样一个国家而言，科学研究应该受到充分的优待。但就现实的种种行迹而言，贵内阁再也不能从科学界获取任何信赖。

我有很多个性宽容且对政治态度温和的同事，他们如今也表示，不敢轻易参加研讨会或是委员会，唯恐被视为工具。科研部和总理办公室想必已然意识到，你将他们引入了进退维谷的僵局。这些日子以来，我一直试着思索，该用怎样可行的方法挽救那些可挽回的事态以便脱离如今的困境。

当务之急，便是请你远离那些帮你撰写此演讲稿的顾问们，并且疏远那些不曾向你警示此类言论之恶果的近臣。1 月 22 日你大放厥词，在我们之间凝结出巨大的隔阂；而他们对此负有不可推卸的责任。

在我看来，他们犯下了严重的错误。而正是你在自己的信条里提出，任何错误都应该被评估并且给予相应的惩处。唯有如此，才能让我们科学界重拾些微期望，并且在平和的氛围里，以更加坦诚的方式致力于改善我们的体系，而非纠结于意识形态的争端。

对我而言，则必须重新构建真诚对话的平台。高校与科研体制诚然亟待治理，然而，正如你一年前所提及的那样，这是极其复杂的任务。其改革需遵客观之理，循智慧之道。而此时此刻，你需要重校准星、有的放矢。

杂志上的反应）。有许多当日身在爱丽舍宫的人告知我，他们如何踌躇着不敢公然走出演讲厅。而诸多愤慨的反应自此刻滋生不息。

遥想彼时，你置身爱丽舍宫那庄重肃穆的场景下，面对着包含了众多科技工作者的公众作此讲演。而我，则愿以一种家常的语调和简约的句式向你陈情，尽管这类文法如此随兴，已然在别处招致重重评议。当人们问及我，高中阶段的数学教育对于一个完全不需要藉此为业的人而言究竟有何意义。我曾答曰，科学可造就高素质的公民：其思维法可以教人辨别公正严明的逻辑推理与似是而非的错误论断。

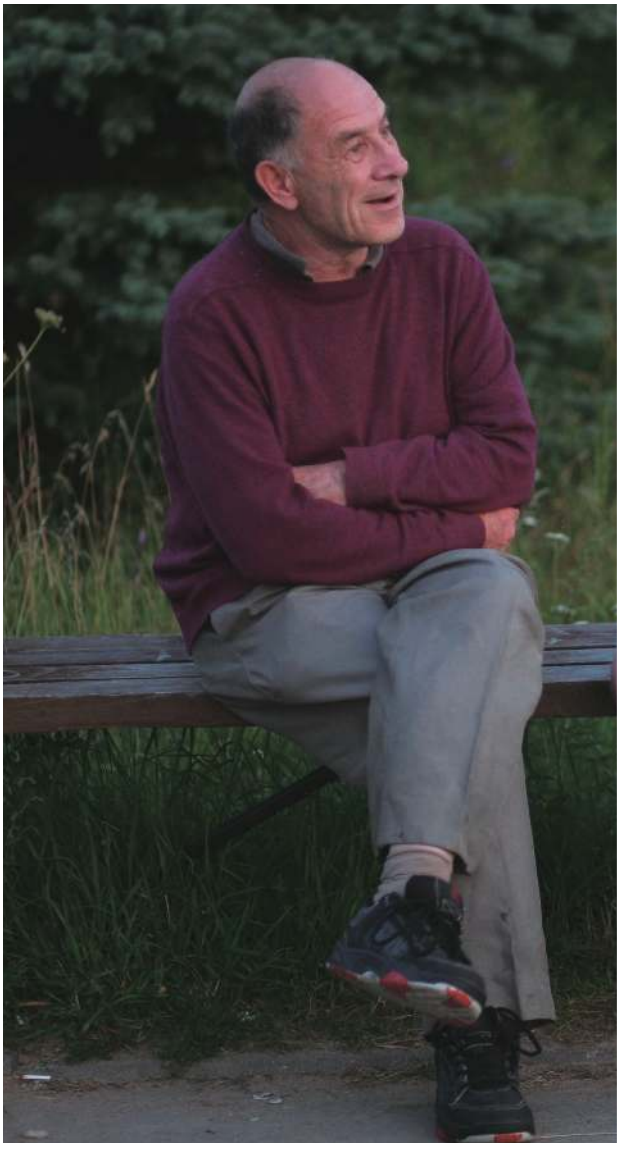
审慎与质疑，及至科学真理的确立方式，俱可适用于更为广阔深闳的领域。而你的演讲词充满了显见的谎言、滥用的推广、极端的简化、可疑的诡辩，这一切令所有的科技工作者困惑不安。你论及评估的重要性，然而你用以导出结论的方式，正是所有严谨的科技工作者和评估人员一致摒弃的、仓促的、充斥着偏见的推理。

请相信，我们如此之多的人，都对此感到不可置信。身为一个精明强干的政客的你，以及你那些通晓大学事务的顾问们，本应该预见到此演讲将带来怎样严重的后果。我完全无法理解，究竟是怎样的动机促使你展现出这样粗暴的言论和轻蔑的态度（引用自委员会主席 Danièle Hervieu-Léger，她当日应邀出席），以致立刻就群情鼎沸，根本无法进行客观公正的交流沟通。这十五天来，许多出色的学生和同事，因心生反感，纷纷向我表述了他们渴望出国的意愿。我自己也承认，在网络上聆听你的发言的某个瞬间，我亦萌生去意。

译者注：

1. 指 2006 年所获菲尔兹奖。
2. 两著作《学者的职业和使命》与《政治家的职业和使命》的简写。
3. 巴黎十一大所在地。
4 . 指 2007 年所获物理诺贝尔奖。

论数学教育[1]



Vladimir Arnold / 文
欧阳顺湘 / 译注

[1] 作者为著名的俄罗斯数学家弗拉基米尔•阿诺德（Vladimir Igorevich Arnold, 1937-2010）。他是20世纪最伟大的数学家之一，曾获克拉福德奖（1982）、沃尔夫奖（2001）和邵逸夫奖（2008）等奖。此文为1997年3月7日作者在法国巴黎探索文化宫（Palais de la Découverte，为法国科学教育中心博物馆）所发表演讲的扩充版，以俄文发表于Uspekhi Mat. Nauk 53 (1998), no. 1 (319), 229-234; 英译见Russian Math. Surveys 53 (1998), no. 1,229-236。英译网页版本可参http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html。亦有中译流传于网络。然而此中译不仅有笔误、漏译等不完善处，错译也不少。因该中译译者佚名，现遵《数学文化》主编之托，参考该中译，根据英译重译该文。英译中也有不清晰处，是故徐佩教授也帮助参考了俄文。译文中尽可能为初学者可能不熟悉的部分、较易说清楚的内容加了些注释并配图以方便阅读。翻译本非易事，本文涉及的数学内容又很广，错误、不恰当处请读者批评。最后，关于阿诺德的故事以及与本文类似的观点的更多阐述，有兴趣的读者可阅读他于1999年春意外受伤后养病期间撰写的书 *Yesterday and Long Ago*（原书为俄文，2006年出版；英译2007年由Springer出版）。
这篇文章反映了阿诺德对布尔巴基的批判，对庞加莱（Jules Henri Poincaré, 1854-1912）直觉主义的支持。值得指出的是，今年恰为庞加莱逝世100周年。

图 1 获 2008 年邵逸夫数学科学奖时的阿诺德（图片来源：http://shawprize.org）

数学是物理学的一部分。物理学是一门实验科学，是自然科学的一部分。而数学乃是物理学中实验代价较小的部分。

雅可比恒等式（蕴涵垂心定理：三角形的三条高相交于一点）[2] 如同地球是圆的（即同胚于球体）一样，是一个实验事实，只不过发现前者不那么昂贵。

20 世纪中叶，人们试图割裂物理学与数学。其后果已被证明是灾难性的。整整几代数学家在对其所从事科学之另

[2] 阿诺德后来有文章更具体地谈到这个观点。例如，在他写的 *A. N. Kolmogorov and natural science* (Russian Mathematical Surveys, 2004, 59:1, 27–46）一文中，即明确提到由雅可比恒等式 $[(a, b)], c]+[(b, c), a]+[(c, a), b] =0$ 可得出三角形三条高相交于垂心，其中 $[\cdot\ ,\cdot]$ 为向量积。(因此中学课程就应该学习该恒等式，不必要等到学李代数等较高等课程时才学习。）更多介绍可以参考《美国数学月刊》上 Nikolai V. Ivanov 的文章 *Arnol′d, the Jacobi Identity, and Orthocenters,* The American Mathematical Monthly, 2011, 118:1, 41–65。顺便提一件轶事。爱因斯坦的传记中记述过他小时两件“奇迹”。一是 5，6 岁时对指南针感兴趣，二是 12 岁时对欧几里得几何着迷，特别提到垂心定理。

Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap.

The Jacobi identity (which forces the heights of a triangle to cross at one point) is an experimental fact in the same way as that the Earth is round (that is, homeomorphic to a ball). But it can be discovered with less expense.

In the middle of the twentieth century it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science and, of course, in total ignorance of any other sciences. They first began teaching their ugly scholastic pseudo-mathematics to their students, then to schoolchildren (forgetting Hardy's warning that ugly mathematics has no permanent place under the Sun).

Since scholastic mathematics that is cut off from physics is fit neither for teaching nor for application in any other science, the result was the universal hate towards mathematicians - both

图 2 法国巴黎探索皇宫

图 3 法国巴黎高等师范学院

一半极其无知的情况下成长，遑论其他科学了。这些人先是把他们丑陋的学院式伪数学传给他们的弟子，接着这些丑陋的伪数学又被教给中小学校里的孩子们（他们浑然忘却了哈代的警告：丑陋的数学在世上无永存之地[3]）。

学院式数学脱离物理，既于教学无益，又对其他科学无用武之地，其后果是人们对数学家的普遍怨恨。这样的人有学校里那些可怜的孩子们（他们当中有的可能还会成为将来的部长），也有应用这些数学的人。

由那些既无法掌握物理学又困倦于自卑中的半桶水式数学家们所拉起来的丑陋建筑，总使人想起"奇数的严格公理化理论"。显然，完全可以创造一种能够使得学生们称赞其完美无暇、内部结构和谐统一的理论（例如，可定义奇数个项的和以及任意多个因子的乘积）。按此狭隘观点，偶数要么被认为是"异端"，要么以后被当作"理想"对象补充入该理论，以此来应付物理与现实世界的需要。

不幸的是，数十年来，正是如上述这样丑陋扭曲的数学结构充斥着我们的数学教育。它肇始自法国，很快传染到基础数学教学，先是毒害大学生，接着中小学生也难免此灾（而灾区最先是法国，接着是其他国家，包括俄罗斯）。

倘若你问法国小学生，"2＋3 等于几"，他会这样回答："3+2，因为加法适合交换律"。他不知道其和为几，甚至不

[3] 哈代（G. H. Hardy, 1877-1947）为英国著名数学家。该引语出自他的名著《一个数学家的自白》（*A Mathematician's Apology,* Cambridge University Press, 1994）。整段表达为：正像画家和诗人的模式一样，数学家的模式也必须是优美的；正像色彩和文字一样，数学家的思想也必须和谐一致。优美是第一关：丑陋的数学在世上无永存之地。（The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas, like the colors or the words must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in this world for ugly mathematics.）

on the part of the poor schoolchildren (some of whom in the meantime became ministers) and of the users.

The ugly building, built by undereducated mathematicians who were exhausted by their inferiority complex and who were unable to make themselves familiar with physics, reminds one of the rigorous axiomatic theory of odd numbers. Obviously, it is possible to create such a theory and make pupils admire the perfection and internal consistency of the resulting structure (in which, for example, the sum of an odd number of terms and the product of any number of factors are defined). From this sectarian point of view, even numbers could either be declared a heresy or, with passage of time, be introduced into the theory supplemented with a few "ideal" objects (in order to comply with the needs of physics and the real world).

Unfortunately, it was an ugly twisted construction of mathematics like the one above which predominated in the teaching of mathematics for decades. Having originated in France, this pervertedness quickly spread to teaching of foundations of mathematics, first to university students, then to school pupils of all lines (first in France, then in other countries, including Russia).

To the question "what is 2 + 3" a French primary school pupil replied: "3 + 2, since addition is commutative". He did not know what the sum was equal to and could not even understand what he was asked about!

Another French pupil (quite rational, in my opinion) defined mathematics as follows: "there is a square, but that still has to be proved".

Judging by my teaching experience in France, the university students' idea of mathematics (even of those taught mathematics

能理解你的问题是什么！

还有的法国小学生会如下阐述数学（我认为很有可能）：“存在一个正方形，但仍需证明。”

根据我本人在法国的教学经验，大学生们对数学的认知与这些小学生们同样糟糕（甚至包括那些在“高等师范学校”［高师］[4] 里学习数学的学生——我为这些明显很聪明但却被毒害颇深的孩子们感到极度的惋惜）。

譬如，这些学生从未见过一个抛物面。诸如描述由方程 $xy = z^2$ 所确定曲面之形状这样的问题即可使高师的数学家们发怵。作出平面上由参数方程（如 $x = t^3 - 3t, y = t^4 - 2t^2$）刻画的曲线是学生（甚至或许对大多数法国数学教授）完全无法做的问题。

从洛必达的第一部微积分教科书（名字即为“用于理解曲线的微积分”）[5] 开始，大致到古尔萨写的课本 [6]，解决这些问题的能力（和熟悉单位数乘法表一样）一直都被认为是每一个数学家应当具备的基本技能。

弱智的“抽象数学”的狂热者将几何（由此物理和现实的联系能常在数学中反映）统统摒除于教学之外。由古尔萨、埃尔米特、皮卡等人写的微积分教程被认为是过时而有害的，最近差点被巴黎第 6 和第 7 大学的学生图书馆当垃圾丢掉，只是在我的干预下才得以保存。

高师的学生，听完所有微分几何与代数几何课程（由有名望的数学家所教），却既不熟悉由椭圆曲线 $y^2 = x^3 + ax + b$ 决定的黎曼曲面，事实上也不知道曲面的拓扑分类（更不用提第一类椭圆积分以及椭圆曲线的群性质，即欧拉 - 阿贝尔加法定理了）。他们仅仅学到了霍奇结构与雅可比簇！

这样的事情怎么会在法国发生呢？！这可是为我们这个世界贡献了拉格朗日与拉普拉斯、柯西与庞加莱、勒雷与托姆这样的大家的国度啊！我觉得一个合理的解释出自彼德罗夫斯基 [7]。他在 1966 年曾教导过我：真正的数学家决不会拉帮结派，唯有弱者才会结党营生。他们可能因各种原因而联

[4] 高师是法国最好的大学，法国最具选拔性和挑战性的高等教育研究机构。校友中迄今已有施瓦茨、托姆以及新近的吴宝珠、维拉尼等共 10 位菲尔兹奖得主。

[5] 洛必达（Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital, 1661-1704），法国数学家。所提他撰写的教材原文名为 *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*，1696 年出版。著名的洛必达法则即出现在此书中。

[6] 古尔萨（Edouard Goursat, 1858-1936），法国数学家。他的课本指 1902 年开始陆续出版的三卷本《数学分析教程》（*Cours d'analyse mathématique*）。中译最早有 19 世纪 30 年代王尚济的《解析数学讲义》以及 40 年代刘景芳翻译的《数学分析教程》。

[7] 彼德罗夫斯基（Ivan Georgievich Petrovsky, 1901-1973）研究偏微分方程等，对希尔伯特第 19 和第 16 问题有重要贡献。曾任莫斯科国立大学校长（期间阿诺德被录取）。

图 4 古尔萨

at the École Normale Supérieure - I feel sorry most of all for these obviously intelligent but deformed kids) is as poor as that of this pupil.

For example, these students have never seen a paraboloid and a question on the form of the surface given by the equation $xy = z^2$ puts the mathematicians studying at ENS into a stupor. Drawing a curve given by parametric equations (like $x = t^3 - 3t, y = t^4 - 2t^2$) on a plane is a totally impossible problem for students (and, probably, even for most French professors of mathematics).

Beginning with l'Hôpital's first textbook on calculus (“calculus for understanding of curved lines”) and roughly until Goursat´s textbook, the ability to solve such problems was considered to be (along with the knowledge of the times table) a necessary part of the craft of every mathematician.

Mentally challenged zealots of “abstract mathematics” threw all the geometry (through which connection with physics and reality most often takes place in mathematics) out of teaching. Calculus textbooks by Goursat, Hermite, Picard were recently dumped by the student library of the Universities Paris 6 and 7 (Jussieu) as obsolete and, therefore, harmful (they were only rescued by my intervention).

ENS students who have sat through courses on differential and algebraic geometry (read by respected mathematicians) turned out be acquainted neither with the Riemann surface of an elliptic curve $y^2 = x^3 + ax + b$ nor, in fact, with the topological classification of surfaces (not even mentioning elliptic integrals

图 5 1973 年发行的纪念彼特洛夫斯基的邮票

合（可能为超抽象，反犹主义或为“应用的和工业上的”问题），但其本质总是在一些非数学的社会问题中求生存。

我在此顺便提醒大家温习路易·巴斯德[8]的忠告：从来没有所谓的“应用科学”，有的只是科学的应用（而且非常实际的应用！）。

当时我一直对彼德罗夫斯基的话心存疑虑，但现今我愈来愈坚信：他说的一点没错。可观的超抽象活动最终归结为以工业化的模式无耻地掠夺原创者的成果，然后系统地将这些成果归功于拙劣的推广者。就如美洲没有以哥伦布的名字命名一样，数学结果也几乎从未以它们真正的发现者来命名。

为避免被误引，我须声明，由于某些未知的缘故，我自己的成果从未被上述方式侵占，虽然这样的事情经常发生在我的老师（柯尔莫哥洛夫、彼德罗夫斯基、庞特里亚金、洛赫林）和我的学生身上。M. Berry 教授曾提出如下两个原理：

Arnold 原理：如果某概念出现了某人名，则该人必非发现此概念者。

Berry 原理：阿诺德原理适用于自身。

我们还是回到法国的数学教育上来。

在我为莫斯科国立大学数学与力学系一年级学生时，微积分课教师是集合论拓扑学家 L.A. 图马金。他认真地讲解古尔萨版的古典法式微积分教程。他告诉我们若相应黎曼面是球面，则有理函数沿着代数曲线的积分可以求出来；若相应黎曼

[8] 路易·巴斯德（Louis Pasteur, 1822-1895），法国微生物学家、化学家，微生物学的奠基人之一。巴斯德原文常见英译为“There are no such things as applied sciences, only applications of science”。

of first kind and the group property of an elliptic curve, that is, the Euler-Abel addition theorem). They were only taught Hodge structures and Jacobi varieties!

How could this happen in France, which gave the world Lagrange and Laplace, Cauchy and Poincaré, Leray and Thom? It seems to me that a reasonable explanation was given by I.G. Petrovskii, who taught me in 1966: genuine mathematicians do not gang up, but the weak need gangs in order to survive. They can unite on various grounds (it could be super-abstractness, anti-Semitism or “applied and industrial” problems), but the essence is always a solution of the social problem - survival in conditions of more literate surroundings.

By the way, I shall remind you of a warning of L. Pasteur: there never have been and never will be any “applied sciences”, there are only applications of sciences (quite useful ones!).

In those times I was treating Petrovskii's words with some doubt, but now I am being more and more convinced of how right he was. A considerable part of the super-abstract activity comes down simply to industrialising shameless grabbing of discoveries from discoverers and then systematically assigning them to epigons-generalizers. Similarly to the fact that America does not carry Columbus's name, mathematical results are almost never called by the names of their discoverers.

In order to avoid being misquoted, I have to note that my own achievements were for some unknown reason never expropriated in this way, although it always happened to both my teachers (Kolmogorov, Petrovskii, Pontryagin, Rokhlin) and my pupils. Prof. M. Berry once formulated the following two principles:

The Arnold Principle. If a notion bears a personal name, then this name is not the name of the discoverer.

The Berry Principle. The Arnold Principle is applicable to itself.

Let's return, however, to teaching of mathematics in France.

When I was a first-year student at the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Moscow State University, the lectures on calculus were read by the set-theoretic topologist L.A. Tumarkin, who conscientiously retold the old classical calculus course of French type in the Goursat version. He told us that integrals of rational functions along an algebraic curve can be taken if the corresponding Riemann surface is a sphere and, generally speaking, cannot be taken if its genus is higher, and that for the sphericity it is enough to have a sufficiently large number of double points on the curve of a given degree (which forces the curve to be unicursal: it is possible to draw its real points on the

图 6 1938 年布尔巴基会议（从左到右分别为：Simone Weil, Charles Pisot, André Weil, Jean Dieudonné, Claude Chabauty, Charles Ehresmann, Jean Delsarte）

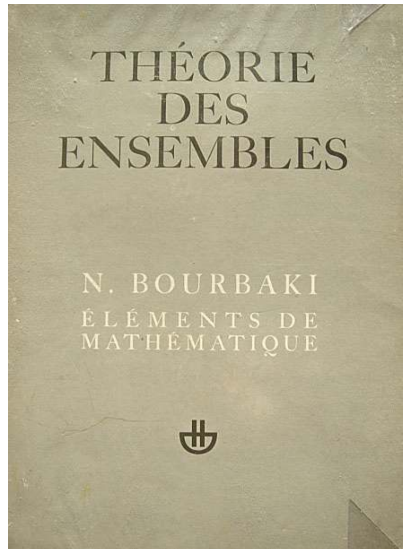


图 7 布尔巴基学派系列作品《数学原理》之一

面亏格更高，则该积分一般来说不可求；此外，给定次数曲线上二重点个数足够多，则对应曲面可为球面（由此知该曲线是有理的：即可以将其实值点在射影平面上一笔画出来）。

这些结果（即使不给出证明）紧紧地抓住了我们的想象，它们表现了更好更正确的现代数学思想，比布尔巴基学派[9]那卷帙浩繁的所有论著不知道好到哪里去了。确实，我们能在这里找到表面上似乎完全不同的事物之间令人惊奇的联系：一方面，积分可否显式表达与相应黎曼面的拓扑有关；另一方面，相应的黎曼面上的亏格与二重点个数之间也有重要的联系。这又和黎曼面的实部分的一笔画性质相关联。

作为数学中最迷人的性质之一，雅可比曾指出：同一个函数控制着用四个平方数之和对整数的表示[10]以及摆的真实运动。

[9] 尼古拉•布尔巴基（Nicolas Bourbaki）是二十世纪一群法国数学家为自己作品的集体笔名，其团队的正式称呼是“尼古拉•布尔巴基合作者协会”。主页为 http://www.bourbaki.ens.fr。布尔巴基希望在集合论的基础上用公理方法重新构造整个现代数学，致力于数学的严格化与一般化。布尔巴基认为：数学，至少纯粹数学，是研究抽象结构的理论。结构，就是以初始概念和公理出发的演绎系统。有三种基本的抽象结构：代数结构，序结构，拓扑结构。布尔巴基他们自 1935 年开始撰写题为《数学原理》(Éléments de mathématique) 的一系列著作以述说他们的观点。这套书共 9 卷，有七千多页。

[10] 这里的雅可比是卡尔•雅可比（Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851）。1770 年拉格朗日证明了四平方和定理：每个正整数均可表示为最多四个整数的平方和。例如 $31 = 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$。1834 年，雅可比发现了将整数分拆为四个平方数之和的表示方法数的精确公式，这和雅可比椭圆函数有关。可参考华罗庚著《数论导引》第八章。

projective plane with one stroke of a pen).

These facts capture the imagination so much that (even given without any proofs) they give a better and more correct idea of modern mathematics than whole volumes of the Bourbaki treatise. Indeed, here we find out about the existence of a wonderful connection between things which seem to be completely different: on the one hand, the existence of an explicit expression for the integrals and the topology of the corresponding Riemann surface and, on the other hand, between the number of double points and genus of the corresponding Riemann surface, which also exhibits itself in the real domain as the unicursality.

Jacobi noted, as mathematics' most fascinating property, that in it one and the same function controls both the presentations of a whole number as a sum of four squares and the real movement of a pendulum.

These discoveries of connections between heterogeneous mathematical objects can be compared with the discovery of the connection between electricity and magnetism in physics or with the discovery of the similarity between the east coast of America and the west coast of Africa in geology.

The emotional significance of such discoveries for teaching is difficult to overestimate. It is they who teach us to search and find such wonderful phenomena of harmony of the Universe.

The de-geometrisation of mathematical education and the divorce from physics sever these ties. For example, not only students but also modern algebro-geometers on the whole do not

发现这些不同种类的数学对象之间联系，就如发现物理学中电与磁之间联系，也类似于地质学上发现美洲大陆的东海岸与非洲大陆的西海岸之间的相似性。

这些发现对于教学的情感意义是难以估量的。正是它们指引着我们去研究和发现宇宙中和谐而精彩的现象。

然而，数学教育的非几何化以及对物理学的背离却割断了这种联系。例如，不仅仅是学生，绝大部分的当代代数几何学家也都不知道如下雅可比事实：第一类椭圆积分表示了相应的哈密顿系统中沿某个椭圆相曲线的运动时间。

套用关于电子与原子的著名说法，可以说圆内旋轮线就如同多项式环中的理想一样是无穷竭的。但若要把理想这一概念教给从不知道圆内旋轮线的学生，就如把分数加法教给从未将蛋糕或苹果等分切割过（至少在脑子里切过）的学生一样令人迷惑。一点也不奇怪孩子们做分数加法时常常分子加分子、分母加分母。

我从法国朋友那里听说这种超抽象的一般化正是他们的传统国民性。我不完全否认这种遗传病的说法，不过我还是愿意强调那个从庞加莱那儿借来的“蛋糕与苹果”的例子[11]。

构造数学理论的方式与在其它自然科学中建立理论的方式完全相同。首先我们要考察某些对象并在特定例子中进行观察。然后我们通过试验找到所得观察结果适用的边界，寻求反例以阻止我们将所得想当然地推广到过于广泛的情形（例如：将连续奇数 1,3,5,7,9 拆为奇数个自然数之和的分拆数[12]给出序列 1,2,4,8,16，但接下来却是 29）。

我们尽可能清晰地将所得经验发现（如费马猜想和庞加莱猜想）表述为结论。之后的阶段将是困难的，因为要检验所得结论在多大程度上可靠。

数学中已对此发展出来一套特别的方法。这种方法，在被应用于现实世界时，有时很有用，但有时也会导致自欺

[11] 庞加莱是直觉主义的先驱，认为直觉是发明的工具。1905 年庞加莱发表《数学中的直觉与逻辑》。英译可参考 http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Extras/Poincare_Intuition.html，中译可参考《科学的价值》（李醒民译，光明日报出版社，1988）。庞加莱在此文中讨论了两类数学家，而迈克尔•阿蒂亚爵士在其演讲《二十世纪的数学》中区分了形式主义传统的代表人物（莱布尼兹—希尔伯特—布尔巴基）和直觉主义传统的代表人物（牛顿—庞加莱—阿诺德）。此处“蛋糕与苹果”的例子，按阿诺德所述，源自庞加莱。阿诺德在一次俄法“Mistral”会议上的演讲（参 *Yersterday and Long Ago*，第 157 页）也提到分数教学，明确提到庞加莱曾说，只有这两种方式来教分数。阿诺德还提到卢梭在其《忏悔录》的回忆：只有在分割矩形后他才理解完全平方和公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

[12] 举例来说，5 有如下 7 种整数分拆方式：5 = 5; 5 = 1 + 4; 5 = 2 + 3; 5 = 1 + 2 + 2; 5 = 1 + 1 + 3; 5 =2+1+1+1; 5 = 1+1+1+1+1。其中为奇数之和的分拆数为 4。欧拉曾经证明奇数之和的分拆数与不等数之和的分拆数相等。

图 8 图为法国 1952 年发行的纪念庞加莱邮票

know about the Jacobi fact mentioned here: an elliptic integral of first kind expresses the time of motion along an elliptic phase curve in the corresponding Hamiltonian system.

Rephrasing the famous words on the electron and atom, it can be said that a hypocycloid is as inexhaustible as an ideal in a polynomial ring. But teaching ideals to students who have never seen a hypocycloid is as ridiculous as teaching addition of fractions to children who have never cut (at least mentally) a cake or an apple into equal parts. No wonder that the children will prefer to add a numerator to a numerator and a denominator to a denominator.

From my French friends I heard that the tendency towards super-abstract generalizations is their traditional national trait. I do not entirely disagree that this might be a question of a hereditary disease, but I would like to underline the fact that I borrowed the cake-and-apple example from Poincaré.

The scheme of construction of a mathematical theory is exactly the same as that in any other natural science. First we consider some objects and make some observations in special cases. Then we try and find the limits of application of our observations, look for counter-examples which would prevent unjustified extension of our observations onto a too wide range of events (example: the number of partitions of consecutive odd numbers 1, 3, 5, 7, 9 into an odd number of natural summands gives the sequence 1, 2, 4, 8, 16, but then comes 29).

As a result we formulate the empirical discovery that we made (for example, the Fermat's conjecture or Poincaré's conjecture) as clearly as possible. After this there comes the difficult period of checking the reliability of the conclusions obtained.

图 9 匈牙利 1999 年发行的魏格纳纪念邮票

欺人。这就是"建模"。建模时需做如下理想化：某些只以一定概率或一定的精确性知道的事实，被认为是"绝对"正确的并被当作"公理"来接受。这种"绝对性"的意义，恰在于我们容许自己根据形式逻辑规则来运用这些"事实"，而后把所有从这些事实推导出的结论称为"定理"。

显然在任何现实活动中，要完全依赖于这样的推理是不可能的。原因至少在于所研究现象的参数决不可能被绝对准确地确定，而且参数（例如过程的初始条件）的微小变化能够完全地改变结果。例如，正是因为这个原因使得任何可信赖的长期天气预报都是不可能的，将来也无可能——无论计算机或是记录初始条件的设备有多发达。

与此同理，（不能完全可靠的）公理的一个小小改变，通常能得出与从这些公理推导出来的定理完全不同的结论。推理之链（"证明"）越长越复杂，最后得到的结论的可靠性就越低。

复杂的模型（除了对写论文的人）几乎毫无用处。

数学建模方法忽略这些麻烦，把所得到的模型当成是确切地与现实世界相吻合的。从自然科学的观点来看 , 这种途径是显然不正确的，但却经常导致很多物理上有用的结果，该事实被称为"数学在自然科学中不合理的有效性"（或叫做"魏格纳原理"）[13]。

我在此提一下盖尔方德的一个观点：还有另一类与魏格纳注意到的数学在物理中不可思议的有效性相仿的现象——即数学在生物学中也同样有不可思议的有效性。

[13] 尤金 • 魏格纳（Eugene Paul Wigner, 1902-1995） 系匈牙利 - 美国物理学家， 诺贝尔物理学奖获得者（1963）。这一说法参魏格纳的文章：*The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University*, Communications on Pure and Applied Mathematics (1960), 13:1, 1–14.

At this point a special technique has been developed in mathematics. This technique, when applied to the real world, is sometimes useful, but can sometimes also lead to self-deception. This technique is called modelling. When constructing a model, the following idealisation is made: certain facts which are only known with a certain degree of probability or with a certain degree of accuracy, are considered to be "absolutely" correct and are accepted as "axioms". The sense of this "absoluteness" lies precisely in the fact that we allow ourselves to use these "facts" according to the rules of formal logic, in the process declaring as "theorems" all that we can derive from them.

It is obvious that in any real-life activity it is impossible to wholly rely on such deductions. The reason is at least that the parameters of the studied phenomena are never known absolutely exactly and a small change in parameters (for example, the initial conditions of a process) can totally change the result. Say, for this reason a reliable long-term weather forecast is impossible and will remain impossible, no matter how much we develop computers and devices which record initial conditions.

In exactly the same way a small change in axioms (of which we cannot be completely sure) is capable, generally speaking, of leading to completely different conclusions than those that are obtained from theorems which have been deduced from the accepted axioms. The longer and fancier is the chain of deductions ("proofs"), the less reliable is the final result.

Complex models are rarely useful (unless for those writing their dissertations).

The mathematical technique of modelling consists of ignoring this trouble and speaking about your deductive model in such a way as if it coincided with reality. The fact that this path, which is obviously incorrect from the point of view of natural science, often leads to useful results in physics is called "the inconceivable effectiveness of mathematics in natural sciences" (or "the Wigner principle").

Here we can add a remark by I.M. Gel'fand: there exists yet another phenomenon which is comparable in its inconceivability with the inconceivable effectiveness of mathematics in physics noted by Wigner - this is the equally inconceivable ineffectiveness of mathematics in biology.

"The subtle poison of mathematical education" (in F. Klein's words) for a physicist consists precisely in that the absolutised model separates from the reality and is no longer compared with it. Here is a simple example: mathematics teaches us that the

对物理学家来说，“数学教育隐晦的毒害”（克莱因语）恰好就在于绝对化了的模型与现实分离后却与现实不再相符。举一个简单的例子：数学知识告诉我们马尔萨斯方程 $dx/dt = x$ 的解由初始条件唯一决定（即 (t, x) 平面上相应的积分曲线彼此不相交）。这个数学模型的结论与现实世界几乎没有关系。计算机实验却显示所有积分曲线在 t 负半轴上有公共点。例如，具有初始条件 $x(0) = 0$ 与 $x(0) = 1$ 的曲线，从实践的观点看来，在 $t = -10$ 相交，其实在 $t = -100$ 时，你不可能在他们之间插入一个原子[14]。欧氏几何对这种空间在微小距离下的性质没有任何介绍。唯一性定理在这种情况下的应用显然已经超出了模型所容许的精度。在对模型的实际应用中，务必要注意这种情形，否则可能会导致严重的麻烦[15]。

然而，我还要提到，这个唯一性定理也可解释船只在停泊码头时的靠岸阶段为什么必须要人工操作：倘若机动，设行进的速度是距离的光滑（线性）函数，则整个靠岸的过程将会耗费无穷长的时间。否则只能采取与码头相撞（船与码头之间要有非理想的弹性物体形成缓冲）的方法。值得指出的是，月球和火星探测仪器的着陆以及空间站的对接时，此类问题曾严肃地摆在我们面前——此时唯一性问题在与我们做对。

不幸的是，在现代数学教材里，即便是其中较好者，既没有这样的例子，也没有讨论迷信定理的危险性。我甚至觉得，那些学院派数学家（对物理知之甚少）都对公理化形式的数学与建模的主要差异习以为常，而且他们觉得在自然科学中这是很普遍的，只是需要用后期的实验来控制理论推演。

即使不提及初始公设的相对特征，人们也不会忘记在冗长的论证中犯逻辑错误是不可避免的（例如，宇宙射线或量子振动引发计算机崩溃）。任何做研究的数学家都知道，如果不对自己有所控制（最好的方法是用实例来控制），那么在大约 10 页纸的论述之后，半数公式中的符号会出问题，而数字 2 会从分母跑到分子的位置上。

与如此谬误相抗的技术在任何实验科学中都一样，都是通过实验与观察进行的外部控制。而且这一技术应该一开始就教给所有大学低年级的学生。

试图创造“纯粹”推论式公理化数学的做法，导致了摒弃物理学中研究模式（观察－建模－研究模型－得出结论－

[14] 托马斯•罗伯特•马尔萨斯（Thomas Robert Malthus, 1766-1834）是英国人口学家和政治经济学家。人口学原理的基本思想是：如没有限制，人口呈指数增长。方程 $dx/dt = x$ 的解为指数函数 $x(t) = x(0)\ e^{t}$。在 $x(0) = 1$ 时，$x(-100) = e^{-100} \approx 0{:}37 \times 10^{-43}$。原子半径在 30-300 皮米（1 皮米 $= 10^{-12}$ 米）之间。

[15] 阿诺德在 *Yersterday and Long Ago*（第 36-37 页）中也提到相同的内容，并说唯一性定理与物理现实不符是 M. L. Lidov 教给他的。

solution of the Malthus equation $dx/dt = x$ is uniquely defined by the initial conditions (that is that the corresponding integral curves in the (t, x)-plane do not intersect each other). This conclusion of the mathematical model bears little relevance to the reality. A computer experiment shows that all these integral curves have common points on the negative t-semiaxis. Indeed, say, curves with the initial conditions $x(0) = 0$ and $x(0) = 1$ practically intersect at $t = -10$ and at $t = -100$ you cannot fit in an atom between them. Properties of the space at such small distances are not described at all by Euclidean geometry. Application of the uniqueness theorem in this situation obviously exceeds the accuracy of the model. This has to be respected in practical application of the model, otherwise one might find oneself faced with serious troubles.

I would like to note, however, that the same uniqueness theorem explains why the closing stage of mooring of a ship to the quay is carried out manually: on steering, if the velocity of approach would have been defined as a smooth (linear) function of the distance, the process of mooring would have required an infinitely long period of time. An alternative is an impact with the quay (which is damped by suitable non-ideally elastic bodies). By the way, this problem had to be seriously confronted on landing the first descending apparata on the Moon and Mars and also on docking with space stations - here the uniqueness theorem is working against us.

Unfortunately, neither such examples, nor discussing the danger of fetishising theorems are to be met in modern mathematical textbooks, even in the better ones. I even got the impression that scholastic mathematicians (who have little knowledge of physics) believe in the principal difference of the axiomatic mathematics from modelling which is common in natural science and which always requires the subsequent control of deductions by an experiment.

Not even mentioning the relative character of initial axioms, one cannot forget about the inevitability of logical mistakes in long arguments (say, in the form of a computer breakdown caused by cosmic rays or quantum oscillations). Every working mathematician knows that if one does not control oneself (best of all by examples), then after some ten pages half of all the signs in formulae will be wrong and twos will find their way from denominators into numerators.

The technology of combatting such errors is the same external control by experiments or observations as in any experimental science and it should be taught from the very beginning to all juniors in schools.

Attempts to create “pure” deductive-axiomatic mathematics

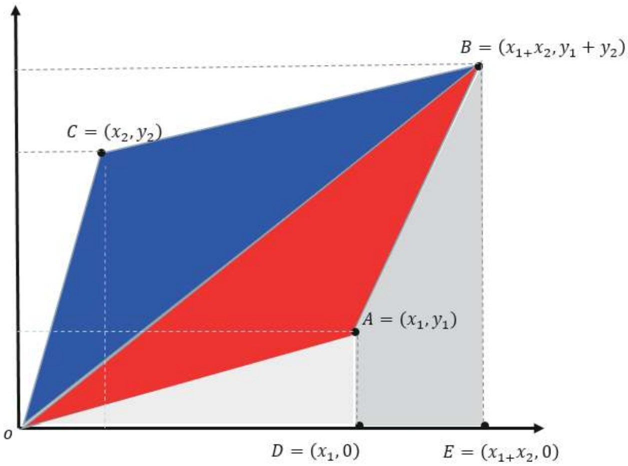


图 10 第一、二列向量分别为 $oA=(x_1, x_2)$, $oC=(y_1, y_2)$ 的矩阵行列式 $x_1y_2-x_2y_1$ 等于平行四边形 $oABC$ 的（有向）面积

再由观察来检验），而代之以定义－定理－证明的模式。人们不可能理解一个没有来由的定义，但这并不能阻止"代数－公理学家"违规。例如，他们会用长乘规则来定义自然数的乘积。这样一来，乘法的交换性变得难以证明，但仍可以从公理中得出这样的定理。这样就可能逼迫可怜的学生来学习该定理及其证明（其目的不外乎是提升这门学科以及教授它的人的地位）。显然，如此定义、如此证明只会伤害教学和实际工作。

要理解乘法的可交换性，只有通过分别按行、列来数方阵里士兵数，或用这两种方式来计算长方形的面积才可能。做不与物理和现实世界交叉的数学的任何企图都属于宗派主义和孤立主义。这必将破坏所有具有合理思维能力的人们眼中数学创造是有用的人类活动的这一美好印象。

我再揭示几个这样的秘密（以此来帮助可怜的学生们）。

一个矩阵的行列式就是一个以矩阵的各列为各边的平行多面体的（有向）体积。如果学生们被告知了这个秘密（在纯粹的代数式的教育中，该秘密被小心地隐藏着），则整个行列式理论都将成为多维线性型理论的一部分。如果用别的方式来定义行列式，则任何聪明人都将会永远怨恨行列式、雅可比式以及隐函数定理这些东西。

什么是一个群呢？代数学家会这样来教学：这是附有两个满足一组令人容易忘却的规则的运算的集合。这个定义会引起自然的抗议：为何需要这一对运算？"哦，该死的数学"——这就是学生们的结论（将来他们中有人可能成为国家科学部长）。

如果我们按照历史发展的顺序，不是由群而是从变换

have led to the rejection of the scheme used in physics (observation - model - investigation of the model - conclusions - testing by observations) and its substitution by the scheme: definition - theorem - proof. It is impossible to understand an unmotivated definition but this does not stop the criminal algebraists-axiomatisators. For example, they would readily define the product of natural numbers by means of the long multiplication rule. With this the commutativity of multiplication becomes difficult to prove but it is still possible to deduce it as a theorem from the axioms. It is then possible to force poor students to learn this theorem and its proof (with the aim of raising the standing of both the science and the persons teaching it). It is obvious that such definitions and such proofs can only harm the teaching and practical work.

It is only possible to understand the commutativity of multiplication by counting and re-counting soldiers by ranks and files or by calculating the area of a rectangle in the two ways. Any attempt to do without this interference by physics and reality into mathematics is sectarianism and isolationism which destroy the image of mathematics as a useful human activity in the eyes of all sensible people.

I shall open a few more such secrets (in the interest of poor students).

The determinant of a matrix is an (oriented) volume of the parallelepiped whose edges are its columns. If the students are told this secret (which is carefully hidden in the purified algebraic education), then the whole theory of determinants becomes a clear chapter of the theory of poly-linear forms. If determinants are defined otherwise, then any sensible person will forever hate all the determinants, Jacobians and the implicit function theorem.

What is a group? Algebraists teach that this is supposedly a set with two operations that satisfy a load of easily-forgettable axioms. This definition provokes a natural protest: why would any sensible person need such pairs of operations? "Oh, curse this maths" —— concludes the student (who, possibly, becomes the Minister for Science in the future).

We get a totally different situation if we start off not with the group but with the concept of a transformation (a one-to-one mapping of a set onto itself) as it was historically. A collection of transformations of a set is called a group if along with any two transformations it contains the result of their consecutive application and an inverse transformation along with every transformation.

This is all the definition there is. The so-called "axioms" are

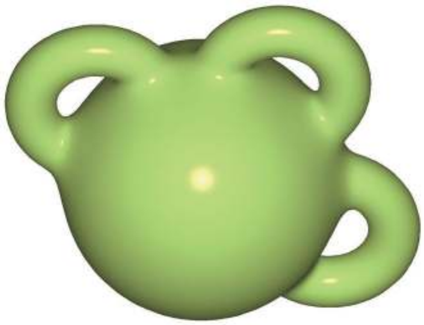


图 11 带三个柄的球面

的观点（一个集合到自身的 1-1 映射）出发，我们就有完全不同的情形。一个集合的一族变换称为一个群，如果其中任何两个变换的复合仍在此族内，并且每个变换的逆变换也是如此。

此即该定义的核心。那些所谓的“公理”事实上仅为变换群（明显）的性质。公理化主义者所称的“抽象群”不过是同构（保持运算的 1-1 映射）意义下不同集合的变换群。正如凯莱所证明的，根本就不存在“更抽象的”群。那么为什么代数学家仍要用抽象的定义来折磨学生呢？

顺便提一下，上世纪 60 年代我曾为莫斯科的中学生们讲授群论。我未使用任何公理，尽可能地贴近物理，半年时间我就能教给学生一般五次方程无根式解的阿贝尔定理（同时还教了复数、黎曼面、基本群以及代数函数的单值群）。这门课程的内容后来由我的一个听众 V. Alekseev 编辑成书出版，书名为 The Abel theorem in problems & solutions[16]。

什么是一个光滑流形？我见到一本美国人最近撰写的书称庞加莱对此概念并不清晰（尽管是由他引入的），其“现代的”定义直到上世纪 20 年代末期才由维布伦给出：一个流形是满足一系列公理的一个拓扑空间。

学生们究竟为何罪孽要在这些扭转曲折中尝试、摸索来寻求其正途？事实上，在庞加莱的《位置分析》（Analysis Situs）中有比现代“抽象”定义更有用，也绝对更清晰的定义。

欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 中的 k 维光滑子流形是 $\mathbb{R}^N$ 的子集，其上每一点都有一个邻域是从 $\mathbb{R}^k$ 到 $\mathbb{R}^{N-k}$ 上的光滑映射的图象（其中 $\mathbb{R}^k$ 和 $\mathbb{R}^{N-k}$ 是坐标子空间 ）。这是平面上大多数普通光滑曲线（如圆周 $x^2+y^2=1$）或三维空间中曲线和曲面的直接的推广。

光滑流形之间的光滑映射可自然地定义。微分同胚是

[16] 此书英译 2004 年由 Kluwer 出版。阿诺德的针对中学生（14-16 岁）的课程由正在进行教学改革（更新欧几里得传统）的柯尔莫哥洛夫组织。参考 *Yersterday and Long Ago* 第 158–163 页。

in fact just (obvious) properties of groups of transformations. What axiomatisators call “abstract groups” are just groups of transformations of various sets considered up to isomorphisms (which are one-to-one mappings preserving the operations). As Cayley proved, there are no “more abstract” groups in the world. So why do the algebraists keep on tormenting students with the abstract definition?

By the way, in the 1960s I taught group theory to Moscow schoolchildren. Avoiding all the axiomatics and staying as close as possible to physics, in half a year I got to the Abel theorem on the unsolvability of a general equation of degree five in radicals (having on the way taught the pupils complex numbers, Riemann surfaces, fundamental groups and monodromy groups of algebraic functions). This course was later published by one of the audience, V. Alekseev, as the book *The Abel theorem in problems*.

What is a smooth manifold? In a recent American book I read that Poincaré was not acquainted with this (introduced by himself) notion and that the “modern” definition was only given by Veblen in the late 1920s: a manifold is a topological space which satisfies a long series of axioms.

For what sins must students try and find their way through all these twists and turns? Actually, in Poincaré's *Analysis Situs* there is an absolutely clear definition of a smooth manifold which is much more useful than the “abstract” one.

A smooth k-dimensional submanifold of the Euclidean space $\mathbb{R}^N$ is its subset which in a neighbourhood of its every point is a graph of a smooth mapping of $\mathbb{R}^k$ into $\mathbb{R}^{N-k}$ (where $\mathbb{R}^k$ and $\mathbb{R}^{N-k}$ are coordinate subspaces). This is a straightforward generalization of most common smooth curves on the plane (say, of the circle $x^2+y^2=1$) or curves and surfaces in the three dimensional space.

Between smooth manifolds smooth mappings are naturally defined. Diffeomorphisms are mappings which are smooth, together with their inverses.

An “abstract” smooth manifold is a smooth submanifold of a Euclidean space considered up to a diffeomorphism. There are no “more abstract” finite-dimensional smooth manifolds in the world (Whitney's theorem). Why do we keep on tormenting students with the abstract definition? Would it not be better to prove them the theorem about the explicit classification of closed two-dimensional manifolds (surfaces)?

It is this wonderful theorem (which states, for example, that any compact connected oriented surface is a sphere with a number

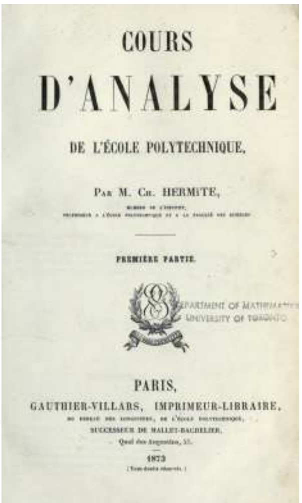


图 12 1887 年的埃尔米特（1822-1901）；图 13 埃尔米特的微积分教程标题页

其逆也光滑的光滑映射。

“抽象”光滑流形是在微分同胚意义下的欧氏空间的光滑子流形。世上根本无所谓“更抽象的”有限维光滑流形（惠特尼定理）。为什么我们总是要用抽象的定义来折磨学生们呢？把闭二维流形（曲面）的分类定理证给学生看难道不更好吗？

恰是如此精彩的定理（例如，任意紧连通的可定向曲面都是一个带若干柄的球面）使我们对什么是现代数学有了一个正确的印象，而不是那些欧氏空间简单子流形的超抽象的推广，事实上后者根本没有给出任何有新意的东西，不过是被公理化主义者们作为成果用来炫耀的而已。

曲面分类定理是顶级的数学成就，堪比美洲大陆或 X 射线的发现。这是数学自然科学里一个真正的发现，我们甚至难说该发现是属于物理学的或属于数学的。它对应用以及对发展正确的世界观的意义目前已超越了数学中的其他“成就”——如费马大定理的证明，或对任何充分大的整数都能表示成三个素数之和这类事实的证明。

为了出风头，当代的数学家有时候总要展示一些“运动会式的”成就，并声称那就是他们的学科里盖棺之作。可想而知，这样的做法不仅无助于社会对数学的欣赏，而且适得其反，会使人们产生疑问：对于这样的毫无用处的奇异问题，有必要浪费力量来做这些（仿佛攀岩似的）练习吗？

曲面分类定理应该放到高中数学的课程里（或许不加证明），但由于某些原因甚至在大学的数学课程里也找不到（顺便提一下，在法国近几十年来所有的几何都从大学课程中被删去）。

所有层次的数学教育由学院式腔调全面回归到展示自

of handles) that gives a correct impression of what modern mathematics is and not the super-abstract generalizations of naive submanifolds of a Euclidean space which in fact do not give anything new and are presented as achievements by the axiomatisators.

The theorem of classification of surfaces is a top-class mathematical achievement, comparable with the discovery of America or X-rays. This is a genuine discovery of mathematical natural science and it is even difficult to say whether the fact itself is more attributable to physics or to mathematics. In its significance for both the applications and the development of correct Weltanschauung it by far surpasses such “achievements” of mathematics as the proof of Fermat's last theorem or the proof of the fact that any sufficiently large whole number can be represented as a sum of three prime numbers.

For the sake of publicity modern mathematicians sometimes present such sporting achievements as the last word in their science. Understandably this not only does not contribute to the society's appreciation of mathematics but, on the contrary, causes a healthy distrust of the necessity of wasting energy on (rock-climbing-type) exercises with these exotic questions needed and wanted by no one.

The theorem of classification of surfaces should have been included in high school mathematics courses (probably, without the proof) but for some reason is not included even in university mathematics courses (from which in France, by the way, all the geometry has been banished over the last few decades).

The return of mathematical teaching at all levels from the scholastic chatter to presenting the important domain of natural science is an espessially hot problem for France. I was astonished that all the best and most important in methodical approach mathematical books are almost unknown to students here (and, seems to me, have not been translated into French). Among these are Numbers and figures by Rademacher and Töplitz, Geometry and the imagination by Hilbert and Cohn Vossen, What is mathematics? by Courant and Robbins, How to solve itand Mathematics and plausible reasoning by Polya, Development of mathematics in the 19th century by F. Klein.

I remember well what a strong impression the calculus course by Hermite (which does exist in a Russian translation!) made on me in my school years.

Riemann surfaces appeared in it, I think, in one of the first lectures (all the analysis was, of course, complex, as it should be). Asymptotics of integrals were investigated by means of

然科学的重要领域，对法国来说是一个极其重要的任务。使我感到异常震惊的是所有那些写得最好而且最重要的阐述数学方法的书在这里却几无学生知晓（在我看来，甚至可能没被译为法文）。这些书有拉德梅彻 - 托普利茨写的《论数与形》、希尔伯特和康福森写的《直观几何》、柯朗和罗宾斯写的《数学是什么》、波利亚写的《如何解题》和《数学合情推理》、克莱因写的《19 世纪数学发展史》[17]。

我清晰地记得，当我在学校求学时，埃尔米特所写的微积分教程[18]（有俄语译本！）给我留下了多么强烈的印象。

我记得在最开始几讲中就出现了黎曼曲面（当然所有分析的内容都是针对复变量的，也本该如此）。而渐近积分理论是在分支点运动下通过黎曼曲面上道路形变的方法来研究（如今，我们称此方法为皮卡 - 莱夫谢茨理论；顺便提一下，皮卡是埃尔米特的女婿——数学能力往往是由女婿来传承：阿达马—莱维—许瓦兹—弗里希王朝就是巴黎科学院中另一范例）。

埃尔米特一百多年前撰写的教程（也许早就被法国大学的学生图书馆扔掉了），已被认为“过时”，但实际上要比那些折磨学生、最令人无聊的微积分课本现代化得多。

如果数学家们再不醒悟，则那些对 (在最恰当意义下的) 现代数学理论仍有需要，同时又对那些毫无用处的公理唠叨具有免疫力（任何具有合理思维的人共有的特点）的消费者终将会拒绝这些中学和大学里面教育不良的学究们所提供的服务。

一位数学教师，倘若至今还未掌握多卷本的朗道和栗弗席兹的教程[19]中的一部分知识，必将成为古董，犹如迄今仍不懂开集与闭集之间差别的人。

致谢：译者感谢陆俊博士对文中代数几何等部分内容的讨论，也特别感谢美国西北大学徐佩教授的阅读校订。

——2012 年 6 月于比勒费尔德

图 14 2008 年阿塞拜疆发行的纪念朗道诞辰 100 周年的邮票

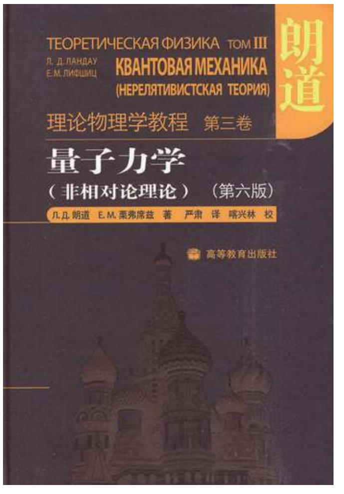


图 15 《理论物理学教程 第三卷：量子力学（非相对论理论）》封面

path deformations on Riemann surfaces under the motion of branching points (nowadays, we would have called this the Picard-Lefschetz theory; Picard, by the way, was Hermite's son-in-law - mathematical abilities are often transferred by sons-in-law: the dynasty Hadamard - P. Levy - L. Schwarz - U. Frisch is yet another famous example in the Paris Academy of Sciences).

The “obsolete” course by Hermite of one hundred years ago (probably, now thrown away from student libraries of French universities) was much more modern than those most boring calculus textbooks with which students are nowadays tormented.

If mathematicians do not come to their senses, then the consumers who preserved a need in a modern, in the best meaning of the word, mathematical theory as well as the immunity (characteristic of any sensible person) to the useless axiomatic chatter will in the end turn down the services of the undereducated scholastics in both the schools and the universities.

A teacher of mathematics, who has not got to grips with at least some of the volumes of the course by Landau and Lifshitz, will then become a relict like the one nowadays who does not know the difference between an open and a closed set.

[17]《数学是什么》与《论数与形》的介绍，可参《数学文化》2012 年第三期欧阳顺湘作《最美的数学就如文学》一文。

[18] 埃尔米特的原著 *Cours d´analyse de lécole polytechnique* (1873)，可下载自 http://archive.org/details/coursdanalysedel01hermuoft。

[19] 列夫 • 朗道（Lev Landau, 1908-1968）是前苏联著名物理学家，凝聚态物理学的奠基人。1962 年的诺贝尔物理学奖获得者。栗弗席兹（Evgeny Lifshitz, 1915-1985）为朗道的学生、理论物理学家。这里所提教程为著名的《理论物理学教程》，全书共 10 卷，由朗道、栗弗席兹与皮塔耶夫斯基等人合作完成。

谷歌如何从网络的大海里捞到针

David Austin/ 文　沈栋 / 译

想象一个含有 250 亿份文件，却没有集中管理机构和馆员的图书馆，而且任何人都可以在任何时间添加新的文件而不需要通知其他人。一方面你可以确定，这庞大的文件堆中有一份文件含有对你至关重要的信息，而另一方面，你又像我们中的大多数人那样没有耐心，想要在几秒钟之内就找到这条信息。你有什么办法呢？

摆在你面前的这个难题看起来似乎无法解决。而这个文件堆跟万维网（World Wide Web）其实相差无几，后者就是一个超大的、高度混乱的以各种形式存放的文件堆。当然，从万维网中找信息我们有办法解决，因为我们对搜索引擎非常熟悉（或许你就是通过搜索找到这篇文章的）。本文将介绍谷歌的网页排序算法（PageRank Algorithm），以及它如何从 250 亿份网页中捞到与你的搜索条件匹配的结果。它的匹配效果如此之好，以至于"谷歌"(google)今天已经成为一个被广泛使用的动词了。

包括谷歌在内，多数搜索引擎都是不断地运行计算机程序群，来检索网络上的网页、搜索每份文件中的词语并且将相关信息以高效的形式进行存储。每当用户检索一个短语，例如"搜索引擎"，搜索引擎就将找出所有含有被检索短语的网页。（或许，类似"搜索"与"引擎"之间的距离这样的额外信息都被会考虑在内。）但问题是，谷歌现在需要检索 250 亿个页面，而这些页面上大约 95% 的文本仅由大约一万个单词组成。也就是说，对于大多数搜索而言，将会有超级多的网页含有搜索短语中的单词。我们所需要的其实是这样一种办法，它能够将这些符合搜索条件的网页按照重要程度进行排序，这样才能够将最重要的页面排在最上面。

确定网页重要性的一个方法是使用人为排序。例如，你或许见过这样一些网页，他们包含了大量的链接，后者连接到某个特定兴趣领域的其他资源。假定维护这个网页的人是可靠的，那么他推荐的网页在很大程度上就可能有用。当然，这种做法也有其局限性，比如这个列表可能很快就过期了，也可能维护这个列表的人会无意或因某种未知的偏见而遗漏掉一些重要的网页。

谷歌的网页排序算法则不借助人为的内容评估来确定网页的重要性。事实上，谷歌发现，它的服务的价值很大程度上是它能够提供给用户无偏见的搜索结果。谷歌声称，"我们软件的核心就是网页排序（PageRank）。"正如我们将要看到的，技巧就是让网页自身按照重要性进行排序。

如何辨别谁重要

如果你曾建立过一个网页，你应该会列入一些你感兴趣的链接，它们很容易使你点击到其它含有重要、可靠信息的网页。这样就相当于你肯定了你所链接页面的重要性。谷歌的网页排序算法每月在所有网页中进行一次受欢迎程度的评估，以确定哪些网页最重要。网页排序算法的提出者，谢尔盖 • 布林 (Sergey Brin) 和拉里 • 佩奇 (Lawrence Page) 的基本想法是：一个网页的重要性是由链接到它的其他网页的数量及其重要性来决定。

我们对任意一个网页 P，以 $I(P)$ 来表述其重要性，并称之为网页的网页排序。在很多网站，你可以找到一个近似的网页排序值。（例如，美国数学会的首页目前的网页排序值为 8，最高分是 10。你可以试试找到一个网页排序值为 10 的网页吗？）这个网页排序值仅是一个近似值，因为谷歌拒绝提供真实的网页排序值，以阻止那些试图干扰排序的行为。

网页排序是这样确定的。假定网页 P_j 有 l_j 个链接。如果这些链接中的一个链接到网页 P_i，那么网页 P_j 将会将其重要性的 $1/l_j$ 赋给 P_i。网页 P_i 的重要性就是所有指向这个网页的其他网页所贡献的重要性的加和。换言之，如果我们记链接到网页 P_i 的网页集合为 B_i，那么

$$I(P_i)=\sum_{P_j\in B_i}\frac{I(P_j)}{l_j}.$$

这或许让你想起"先有鸡还是先有蛋"的问题：为了确定一个网页的重要性，我们首先得知道所有指向它的其他网页的重要性。然而，我们可将这个问题改写为一个更数学化的问题。

首先建立一个矩阵，称为超链矩阵（hyperlink matrix），$\mathbf{H}=[H_{ij}]$，其中第 i 行第 j 列的元素为

$$H_{ij}\begin{cases}\dfrac{1}{l_j} & \text{如果 } P_j\in B_j\\ & \text{上述条件不成立}\\ 0 & \end{cases}$$

注意到 $\mathbf{H}$ 有一些特殊的性质。首先，它所有的元都是

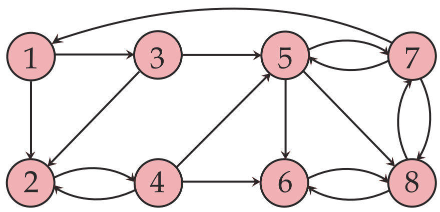
非负的。其次，除非对应这一列的网页没有任何链接，它的每一列的和为 1。所有元均非负且列和为 1 的矩阵称为随机矩阵，随机矩阵将在下述内容中起到重要作用。

我们还需要定义向量 $I=[I(p_i)]$，它的元素为所有网页的网页排序——重要性的排序值。前面定义的网页排序可以表述为

$$I = \mathbf{H}I$$

换言之，向量 I 是矩阵 $\mathbf{H}$ 对应特征值 1 的特征向量。我们也称之为矩阵 $\mathbf{H}$ 的平稳向量（stationary vector）。

让我们来看一个例子。下图所示为一个网页集合（8 个），箭头表示链接。

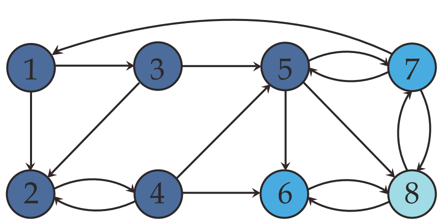


其相应的矩阵为 0

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix},$$

其中平稳向量为 $I=\begin{bmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.1800 \\ 0.2950 \end{bmatrix},$

这说明网页 8 的受欢迎程度最高。下图是阴影化的图，其中网页排序值越高的网页阴影越浅。



计算平稳向量

有很多方法可以找到一个方阵的特征向量。然而，我们面对的是一个特殊的挑战，因为矩阵 $\mathbf{H}$ 是一个这样的方阵，它的每一列都对应谷歌检索到的一个网页。也就是说，大约有 n=250 亿行和列。不过其中大多数的元都是 0；事实上，研究表明每个网页平均约有 10 个链接，换言之，平均而言，每一列中除了 10 个元外全是 0。我们将选择被称为幂法（power method）的方法来找到矩阵 $\mathbf{H}$ 的平稳向量 I。

幂法如何实现呢？首先选择 I 的备选向量 I^0，进而按下式产生向量序列 I^k

$$I^{k+1}=\mathbf{H}I^k, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

这个方法是建立在如下的一般原理上：

一般原理：序列 I^k 将收敛到平稳向量 I。

我们首先用个例子验证上面的结论。

I^0	I^1	I^2	I^3	I^4	…	I^{60}	I^{61}
1	0	0	0	0.0287	…	0.06	0.06
0	0.5	0.25	0.1667	0.0833	…	0.0675	0.0675
0	0.5	0	0	0	…	0.03	0.03
0	0	0.5	0.25	0.1667	…	0.0675	0.0675
0	0	0.25	0.1667	0.1111	…	0.0975	0.0975
0	0	0	0.25	0.1806	…	0.2025	0.2025
0	0	0	0.0833	0.0972	…	0.18	0.18
0	0	0	0.0833	0.3333	…	0.295	0.295

一个自然的问题是，这些数字有什么含义。当然，关于一个网页的重要性，可能没有绝对的度量，而仅有比较两个网页的重要性的比例度量，如“网页 A 的重要性是网页 B 的两倍”。基于这一原因，我们可以用一个固定量去同乘以所有的重要性排序值，这并不会影响我们能获得的信息。这样，我们总是假定所有受欢迎程度值（popularity）的和为 1，原因稍后解释。

三个重要的问题

自然而然产生的三个问题是：

* 序列 I^k 总是收敛吗？（即运算多次后，I^k 和 I^{k+1} 几乎是一样的）
* 收敛后的平稳向量是否和初始向量 I^0 的选取没有关系？
* 重要性排序值是否包含了我们想要的信息？

对目前的方法而言，上述三个的答案都是否定的！下

面，我们将看看如何改进我们的方法，使得改进后的算法满足上述三个要求。

先看个非常简单的例子。考虑如下包含两个网页的小网络，其中一个链接到另一个：

其矩阵为 $H=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

下例展示了算法的运行过程：

I^0	I^1	I^2	$I^3=I$
1	0	0	0
0	1	0	0

在这个例子中，两个网页的重要性排序值均为 0，这样我们无法获知两个网页之间的相对重要性信息。问题在于网页 P_2 没有任何链接。因此，在每个迭代步骤中，它从网页 P_1 获取了一些重要性，但却没有赋给其他任何网页。这样将耗尽网络中的所有重要性。没有任何链接的网页称为悬挂点（dangling nodes），显然在我们要研究的实际网络中存在很多这样的点。稍后我们将看到如何处理这样的点，在此之前我们先考虑一种新的理解矩阵 **H** 和平稳向量 I 的思路。

H 的概率化解释

想象我们随机地在网上跳转网页；也就是说，当我们访问一个网页时，一秒钟后我们随机地选择当前网页的一个链接到达另一个网页。例如，我们正访问含有 l_j 个链接的网页 P_j，其中一个链接引导我们访问了网页 P_i，那么下一步转到网页 P_i 的概率就是 $1/l_j$。

由于跳转网页是随机的，我们用 T_j 表示停留在网页 P_j 上的时间。那么我们从网页 P_j 转到网页 P_i 的时间为 T_j/l_j。如果我们转到了网页 P_i，那么我们必然是从一个指向它的网页而来。这意味着

$$T_i=\sum_{P_j\in B_i}\frac{T_j}{l_j}$$

其中求和是对所有链接到 P_i 的网页 P_j 进行的。注意到这个方程与定义网页排序值的方程相同，因此 $I(P_i)=T_i$。那么一个网页的网页排序值可以解释为随机跳转时花在这个网页上的时间。如果你曾经上网浏览过某个你不熟悉的话题的相关信息时，你会有这种感觉：按照链接跳转网页，过一会你会发现，相较于其他网页，你会更频繁地回到某一部分网页。正如谚语所说“条条大路通罗马，”这部分网页显然是更重要的网页。

基于这个解释，很自然地可以要求网页排序向量 I 的所有元之和为 1。

当然，这种表述中还存在一个问题：如果我们随机地跳转网页，在某种程度上，我们肯定会被困在某个悬挂点上，这个网页没有给出任何链接。为了能够继续进行，我们需要随机地选取下一个网页；也就是说，我们假定悬挂点可以链接到其他任何一个网页。这个效果相当于将超链矩阵 **H** 做如下修正：将其中所有元都为 0 的列替换为所有元均为 1/n 的列，前者就对应于网页中的悬挂点。这样修正后悬挂点就不存在了。我们称修正后的新矩阵为 **S**。

我们之前的例子，现在就变成了

对应矩阵 $S=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 及特征向量 $I=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

换言之，网页 P_2 的重要性是网页 P_1 的两倍，符合你的直观认知了。

矩阵 **S** 有一个很好的性质，即其所有元均非负且每列的和均为 1。换言之，**S** 为随机矩阵。随机矩阵具有一些很有用的性质。例如，随机矩阵总是存在平稳向量。

为了稍后的应用，我们要注意到 **S** 是由 **H** 通过一个简单的修正得到。定义矩阵 **A** 如下：对应于悬挂点的列的每个元均为 1/n，其余各元均为 0。则 **S** = **H**+**A**。

幂法如何实现?

一般而言，幂法是寻找矩阵对应于绝对值最大的特征值的特征向量。就我们而言，我们要寻找矩阵 **S** 对应于特征值 1 的特征向量。首先要说到的是最好的情形。在这种情形下，其他特征值的绝对值都小于 1；也就是说，矩阵 **S** 的其它特征值都满足 $|\lambda|<1$。

我们假定矩阵 **S** 的特征值为 λ_j 且

$$1=\lambda_1>|\lambda_2|\geq|\lambda_3|\geq\cdots\geq|\lambda_n|,$$

对矩阵 **S**，假设对应于特征值 λ_j 的特征向量存在一个基向量 v_j。这一假设在一般情况下并不一定要成立，但如果成立可以帮助我们更容易地理解幂法如何实现。将初始向量 I^0 写成如下形式

$$I^0=c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n.$$

那么

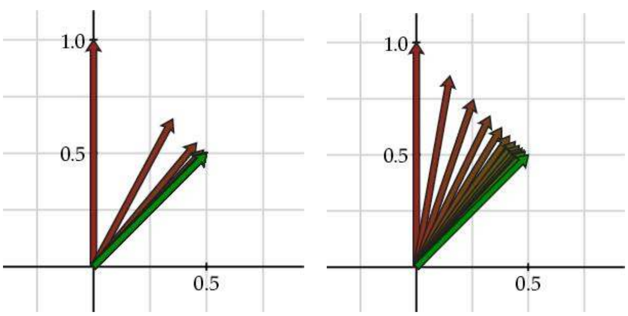
$$I^1 = SI^0 = c_1 v_1 + c_2\lambda_2 v_2 + \cdots + c_n\lambda_n v_n,$$
$$I^2 = SI^1 = c_1 v_1 + c_2\lambda_2^2 v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2 v_n,$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$I^k = SI^{k-1} = c_1 v_1 + c_2\lambda_2^k v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k v_n.$$

当 $j \geq 2$ 时，因为所有特征值的绝对值小于 1，因此这是 $\lambda_j^k \to 0$。从而 $I^k \to I = c_1 v_1$，后者是对应于特征值 1 的一个特征向量。

需要指出的是，$I^k \to I$ 的速度由 $|\lambda_2|$ 确定。当 $|\lambda_2|$ 比较接近于 0 时，那么 $\lambda_2^k \to 0$ 会相当快。例如，考虑下述矩阵

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix}$$

这个矩阵的特征值为 $\lambda_1=1$ 及 $\lambda_2=0.3$。下图左可以看出用红色标记的向量 I^k 收敛到用绿色标记的平稳向量 I。



再考虑矩阵

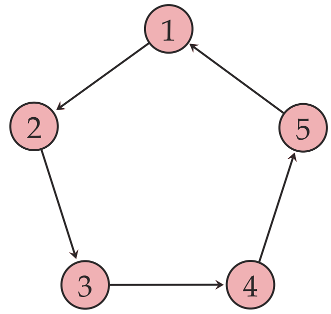
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$$

其特征值为 $\lambda_1=1$ 及 $\lambda_2=0.7$。从上图右可以看出，本例中向量 I^k 收敛到平稳向量 I 的速度要慢很多，因为它的第二个特征值较大。

不顺之时

在上述讨论中，我们假定矩阵 **S** 需要满足条件 $\lambda_1=1$ 和 $|\lambda_2| < 1$。然而，我们可能会发现，这一点并不总成立。

假定网络关系如下：



在这种情形下，矩阵 **S** 为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

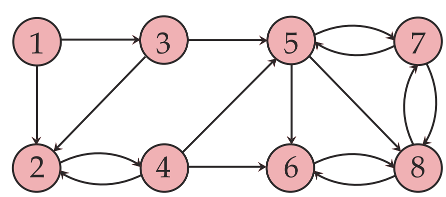
那么我们可以得到

I^0	I^1	I^2	I^3	I^4	I^5
1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0

在这种情况下，向量序列 I^k 不再收敛。这是为什么？注意到矩阵 **S** 的第二个特征值满足 $|\lambda_2| = 1$，因此前述幂法的前提不再成立。

为了保证 $|\lambda_2| < 1$，我们需要矩阵 **S** 为本原（primitive）矩阵。这意味着，对某个 m，$\mathbf{S}^m$ 的所有元均为正。换言之，若给定两个网页，那么从第一个网页经过 m 个链接后可以到达第二个网页。显然，上述最后的这个例子并不满足这个条件。稍后，我们将看到如何修正矩阵 **S** 以获得一个本原随机矩阵，从而满足 $|\lambda_2| < 1$。

下面说明我们的方法行不通的另一个例子。考虑如下图所示的网络

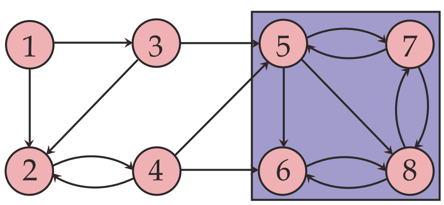


在此例中，矩阵 **S** 为

$$S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

其中平稳向量为 $I=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.12 \\ 0.24 \\ 0.24 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

注意到前四个网页的网页排序值均为 0。这使我们感觉不太对：每个页面都有其它网页链接到它，显然总有人喜欢这些网页！一般来说，我们希望所有网页的重要性排序值均为正。这个例子的问题在于，它包含了一个小网络，即下图中蓝色方框部分。



在这个方框中，有链接进入到蓝色方框，但没有链接转到外部。正如前述中关于悬挂点的例子一样，这些网页构成了一个“重要性水槽”，其他四个网页的重要性都被“排”到这个“水槽”中。这种情形发生在矩阵 **S** 为可约（reducible）时；也即，可以写成如下的块形式

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$$

实际上，我们可以证明：如果矩阵 **S** 不可约，则一定存在一个所有元均为正的平稳向量。

对一个网络，如果任意给定两个网页，一定存在一条由链接构成的路使得我们可以从第一个网页转到第二个网页，那么称这个网络是强连通的（strongly connected）。显然，上面最后的这个例子不是强连通的。而强连通的网络对应的矩阵 **S** 是不可约的。

简言之，矩阵 **S** 是随机矩阵，即意味着它有一个平稳向量。然而，我们同时还需要 **S** 满足 (a) 本原，从而 $|\lambda_2|<1$；(b) 不可约，从而平稳向量的所有元均为正。

最后一个修正

为得到一个本原且不可约的矩阵，我们将修正随机跳转网页的方式。就目前来看，我们的随机跳转模式由矩阵确定：或者是从当前网页上的链接中选择一个，或者是对没有任何链接的网页，随机地选取其他网页中的任意一个。为了做出修正，首先选择一个介于 0 到 1 之间的参数 α。然后假定随机跳转的方式略作变动。具体是，遵循矩阵的方式跳转的概率为 α，而随机地选择下一个页面的概率是 $1-\alpha$。

若记所有元均为 1 的 $n\times n$ 矩阵为 **J**，那么我们就可以得到谷歌矩阵（Google matrix）：

$$G=\alpha S+(1-\alpha)\frac{1}{n}J$$

注意到 **G** 为随机矩阵，因为它是随机矩阵的组合。进而，矩阵 **G** 的所有元均为正，因此 **G** 为本原且不可约。从而，**G** 存在唯一的平稳向量 I，后者可以通过幂法获得。

参数 α 的作用是一个重要因素。若 $\alpha=1$，则 $\mathbf{G}=\mathbf{S}$。这意味着我们面对的是原始的网络超链结构。然而，若 $\alpha=0$，则 $\mathbf{G}=1/n\mathbf{J}$。也即我们面对的是一个任意两个网页之间都有连接的网络，它已经丧失了原始的网络超链结构。显然，我们将会把 α 的值取得接近于 1，从而保证网络的超链结构在计算中的权重更大。

然而，还有另外一个问题。请记住，幂法的收敛速度是由第二个特征值的幅值 $|\lambda_2|$ 决定的。而对谷歌矩阵，已经证明了第二个特征值的幅值为 $|\lambda_2|=\alpha$。这意味着当 α 接近于 1 时，幂法的收敛速度将会很慢。作为这个矛盾的折中方案，网页排序算法的提出者谢尔盖•布林和拉里•佩奇选择 α=0.85。

计算排序向量 I

到目前为止，我们所讨论的看起来是一个很棒的理论，然而要知道，我们需要将这个方法应用到一个维数 n 约为 250 亿的 $n\times n$ 矩阵！事实上，幂法特别适用于这种情形。

回想随机矩阵 **S** 可以写成下述形式

$$S=H+A.$$

从而谷歌矩阵有如下形式

$$G = \alpha H + \alpha A \frac{1-\alpha}{n} J$$

其中 **J** 是元素全为 1 的矩阵，从而

$$G I^k = \alpha H I^k + \alpha A I^k \frac{1-\alpha}{n} J I^k .$$

现在注意到，矩阵 **H** 的绝大部分元都是 0；平均而言，一列中只有 10 个元是非零数。从而，求 $\mathbf{H}\boldsymbol{I}^k$ 的每个元时，只需要知道 10 个项即可。而且，和矩阵 **J** 一样，矩阵 **A** 的行元素都是相同的。从而，求 $\mathbf{A}\boldsymbol{I}^k$ 与 $\mathbf{J}\boldsymbol{I}^k$ 相当于添加悬挂点或者所有网页的当前重要性排序值。而这只需要一次即可完成。

当 α 取值接近于 0.85，布林和佩奇指出，需要 50 到 100 次迭代来获得对向量 I 的一个足够好的近似。计算到这个最优值需要几天才能完成。

当然，网络是不断变化的。首先，网页的内容，尤其是新闻内容，变动频繁。其次，网络的隐含超链结构在网页或链接被加入或被删除时也要相应变动。有传闻说，谷歌大约 1 个月就要重新计算一次网页排序向量 I。由于在此期间可以看到网页排序值会有一个明显的波动，一些人便将其称为谷歌舞会（Google Dance）。

总结

布林和佩奇在 1998 年创建了谷歌，正值网络的增长步伐已经超过当时搜索引擎的能力范围。在那个时代，大多数的搜索引擎都是由那些没兴趣发布其产品运作细节的企业研发的。在发展谷歌的过程中，布林和佩奇希望“推动学术领域更多的发展和认识”。换言之，他们首先希望，将搜索引擎引入一个更开放的、更学术化的环境，来改进搜索引擎的设计。其次，他们感到其搜索引擎产生的统计数据能够为学术研究提供很多的有趣信息。看来，联邦政府最近试图获得谷歌的一些统计数据，也是同样的想法。

还有一些其他使用网络的超链结构来进行网页排序的算法。值得一提的例子是 HITS 算法，由乔恩 • 克莱因伯格（Jon Kleinberg）提出，它是 Teoma 搜索引擎的基础。事实上，一个有意思的事情是比较一下不同搜索引擎获得的搜索结果，这也可以帮助我们理解为什么有人会抱怨谷歌寡头（Googleopoly）。

原文链接：

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank

参考文献

1. Michael Berry, Murray Browne, Understanding Search Engines: Mathematical Modeling and Text Retrieval. Second Edition, SIAM, Philadelphia. 2005.
2. Sergey Brin, Lawrence Page, The antaomy of a large-scale hypertextual Web search engine, Computer Networks and ISDN Systems, 33: 107-17, 1998. Also available online at http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf
3. Kurt Bryan, Tanya Leise, The $25,000,000,000 eigenvector. The linear algebra behind Google. SIAM Review, 48 (3), 569-81. 2006. Also avaiable at http://www.rose-hulman.edu/~bryan/google.html
4. Google Corporate Information: Technology.
5. Haveliwala, Kamvar, The second eigenvalue of the Google matrix.
6. Amy Langville, Carl Meyer, Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings. Princeton University Press, 2006. This is an informative, accessible book, written in an engaging style. Besides providing the relevant mathematical background and details of PageRank and its implementation (as well as Kleinberg's HITS algorithm), this book contains many interesting "Asides" that give trivia illuminating the context of search engine design.

微博上的数学漫游（连载三）

歌之忆　http://weibo.com/wildmath

当一部数学史摆在我们面前的时候，我们总会津津乐道于那些创造了伟大的数学理论或者证明了著名的数学猜想的数学家们。可是，真切的数学却同这个世界经历着同样的历程——战争与和平、繁华与凋零。我们不该忘却那些隐秘的数学英雄，他们以数学为武器来捍卫着我们安宁的生活，他们以卓绝的才华印证了数学在华美的外衣下，蕴含的是能将智慧发挥到极致的伟大力量。正是这强悍的力量，在守卫着我们的世界，构建着我们的心灵。

波兰三杰

波兰的密码三杰：雷耶夫斯基(1905-1980,右)、罗佐基(1909-1942,中)和佐加尔斯基(1907-1978,左)

今年是计算机科学伟大的先驱者阿兰•图灵诞辰一百周年，在无数有关图灵的故事中，流传甚广而且特具魅力的就是他破译德国英格玛（Enigma）密码系统的传奇。可波兰数学家和密码学家雷耶夫斯基（Marian Rejewski）、罗佐基（ Jerzy Różyck）和佐加尔斯基（Henryk Zygalski）对破译英格玛所做出的居功至伟的贡献，却并不广为人知。

围绕密码的传奇故事可谓汗牛充栋。古罗马的凯撒征战高卢（今法国）时，就用加密的方式向其副帅、政治家西塞罗的弟弟传递情报。凯撒的加密不过是把字母替换成字母表中后移三位的字母。如果借英语想象一下，埃及艳后收到凯撒的一行字“ehdxwb”,她将会心一笑：夸我是美人儿(beauty)!

向美人儿表白心迹自然无需加密，可国与国


电影《凯撒与克丽奥佩拉》剧照

之间，难免许多秘密。一战结束后，德国的保密通信成为各国的研究热门，不过大多无功而返。法国间谍还算不错，搞到了商用英格玛加密机，多少了解到一点加密原理。可是破译密码还需要找到密钥。估算一下可能的密钥数量，1 亿亿，这可是个天文数字。

擅长解读爱情密码的法国人，在英格玛面前却一筹莫展，只好把这台加密机送给波兰。这是三十年代初的事情，当时全世界恐怕都没有想象到，波兰人早在二十年代就探索用数学来解读密码。就在这台英格玛面前，波兰数学家雷耶夫斯基开启了波兰数学的另一段传奇。不过，这台好戏需要对手的配合。

对手戏的好看，在于双方旗鼓相当。德国人向来以严谨著称。二战时，盟军派出许多间谍去打探德国到底有多少坦克，而统计学家发现德国人严谨得过了头，居然给其出厂的坦克连续编号，于是要求盟军：别只顾清点战场上干掉了多少辆，把干下来的最大编号告诉我们！由此直接估算出了坦克总量。


波兰华沙博物馆的英格玛加密机

德国人在使用貌似天衣无缝的英格玛加密机时，照样秉承了德国无与伦比的严谨，也同样严谨得过了头。德国人为了防止通信中的错误或干扰，每发送一条信息时，都在前端把三个字母的密钥重复发送两次。看似很保险的这一细微的步骤，却被曾在德国哥廷根学过保险精算的雷耶夫斯基抓住了漏洞。

雷耶夫斯基从截获的德国密文中，判读出德国人把三字母密钥连发了两次，这个发现非同小可。更令人叫绝的是，他针对这种密钥重复，运用排列群来分析英格玛机的加密过程。由此，他把密钥搜索范围从原先的 1 亿亿降低到了 10 万。德国人重复了密钥的三个字母，送给了波兰数学家一份真正的厚礼。

二战之前，英格玛让英法情报机构摇头叹息，因为谁都无法从 1 亿亿个候选中及时找到密钥。英格玛却让波兰情报机构大放异彩，因为他们只需在 10 万个候选中去找密钥。虽然德国每天都改变密钥，但只要截获到 80 条信息，就能确定密钥的位置，再用两小时即可破解。这就是波兰数学家创造的奇迹。

图灵雕像

雷耶夫斯基雕像

今天人们习惯于把破译英格玛的功劳记在图灵身上，但那样一个横空出世的图灵反而是没有质感的。图灵破译英格玛的成就是在 40 年代，而在这之前的 1932-1938 年，波兰率先破译英格玛，令他国望尘莫及。甚至有数学家评价：雷耶夫斯基解密英格玛所创造的，是一条赢得第二次世界大战的数学定理。

二战后返回波兰的雷耶夫斯基，遭到安全机构反复调查。守口如瓶的他艰难地以记账员的身份生活着，直至退休多年才向世人告白真相。波兰三杰，从此成为波兰民族的骄傲。然而，波兰数学家创造的奇迹，却并非二战中的唯一。二战结束半个世纪后，又一位成就斐然的数学家以绝世高手的形象走出密码战的历史尘封。

玻尔林 Beurling

瑞典数学家玻尔林（1905-1986）

德国在二战的战略通信中使用的是比 Enigma 远为复杂的 G-Schreiber 密码。但依旧是栽倒了，栽倒在更厉害的数学家手下。解码的巨牛甚至连样机都没见过，全靠手工演算两个星期，直接将密码攻克！后来，他到美国普林斯顿高等研究所，继承了爱因斯坦的办公室。此人就是瑞典数学天才玻尔林（Arne Beurling）。

破译德军战略通信密码的玻尔林，极富原创思想。虽破译密码只是其专业外的客串，但希特勒进攻苏联的巴巴罗萨行动就此被瑞典破译。多年来，人们百思不得其解："只靠笔和纸在两个星期破解 G-Schreiber 密码，您到底怎么玩的？"他对此避而不答，却反问：哪有魔术师会揭秘自己玩的魔术？

美国数学家道格拉斯（1897-1965）

也许玻尔林对自己破译 G-Schreiber 密码还有许多意犹未尽的思考。此君总是在深思熟虑之后才发表自己的作品。有次听 Peter Duren 做报告，玻尔林当即告知：数年前他就得到了同样结论，只不过没去发表。Duren 迎头痛击，申明自己要去发表。于是上演了一出玻尔林四处追打 Duren 的喜剧！

追猎可是玻尔林擅长的。 在此君做博士论文的 1929 年，就已经证明了复分析中著名的 Denjoy 猜想。证明刚一完毕，玻尔林便拉着他老爹跑到巴拿马去捕猎鳄鱼。鳄鱼倒是逮到了，可这次度假却让他错失了一份巨大的荣耀——芬兰数学家阿尔福斯（Lars Ahlfors）率先发表了证明，并借此拿下 1936 年菲尔兹奖。

不知道玻尔林猎杀的鳄鱼是否吃掉了一枚菲尔兹奖章，不过玻尔林倒没有因为这事和阿尔福斯闹过不愉快。两位杰出的数学家岂止是惺惺相惜，他们常聚在一块儿痛饮美酒，甚至跑到阿尔福斯家里一醉方休。末了，玻尔林和阿尔福斯再加上阿尔福斯太太，三个人一齐和衣醉卧在同一张床上！

假如时光能穿越，放在今天这样一个物欲横流的社会，那个曾经醉心于捕猎鳄鱼、二战时玩残了德军战略情报的瑞典天才玻尔林，会不会依然不去计较落在芬兰同行阿尔福斯手里的菲尔兹奖？虽然 1936 年在挪威奥斯陆颁发的第一届菲尔兹奖，名头远非今天这般如日中天，却也吸引了无数眼球。

美国数学家维纳（1894-1964）

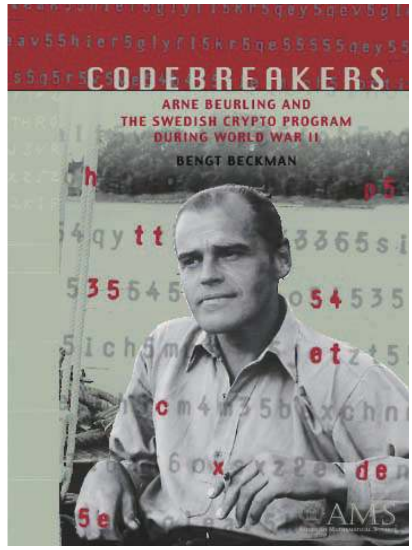
与阿尔福斯同时获菲尔兹奖的是美国数学家道格拉斯（Jesse Douglas）。然而此君无法出席会议，只得请维纳（Norbert Wiener）登场帮忙。求名心切的维纳毫不推辞、光鲜登场，对着记者一顿神侃。啥也没整明白的挪威记者，无比兴奋地拍了一通新闻照片，却没去理会个中曲直。最终报纸上名为道格拉斯的获奖者，却是维纳的尊容！

出了风头的维纳，内心很是烦恼。维纳一生多次在优先权上与其他名流纠缠不清。他曾要求把巴拿赫空间命名为“巴拿赫 - 维纳空间”，无奈无人理睬。人性的弱点，早被莎士比亚一眼看穿。看看《亨利四世》就明白：惟友谊能超越荣誉，成就人生。而阿尔福斯和玻尔林，拥有了几乎完美的真正友谊。

来自斯堪的纳维亚半岛的两位数学高手阿尔福斯和玻尔林，自年轻时代就结下了深厚的情谊。二战降临，阿尔福斯一路辗转逃到美国，最终任教于哈佛。而玻尔林则为防备德国立下汗马功劳。战后，阿尔福斯念念不忘玻尔林，终将他请到哈佛一起工作了两年。阿尔福斯说，那是他生命中最美好的时光。

那段诗意的时光，让两位学者收获了丰硕成果。阿尔福斯的家就在哈佛广场附近。俩人把酒言欢至深夜，玻尔林就干脆挤到阿尔福斯两口子的床上。更多时候，俩人讨论至清晨。旭日东升之际，玻尔林满嘴酒气，跌跌撞撞回自己的寓所。街上巡视的警察向这位怪人打招呼：先生，早上好！晚安！

有人说，数学家的性格与他们从事的领域相关。做几何的大多优雅，搞分析的却容易暴躁。此话放到玻尔林身上，绝对吻合。此君习惯在课堂破口大骂那些思路一团糟的学生，甚至还和同事大打出手。某天忽然可怜兮兮跑去问学生：我脾气真有那么糟吗？学生安慰道：好多啦！您现在对咱就像天使一样温柔！



瑞典的民族英雄、密码战历史上最神秘的高手、50 年代坐镇普林斯顿高等研究所的杰出数学家玻尔林

爱因斯坦逝世当日的办公室照片，此办公室后来由玻尔林使用

在独具魅力的数学家身上，往往流传着许多传奇。体格强壮、性格刚毅的玻尔林，爱好航海、捕鱼，颇有北欧海盗的侠肝义胆。可这个外表粗犷的男子汉，写出来的论文却极其优美。他的学生卡尔松（Carleson）深情地说：正是瑞典幽深的森林、湖泊、山脉连同迷人的童话仙女，养育出了玻尔林的瑞典式数学。

生于 1905 年的玻尔林，20 多岁便开启了将复分析、调和分析、位势理论融为一体的创造历程，才华如青年牛顿一样令人震撼。他性格既刚猛而又深沉内敛，总是在敲定全部细节之后才肯发表论文。如今他的大量遗作，成了令人垂涎的丰硕宝藏。世上惟有这等才华与自省，才配继承普林斯顿高等研究所爱因斯坦的办公室吧？

这个在祖国需要的时候，区区一周多就破译德军战略密码、使祖国免遭战火侵袭的玻尔林，不仅混合了率性果敢与精致优美，还时时玩出孩子般的恶作剧。寒冬雪夜，他曾当着阿尔福斯的面揉起一团雪球，把路灯砸灭，然后拉着一众人马笑着逃之夭夭。惟有被自由与激情抚养大的理性，才能迎来创造。

阿尔福斯 Ahlfors

芬兰数学家阿尔福斯（1907-1996）

阿尔福斯评价玻尔林成熟而自信、性格刚毅，他把自己归结成谦和好静的宅男，与玻尔林恰好南辕北辙。可这么个谦和好静的阿尔福斯，晚年退休仍喜好喝上几杯。某日腋下夹着一瓶酒，快进家门时，却见有人冲过来向他偷袭。二话不说，抡起瓶子砸过去。那可是一瓶上好的苏格兰威士忌啊！

退休在家尚能这么果敢地打斗，可见阿尔福斯绝非谦和好静那么简单。这位大数学家看到瑟斯顿以几何直觉研究拓扑取得巨大成功、斩下菲尔兹奖，便向美国国家自然科学基金会提交了研究申请书——与那些洋洋洒洒的申请书不同，他只写了一句话：我想研究瑟斯顿的理论。如此彪悍的学者！

阿尔福斯说玻尔林是其一生最好的朋友。他们联手为后人留下了玻尔林 - 阿尔福斯算子、玻尔林 - 阿尔福斯定理等传世篇章。玻尔林更是瑞典的民族英雄。但他究竟如何单枪匹马靠手工演算就破译了德军战略密码，却已随英雄的逝去，成为永久的谜团。也许只有上帝才懂得天才吧！

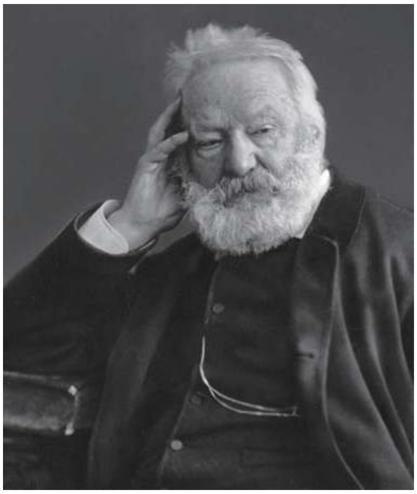
曾经有人罗列出了人类历史上十大最神秘的、被带进坟墓的未解之谜。玻尔林提前两周破译德国进攻苏联的计划，榜上有名。而名列榜首的，则是意大利传奇乐器制作大师斯特拉迪瓦里制作提琴的秘密。数学大师与乐器制作大师遗留下千古之谜，那是人类的无上荣光，那是人类心智与心灵的绝响。

大文豪雨果说：“人的智慧掌握着三把钥匙，一把开启数学，一把开启字母，一把开启音符，知识、思想、幻想就在其中。”我们该对每一位手握钥匙的精英致以深切的敬意，因为他们成功攀登了凡人难以企及的高峰，因为他们定义了我们所拥有的文明的高度。而数学，无疑是文明高度的一个标杆。

数学处在文明的中心地带，难免让数学家滋生了优越感。阿尔福斯听到有人把菲尔兹奖说成“数学里的诺贝尔奖”，便调侃到：诺贝尔奖本不该给数学，你没法仰望数不清的数学天才，从中找出最厉害的。设经济奖倒很容易，只要在烂木桶底上去刮一刮，把刮出来的渣子拿去，就是经济奖得主了！

意大利小提琴制作大师斯特拉迪瓦里制作的小提琴，是价值连城的艺术瑰宝。

阿尔福斯如此对诺贝尔奖不敬，也不偶然。当时从芬兰出境，随身只许带10克朗现金。这位第一届菲尔兹奖得主，悄悄把菲尔兹奖章藏在身上带到瑞典，然后拿到典当铺换回现金！事后被瑞典的朋友们得知，花了一笔钱把奖章赎了回来。对自己的菲尔兹奖尚且如此，无怪乎对诺贝尔奖这般不敬。



法国文豪雨果（1802-1885）

敢把菲尔兹奖章拿去换钱的阿尔福斯，只不过对诺贝尔奖说了点戏谑之词。而萨特却断然拒绝了诺贝尔文学奖："一切来自官方的荣誉我都不接受，我只接受不受任何限制的自由。"当然，存在主义大师可没法拒绝美女萨冈的情书："这个世纪疯狂，没人性，腐败。您却一直清醒，温柔，一尘不染。"

在理性的巅峰，有最卓绝而又骄傲的灵魂。俄罗斯大数学家柯尔莫哥洛夫拒绝了沃尔夫奖，佩雷尔曼不但拒绝了菲尔兹奖，继而拒绝了美国克雷研究所千禧年百万美元数学大奖。在至高无上的荣耀面前，那些泰然处之、平静自如的精英们，构筑起了人类心智最具魅力的绝美景观，高山仰止，景行行止。

在理性巅峰上的数学，历来是年轻智力的角斗场。阿尔福斯年仅21岁就斩下Denjoy猜想，它是青年学子孜孜以求的传奇，也是学术薪火代代相传的佳话。自瑞典数学之父米塔-莱夫勒执教当时属于沙俄的赫尔辛基大学始，芬兰一代接一代有了Mellin、Lindelöf、Nevanlinna及至阿尔福斯，学术传承延绵不绝。

米塔-莱夫勒 Mittag-Leffler

瑞典数学之父米塔-莱夫勒（1846-1927）

斯堪的纳维亚半岛曾经有过挪威阿贝尔（Abel）的传奇，可惜天妒英才，27岁就撒手人寰。北欧的数学童话，还得从那个传说中被诺贝尔妒恨的米塔-莱夫勒说起。此人早年成就平平，只是造化弄人，在完成学业后居然搞到一笔为期三年的奖学金，而使用这笔钱的唯一条件却是：离开瑞典闯天下，留学三年！

一心想学分析的米塔-莱夫勒踏上欧洲大陆，他首先跑到巴黎去跟随埃尔米特（Charles Hermite）。但埃尔米特却严肃地告诫这位同行："你搞错了！你根本就不该追随我，你该去柏林，去听魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass）的课程——他是我们所有人的大师"！人们常说文人相轻，但在追随真理的数学家那里，如此开阔的胸襟，并非鲜见。

在埃尔米特看来，魏尔斯特拉斯才代表了数学中最高规格的逻辑标准。埃尔米特自知法国人天生富有艺术气质，常常以

法国数学家埃尔米特（1822-1901）

直觉取胜，此乃做分析的大忌。而他的高足庞加莱（Henri Poincaré）就曾这么评价自己：你们居然还说他是逻辑学家！鬼才相信！事实恰好相反，我真搞不懂那些稀奇古怪的思路是怎么从他脑袋里面跑出来的！

在主张直觉的数学家眼里，数学的真理是被发现的。而在主张逻辑的人那里，数学的真理是被发明的。直觉强大的埃尔米特一心向往逻辑，意味深长地说："在数学面前，我们是仆人而非主人"。天生就是数学的主人的巴拿赫，居然被自己的老师史坦因豪斯批评道：巴拿赫，空间想象力还是差了点！

巴黎有以直觉见长的埃尔米特，柏林有以逻辑见长的魏尔斯特拉斯。一心想研究解析函数的米塔 - 莱夫勒，最终听从了埃尔米特的建议，转赴柏林。这一步注定要在数学史上留名：它不仅点燃了瑞典与芬兰长盛不衰的数学火焰，它还引出了数学史上极有影响的一次交锋，一次直觉与逻辑之间的交锋。

德国数学家魏尔斯特拉斯（1815-1897）

直觉与逻辑之间这场精彩的缠斗，源自为瑞典国王奥斯卡二世而发起的一场竞赛。比赛内容是解释太阳系运动是否稳定。竞赛的三位裁判是擅长直觉的埃尔米特、以严格著称的魏尔斯特拉斯以及崇尚严格的米塔 - 莱夫勒。最终，埃尔米特的学生庞加莱获胜，获奖论文将在期刊 Acta Mathematica 公开。

弗拉格门 Phragmén

瑞典数学家弗拉格门（1863-1937）

除了认可庞加莱的论文具有非凡的创造性，擅长直觉的埃尔米特没有看出问题，以严格性著称的魏尔斯特拉斯没有看出问题，崇尚严格性的米塔 - 莱夫勒也没有看出问题。清样送到 Acta Mathematica 的编辑那里，只等排版印刷。然而，名叫弗拉格门（Lars Phragmén）的小编辑，却看出了一连串逻辑上无法回避的问题。

直觉与逻辑，既是永恒的对手，也是永恒的朋友。如果说直觉像是建筑设计师，那么逻辑就是结构工程师。曾经调侃过导师埃尔米特缺乏逻辑严密性的庞加莱，却忠实遗传了导师擅长直觉的特质。看似天衣无缝的论文，被弗拉格门指出无数破绽。甚至连已经排印好的修订版，依旧还是被抓住了漏洞。

不知米塔 - 莱夫勒是否是想讨好圣上，居然建议用数学论文竞赛来庆贺奥斯卡二世国王的 60 大寿。庞加莱从国王那里赢得了 2500 克朗的奖金，却被弗拉格门指出错误，排好论文的杂志只得撤回来。修订错误后，论文从原先的 160 页变成 270 页。庞加莱又只得乖乖地掏出了不止 2500 克朗用作排印费用。

从瑞典流到法国的 2500 克朗，在庞加莱的口袋捂热了一年，现在又转了回来。更悲催的是，这枚由瑞典国王颁发给庞加莱的奖章，多年之后，居然又在庞加莱孙子的家里被梁上君子盗走。想想看，法兰西真不愧是个数学大国，不仅夺走那么多菲尔兹奖，连小偷都知道与数学有关的宝物是无价的。

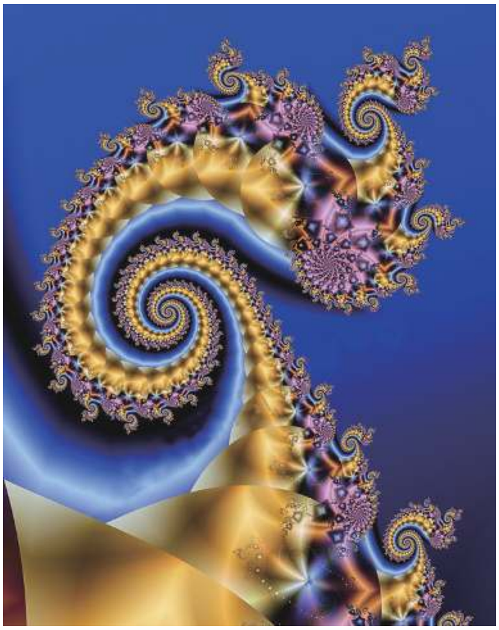
庞加莱不仅把赢来的奖金如数奉还，最终还弄丢了自己的奖章。但人类却千载难逢地收获了魅力无穷的崭新数学——混沌。瑞典，也在这场逻辑与直觉的较量中，发现了自己的数学天才弗拉格门。这个从读大学开始就接二连三发表论文的才俊，后来与芬兰数学家提出了极为深刻的 Phragmén-Lindelöf 原理。

瑞典奥斯卡二世国王

法国数学家庞加莱（1854-1912）

此时从赫尔辛基来到斯德哥尔摩的米塔 - 莱夫勒，正在开辟瑞典数学之路。弗拉格门从大学期间就开始帮助打理他的数学期刊 , 直到成为编辑。就这样，历史上第一次，一位数学家因为审读论文清样而赢得了国际声望。弗拉格门的犀利眼光 , 让庞加莱认识到自己出了很大的错误。这是科学史上最有价值的错误之一。这个错误，引出了混沌的概念。

作者简介：歌之忆（ 笔名），生于六十年代，数学博士，任电子信息专业教授十年有余。现阶段在网络数据分析与图像识别等领域主持技术研发。



分形——故事之外

陈关荣

今天，“分形”的意思、其解析理论及计算方法在数学、自然科学和工程技术领域里可以说是家喻户晓，因而在这里无需多费笔墨来加以定义和描述。然而，漂亮的分形到底有什么实用价值，特别是在电子技术中有什么可能的应用，也许需要举几个例子来加以诠释。

从分形故事说起

二十世纪六十年代，当时在美国 IBM Thomas J. Watson Research Center 工作的波兰出生法国裔数学家本华 • 曼德波罗（Bernoit B. Mandelbrot, 1924-2010）探讨了“英国的海岸线有多长”这个有趣的问题。他注意到，如果用公里作为测量单位，从几米到几十米的一些曲折地段会被忽略；改用米来做单位，测得的总长度会增加，但一些厘米量级以下的曲折地段还是不能反映出来；进一步，从理论上来说，海边沙砾的下一个尺度是分子、原子，于是要使用更小数量级的尺度的话，得到的海岸线总长度就很不一样。因此，长度不是海岸线的与尺度无关的不变量。这当然只是一个平凡的观察。但是，平凡的观察加上不平凡的思考，让曼德波罗引进了“分数维图形”的新概念，建立了今天熟知的分形几何理论。

曼德波罗独具匠心，创造了 fractal 一词。据他自己说，在 1975 年的一天晚上，他在冥思苦想之余偶然翻开了儿子的拉丁文字典，看到一个形容词 fractus（“破碎”），其对应的动词是 frangere（“产生无规则的碎片”）。他马上联想到具有相同词根的英文名词 fraction（“分数”、“部分”）及 fragment（“碎片”），从而“突然想到”一个新词 fractal。而在那以前，他一直是用英文单字 fractional 来表示他的分形思想的。这样，曼德波罗就取拉丁词之头、英文之尾，开始用 fractal 来描述自然界中传统欧几里得几何学所不能刻画的一大类当时被认为是“杂乱无章”的几何图形。这个新词从此不胫而走，进入了各种语言的字典词典，并将永留世间。

图 1 本华•曼德波罗（1924-2010）

图 2 中世纪《圣经》中的一幅插图[1]

1967 年，曼德波罗在美国《科学》杂志上发表了题目为《英国的海岸线有多长？》的一篇划时代标志性论文，阐述了分形的新思想。1977 年，他又在巴黎出版了一部法文著作“Les objets fractals: forme, hasard et dimension”，并于同年在美国出版了其英文版“Fractals: Form, Chance and Dimension”（中译本《分形：形状、机遇和维数》），和“The Fractal Geometry of Nature”（中译本《大自然的分形几何》）。但是，历史好像也是分形的，相似的事件反复重演。像过去许多名著的命运一样，曼德波罗这三本书完全没有得到学术界应有的重视，直到 1982 年他第三本书的第二版出来后，才受到欧美社会的广泛关注，并迅速形成了“分形热”。此书后来被分形学界视为“分形学之圣经”。

曼德波罗于 2010 年 10 月 14 日辞世，生前是耶鲁大学数学系的荣休 Sterling 讲座教授、IBM 荣休院士、1993 年沃尔夫物理学奖获得者、美国国家科学院院士。

说起来有趣，分形几何学的数学历史从不同角度来说也同样具有相似性。类似于分形的思想可以追溯到瑞典数学家 Niels F. H. von Koch（1870-1924）。他从一个三角形的“岛”出发，通过对称性而把它的“海岸线”变成不断向更小尺度层次延伸的连续曲线，于是其长度也在不断增加并趋向于无穷。

其实，类似于分形几何的历史思想还可以往前追溯。不妨看一看图 2。“我在看一本科学史书时注意到了这幅图。书上说这是中世纪、即 13 世纪晚期《圣经》中的一幅插图。意思是，上帝按照几何学设计了这个世界。我又搜索了一下这幅图；一些网站显示为《上帝计测宇宙》，描绘了作为宇宙建筑者的神（1250 年绘制）。”2008 年，时为上海交通大学数学系本科生的王雄同学在给我的电子邮件中如是说。他惊叹道，“那幅图的几何，很像一个 Mandelbrot 分形图案！作为中世纪作品画成这样的效果，已经是非常不错了，很难想象会是别的什么”。王雄后来成了我的博士研究生，现在就读于香港城市大学，研究与分形相关的混沌理论。

这里顺便提及，最早把分形几何引进中国的可能是中科院沈阳金属研究所的龙期威研究员，他曾是中国科学技术大学教授并任中科院国际材料物理中心主任。他率先把分形理论应用于金属断裂研究，并培养了把分形方法引入到裂隙岩体非连续变形、强度和断裂破坏行为为研究的一位优秀学生，也就是四川大学现任校长谢和平院士。

现在回到本文的主题，即分形几何在电子技术中有什么潜在应用和发展前景？这里只讲两个启发性的例子：分形天线和分形电容器。

分形天线

分形天线是一种无线通信用的新概念天线。和传统天线相比，它在同样面积或体积的条件下具有最大的有效长度或周长。这种天线具有极端紧凑和多宽频带等特性，非常适合于 RFID 和移动通讯方面的应用。由于现代通讯工具种类越来越多，体积也越来越小，因而需要把天线做得很小很小，而且越小越好。为此目的，把天线的形状做成分形是个好

主意，因为这可以在同样面积的限制条件下把天线做得很长，而且还能取代多条天线而同时工作在几个不同频率区间之中。

把天线阵列设计成分形样子的做法早在 1957 年就出现了。它是由美国伊利诺伊大学电子工程系教授 Raymond DuHamel 和学生 Dwight Isbell 提出的对数周期阵列（log periodic array）。分形天线阵列与传统天线阵列设计相比，具有多频和宽频特性，可用于快速计算方向图，可有效地利用狭小地域来布置庞大的平面阵列，可实现低副瓣设计策略，等等。两种典型的分形阵列天线是康托（Cantor）集阵列和维尔斯特拉斯（Weierstrass）线性阵列，目前多用于电视天线（图 3）。

图 3 分形阵列天线

基于分形结构来设计和优化单个天线的做法始于 1988 年，由波士顿大学教授 Nathan Cohen 首先提出，但相关的学术论文到了 1995 年才第一次正式发表。一些代表性的分形天线见图 4。

图 4 一些代表性的分形天线

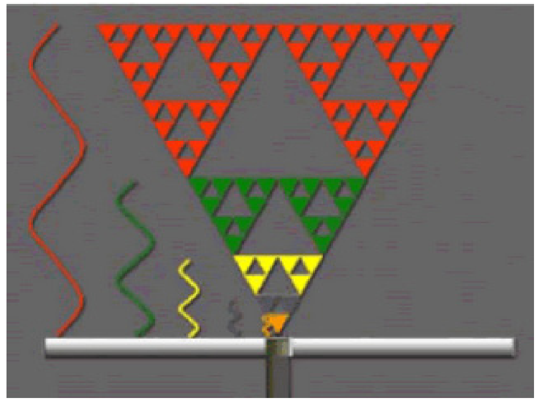


图 5 有限分形（伪分形）天线

与传统天线相比，分形天线除了在缩小尺寸方面独具一格之外，还有其他优点，例如：可以利用其自相似性来增加工作频带数目和带宽，具有自加载特性而不需要额外的调谐线圈和电容等元器件或匹配电路来辅助其在宽带工作条件下达到阻抗匹配，还可以简化电路设计和降低系统造价，等等。据报道，基于分形设计的天线可以在 UHF（862-928 MHz）频带的无线通信设备中和 GSM+DCS（900MHz 和 1800MHz）双频移动天线系统中得到较好的应用。目前的研究主要集中在 GSM（900MHz）、PCS（1900MHz）、蓝牙无线通信系统（2.4GHz）等方面。它不仅可以在个人手提（如 cellular phone 即蜂窝电话）和其他无线移动设备（如无线局域网中的 laptop 即笔记本电脑、车载天线系统）中得到应用，还可望用于卫星通信系统和相控阵雷达系统。目前看来，如果相关的一些技术障碍（如多频道信号之间的相互干涉）能够取得突破，则分形天线的前景还是颇为诱人的。

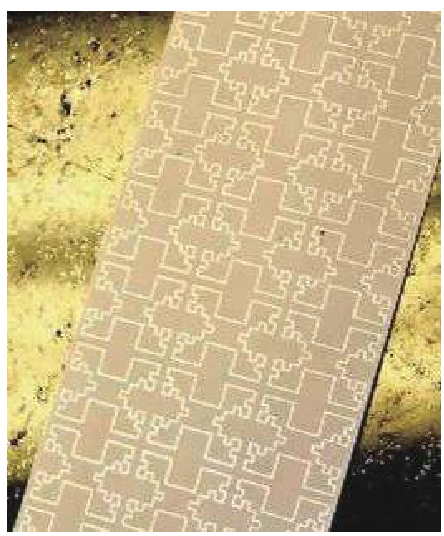


图 6 变形材料制造的分形天线

当然，从数学的角度来看，严格地说这些例子都只是利用了有限分形、或者称为伪分形（如图 5 所示），因而尚有潜力可以挖掘。事实上，目前一切还在尝试之中，期待新的进展。

据报道，新近迅猛发展的纳米变形材料（Metamaterials）和用变形材料制造的天线都充分考虑到有效地利用分形几何结构（图 6）。

2011 年还有报道说 [2]，用密封分形共振器合成的宽带变形材料可以制造出隐形外套，其原理是可以让光绕过这些材料而实现传播和折射（图 7）。

图 7 用具有分形结构的变形材料制造出隐形外套 [2]

分形电容

分形电容器设计的基本思想和分形天线是一样的。理论上，前者是在有限的面积内获得无限长的曲线以增加天线的有效长度，后者则是在有限的体积内获得无限宽的曲面以增加电容器的储电容量。

研究发现 [3]，在传统的电容器中把部分纵向的相反电极分布改为横向的话可以有效地提高其储电量。如图 8 所示，中间的电容器结构要比顶层的那个储电量高，而底层的那个结构的储电量更高。图 9 是根据这个思想设计出来的一个分形电容器的示意图。图 10 则是分形电容器的一个原型。

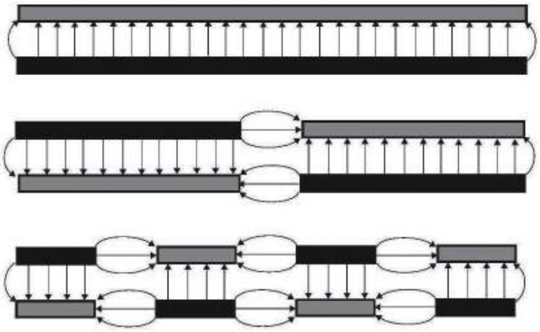


图 8 增加横向的相反电极数目能有效地提高电容器的储电量 [3]

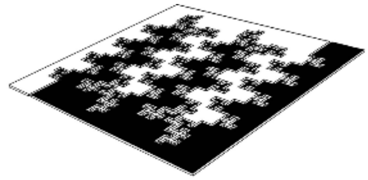


图 9 分形电容器设计示意图 [3]

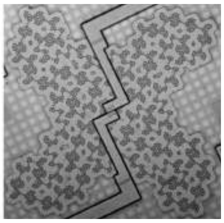


图 10 分形电容器的一个原型 [3]

把上述分形电容器的设计思想推广到三维是一个数学上很自然的做法，也适应了实际应用的需求。图 11 介绍了实现这个想法的几种设计方式。图 12 是分形电容器的一个设计原型。

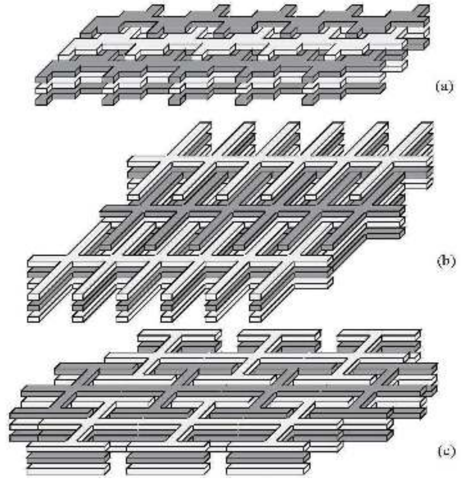


图 11 三维分形电容器的几种设计方式 [4]

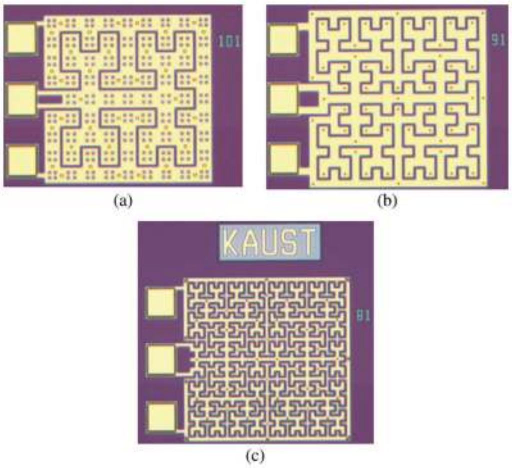


图 12 分形电容器的一个设计原型 [5]

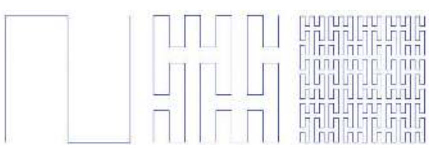
分形电容器应用的一个成功试验性例子是由瑞士 Paul Scherrer Institute 公司研制的分形超级电容器（supercapacitor

或 ultracapacitor）[6]，被安装在一辆名为 Hy.Power 的燃料驱动小汽车里，用作汽车爆发加速时的拖动功率补给。2002 年 1 月 16 日，Hy.Power 成功地爬上了位于瑞士 Brig 与意大利 Domodossola 之间海拔两千多米高的 Simplon 山口（图 13）。这段山路极为陡峭，而且当时山顶气候条件恶劣，同类型的小汽车只能望山兴叹 [7]。

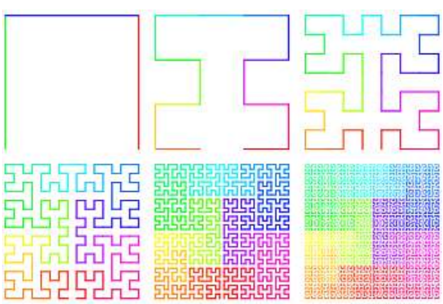
图 13 配有分形电容器的 Hy.Power 汽车爬上 Simplon 山口 [7]

相关的分形数学

说到分形天线和分形电容器的数学思想和原理，还得从 Peano 曲线（诞生于 1890 年）和希尔伯特（Hilbert）曲线（诞生于 1891 年）谈起。这两种曲线如图 14 所示。这类曲线通过反复迭代而不断卷缩并延长。例如，希尔伯特曲线的第 n 次迭代的长度是 $2^n - 2^{-n}$，可见其长度趋于无穷。有趣的是，这些貌似一维的曲线的 Hausdorff 维数是 2 而不是 1，也就是说它们最终可以充满整个方块。



(a) Peano 曲线



(b) 希尔伯特曲线

图 14 平面填充曲线

具体地说，希尔伯特曲线是如图 15 所示来产生的。

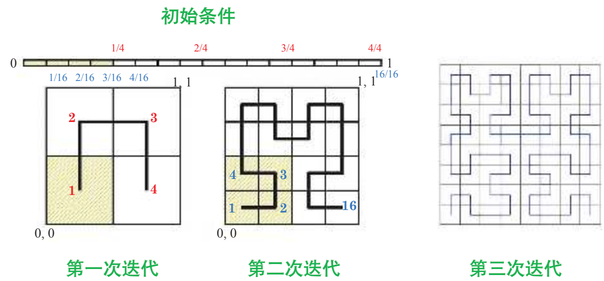


图 15 希尔伯特曲线的生成

如果使用字母的一种语法表示（Lindenmayer 系统，简称 L- 系统），则可能更为容易理解和记住迭代的法则：例如，在图 15 中第一次迭代后得到的图形就是图 16 中的 H 图形；把 H 变成箭头右方的 4 小块 $\begin{bmatrix} H & H \\ A & B \end{bmatrix}$ 便得到在图 15 中第二次迭代后的图形；再把分别相应于 $H\ H\ A\ B$ 箭头右方的 4 小块放进 $\begin{bmatrix} H & H \\ A & B \end{bmatrix}$ 中便得到在图 15 中第三次迭代后的图形；以此类推。

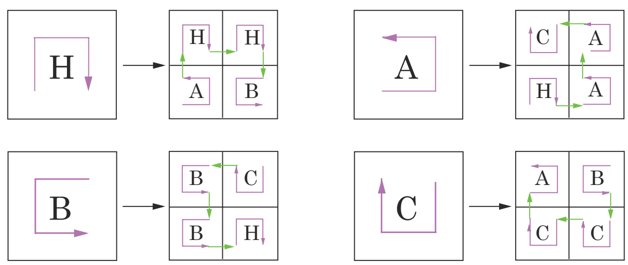


图 16 用 L- 系统法则生成希尔伯特曲线

图 17 中 T 恤上染印的是迭代五次以后所获得的希尔伯特曲线图形，而迭代六次以后获得的希尔伯特曲线图形如图 18 所示。

图 17 T 恤上印有迭代 5 次后获得的希尔伯特曲线图

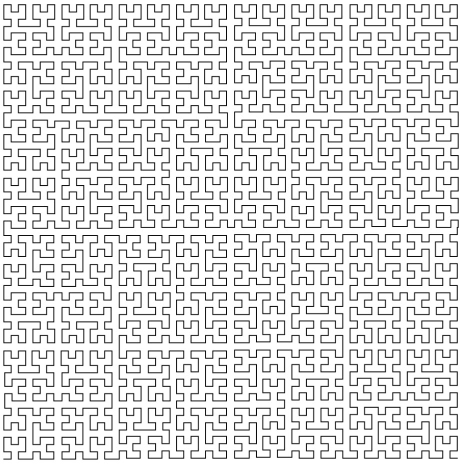


图 18 迭代 6 次以后获得的希尔伯特曲线图形

三维的希尔伯特曲线如图19所示，也称为空间填充曲线。

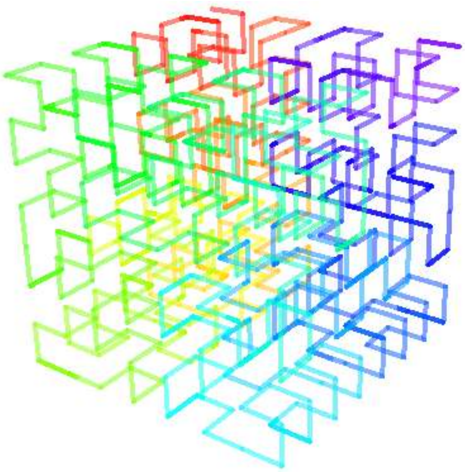


图 19 三维希尔伯特曲线图

结束语

应该说，分形几何在自然界、物理学和工程技术中的应用还只是初见端倪。

除了大家都已经很熟识的植物枝干叶子构成的分形、陆地迂回曲折的海岸线形成的分形之外，在人体内血管的分布和大脑的皱褶等地方（图 20），你都能够看到各种分形或者类似分形的几何特征。

在显微镜下观察落入溶液中的一颗花粉，你会发现它不间断的无规则运动（布朗运动）的轨迹是由不同尺度的连续折线相接而成的。这条曲线的分形维数是 2 而不是 1，因而和希尔伯特曲线一样，理论上可以逐渐遍历整个游走过的平面区域。

图 21 是 2005 年美国宇航局从国际空间站拍摄到的埃及境内纳塞尔湖的照片，上面呈现出来纳塞尔湖的水流分支就有很明显的分形结构。另一幅对我国黄土高原中部山西省岢岚县所拍摄到的照片（图 22）也有明显的分形结构。

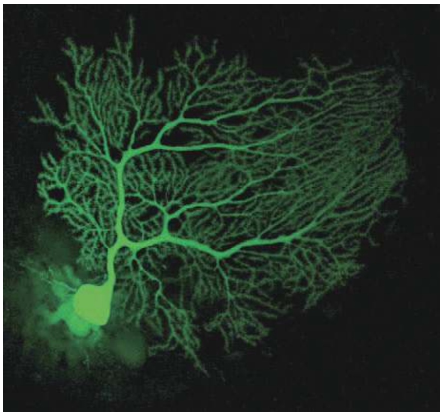


图 20 Purkinje 神经细胞

图 21 埃及纳塞尔湖的航拍照片

图 22 中国黄土高原中部山西省岢岚县的航拍照片

在物理化学领域中，在某些电化学反应过程里电极附近沉积的一些固态物质是以不规则的树枝形状向外增长的。在化学震荡反应、流体力学不稳定性、光学双稳器件动力学实验和分析中，都可以通过实际测量得到各种分形几何结构或者通过大型计算得到数据序列的分形维数。在工程技术领域里，已经出现了图像分析用的分形滤波器（fractal filter），使用分形编码（fractal coding）的图形分形压缩技术（fractal image compression），等等。

分形在工程技术中的众多应用反过来向数学提出了诸多新的问题和挑战。以上面谈及的分形电容器为例，在大学普通物理中介绍过如何来计算简单平板电容器的电容量：如图 23 所示，假设两个相距为 d（单位：米）的同质电极的面积均为 A（单位：平方米）。在电压差ΔU（单位：伏特）的作用下产生电场 $E=\Delta U/d$（单位：伏特 / 米）。这时，电

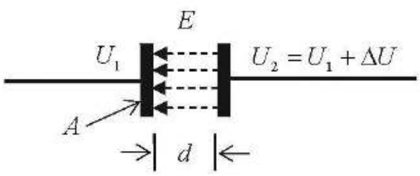


图 23 基本平板电容器

容器的电容量 C（单位：法拉）及其存储的电能量 J（单位：度）由下面两式给出：

$$C=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d},\quad J=\frac{1}{2}C(\Delta U)^2$$

其中 $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$（单位：法拉 / 米）是一个基本常数，$\varepsilon_r$ 是两块平板电极之间媒质的介电常数（例如，真空为 1，水为 81）。

现在，一个显然是十分有用但还没有答案的数学问题是：对于上面描述的各种有限分形电容器，如何分别推导出由该分形几何参数决定的、计算其总电容量的解析表达式？工程技术人员在等待着数学家们的回答。

如上所述，从数学的角度来看，严格地说前面提到的所有例子都只是利用了有限分形（伪分形）。容易想象，真正的分形几何学还有很大的潜力等待开发和挖掘。希望在不久的将来，随着科学技术的进一步发展和突破，我们能够看到分形几何获得越来越多、也越来越成功的各种实际应用。

致谢

作者感谢 Maciej Ogorzalek 教授提供了一些相关资料。文中没有标明出处的图片均从互联网上的无版权网页下载。

参考文献

1. http://en.wikipedia.org/wiki/File:God_the_Geometer.jpg
2. http://www.fractenna.com/whats/110915.html
3. H. Samavati, A. Hajimiri, A. R. Shahani,G. N. Nasserbakht, and T. H. Lee, “Fractal capacitors,” IEEE J. of Solid-State Circuits, 33(12): 2035-2041, 1998
4. R. Aparicio and A. Hajimiri, “Capacity limits and matching properties of integrated capacitors,” IEEE J. of Solid-State Circuits, 37(3): 384-393, 2002
5. A. M. Elshurafa, A. G. Radwan, A. Emira, and K. N. Salama, “RF MEMS fractal capacitors with high self-resonant frequencies,” J. of Microelectromechanical Systems, 21(1): 10-12, 2012
6. http://ecl.web.psi.ch/supercap/index.html#power
7. F. Gassmann, R. Kötz and A. Wokaun, “Supercapacitors boost the fuel cell car,” Europhysics News, 34: 176-180, 2003

作者简介：陈关荣，香港城市大学电子工程系讲座教授，IEEE Fellow。

毛泽东为《中国数学杂志》题写刊名

保继光　魏炜　郑亚利

毛泽东（1893-1976）历来重视报刊工作，把它当成团结人民、教育群众的有力武器，当作交流信息、指导工作的有效途径。他亲自主编过《湘江评论》、《新时代》和《政治周刊》三份期刊的创刊号，为《共产党人》、《人民画报》、《红旗》等政治性期刊题写过刊名。

非常难得和有幸地是，毛泽东 1951 年曾为一本纯数学的学术刊物《中国数学杂志》题写刊名。这得从毛泽东的一位同乡、同学汤璪真说起。汤璪真是中国数学会首届评议委员、北京师范大学数学系首届毕业生、北京师范大学前校长、我国最早的现代数学家之一、九三学社的早期社员之一。

汤璪真（1898-1951）

汤璪真，字孟林，1898 年 2 月 3 日诞生于湖南省湘潭县杨林乡云源村。在湘乡县立东山学校（也是大将谭政、诗人萧三的母校），他天资聪颖，两度跳级，成为毛泽东的同班同学。毛泽东很喜爱这位勤思好学的小同学，汤璪真亦很倚重情同兄长的润之（毛泽东的字），两人成为终生契友。1919 年汤璪真从北京高等师范学校数理部（北京师范大学数学科学学院的前身）毕业后，依次在北京女子高等师范学校、北京大学、柏林大学、哥廷根大学、武昌大学、上海劳动大学、暨南大学、上海交通大学、武汉大学、中山大学、广西大学、安徽大学等校任教。1948 年 9 月，他应北平师范学院（北京师范大学的前身）袁敦礼院长和数学系傅种孙

傅种孙（1898-1962）

主任的邀请，返回母校任教授兼教务长。汤璪真在北平解放前任北平师范大学代理校长，解放后任校务委员会主席（相当于校长）。1949 年 6 月 17 日下午 3 点，毛泽东曾亲自到和平门顺城街 48 号“尚志学会”北平师范大学宿舍看望汤璪真夫妇等同仁，并点菜设宴，共进晚餐。

汤璪真因患急性胰脏炎医治无效，于 1951 年 10 月 9 日清晨逝世，终年 54 岁。毛泽东派秘书田家英到北京师范大学转达他对汤璪真英年早逝的悲痛，称其为“我们国家科学界的一大损失”。1951 年 10 月 21 日，北京师范大学教务长、数学系主任、《中国数学杂志》总编辑傅种孙（另一位总编辑是华罗庚）给毛泽东写信报告治丧情况。北京师范大学、九三学社和中国数学会将共同发起追悼会，由北京师范大学校长林砺儒、九三学社主席许德珩、北京市分社主任理事薛愚、中国数学会理事长华罗庚主祭，“欲请主席赐一挽联或其他吊悼笔墨”。 鉴于中国数学会 1951 年 8 月在北京刚刚召开了第一次全国代表大会，数学杂志也将复刊，傅种孙又谈第二件事：“又，《中国数学杂志》创刊号出版在即，中国数学会同人欲请主席亲笔题此六字，以光篇幅。事关人民学术，想亦人民领袖所乐为也，敢以为请”（图 1）。毛泽东收

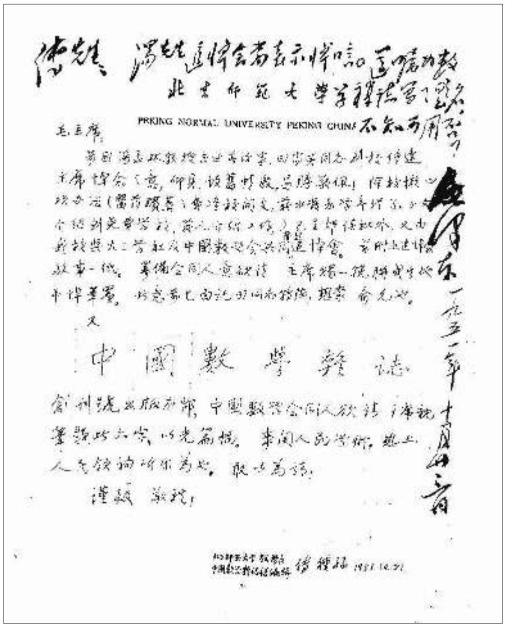


图 1

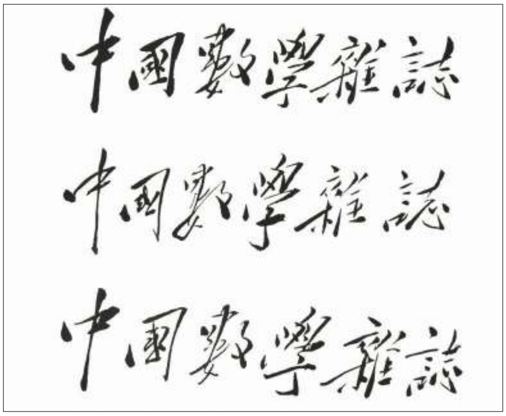


图 2

到此信后的第三天亲笔在傅种孙信上批示："傅先生：汤先生追悼会当表示悼唁。遵嘱为数学杂志写了题名，不知可用否？毛泽东，一九五一年十月廿三日"[1]。信中还寄来了毛泽东写在一张宣纸上的题名，分三行写了三遍"中国数学杂志"（图 2），并在第一行和第三行的行末右上角各画了一个小圈表示中意。编辑部选取了第三行的六个字做为《中国数学杂志》的刊名[2]。

可惜《中国数学杂志》这个珍贵的刊名只用了五期。由于中国科协领导的物理、化学、生物刊物都叫通报，为一致起见，《中国数学杂志》从 1953 年起改名为《数学通报》（图 3 和图 4），请郭沫若（曾任政务院副总理、中国科学院院长）题写了刊名。1966 年 8 月因"文化大革命"停刊，1979 年

从左至右：图 3，图 4，图 5

7 月复刊至今。目前，《数学通报》是由中国数学会和北京师范大学合办的，以中等学校数学教师为主要服务对象的数学教育刊物。《数学通报》初创时的刊名叫《数学杂志》（图 5），主编是顾澄（1882- 约 1947，中国数学会创始人之一，曾任国立北平师范大学数学系教授、伪教育部长），1936 年 8 月 1 日在上海创刊，中国数学会出版发行，上海和各地商务印书馆代售。它是我国第一份全国性的数学普及刊物，也是我国创办时间最长、影响最大的数学期刊[3]。

作者是北师大数学院教师，其中保继光是数学院院长。

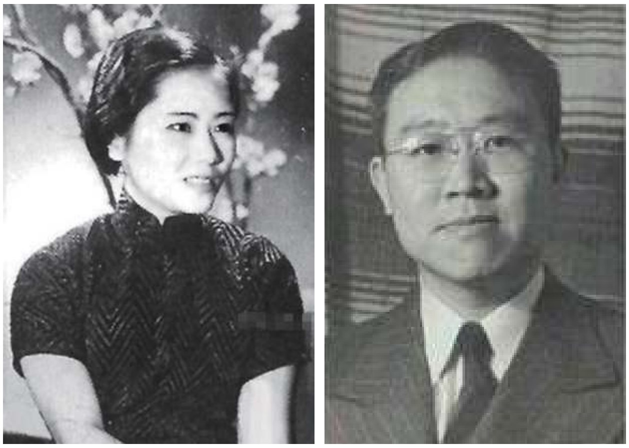
参考文献

1. 中央文献教研室，建国以来毛泽东文稿（第二册），中央文献出版社，1988 年 11 月。
2. 傅章秀，毛泽东同志为《中国数学杂志》题名 40 周年，数学通报，1992 年第 1 期。
3. 任南衡、张友余，中国数学会史料，江苏教育出版社，1995 年 5 月。

物理世界的华人翘楚

——袁家骝吴健雄夫妇百年纪念

丁 玖



年轻时的吴健雄、袁家骝

70年代末80年代初在南京大学读书的莘莘学子们，许多同学对两个名人最为欣赏。

一位是南京大学的匡亚明（1906-1996）校长。他是中国老一辈革命家中的一位名副其实的教育家。他求贤若渴、教授挂帅的治校故事举不胜举。可以说，他是高级共产党员大学校长中的蔡元培（1868-1940）或蒋梦麟（1886-1964）。

另一位却从来没有在南京大学正式教过书或当过官，但原是南京大学的前身国立中央大学30年代的物理系毕业生。那些年中，每当她和她的丈夫出现在南大校园，整个大学就沸腾起来，就像现在的当红歌星出现在北京首都体育场献唱或天才作家出现在大学礼堂传授作文秘诀一样的热气腾腾。

她的名字叫吴健雄，对她孤陋寡闻者或许以为这是一位须眉的大名。是的，她的名声在全世界可以用响彻云霄来比喻。她被誉为“中国居里夫人”、“世界物理女王”。她虽然没有拿到过诺贝尔物理奖（其实，许多物理学家认为她应得此奖），但却是另一殊荣——沃尔夫物理奖的首届（1978）获奖者。她是普林斯顿大学百年历史上第一位女性荣誉博士和美国物理学会的第一任女会长。她比李政道、杨振宁更早成为美国科学院的院士，是第一个华人院士。此外她比杨振宁早11年被美国总统授予国家科学奖。她和他们两人还有一个不一样的是，她的配偶袁家骝也是一位杰出的物理学家。

她年轻的时候，美丽；她中年的时候，典雅；她老年的时候，慈祥。当我第一次在美国执教大学物理天文系的会议室墙上见到她在哥伦比亚大学普平实验室的照片时，由衷地赞叹她那特有的女性科学家的气质。后来，我在家乡书店买到一本复旦大学出版社出版的《吴健雄——物理科学的第一夫人》。这是辅仁大学数学系毕业的台湾记者江才健所写的第一本华人科学家传记，也是他写得最好的一本。我当时就被纸张质量也是一等的该书迷住了，包括锦上添花的若干迷人照片，尤其是那张身材娇小的东方美女吴健雄小姐与加州大学伯克利校区物理系高大英俊的美国同学手拉手的合照，颇为生动。作者对吴健雄的事业成就与情感生活都写得鲜活传神，难怪杨振宁对此书也赞不绝口。

今年4月5日是袁家骝诞辰100周年的日子，而5月31日则是吴健雄的百岁生日。这个月也是她的母校南京大学建校110周年。作为一直对他们夫妇的人格力量和献身精神十分敬仰的一名后学，作为有幸能和吴健雄同为南大校友的当年77级学生，我想通过本文表达对这两位已故世纪老人的深切纪念。

少年时代

吴健雄是典型的江南女子。她生于辛亥革命后的翌年晚春。革命的成功，共和的建立，父辈的进步，让她这个家中独女从一出生就沐浴在民主、自由、平等的反封建家庭气氛中，这对她的成长极为重要。她的出身地是江苏省太仓县的浏河镇，距上海仅有65公里。她的父亲吴仲裔(1888-1959)坚信男女平等，不仅给女儿起了一个响亮的男性化名字，而

胡适（1891-1962）

且让她和男孩子们接受一视同仁的教育。吴健雄哥哥的名字吴健英和两个弟弟的名字吴健豪、吴健杰，加上她自己的，其最后一字按顺序是“英雄豪杰”。这可以想象他们的父亲气派有多大，期待有多大！可惜最小的吴健杰不寿而早夭。

反对重男轻女的吴仲裔 1913 年在家乡创办了明德女子职业补习学校。这在 100 年前缠足、纳妾还在盛行的中国是多么了不起的壮举。父亲自然地让她和儿子一样进学堂。11 岁时，在父亲所办小学一毕业，吴健雄就只身一人去了苏州女子师范学校学习。在近万名的考生中，她以名列第九的入学会考成绩成为那年进校的两百个新生中的一员。她后来说过，这所女子师范学校之所以著名，并不仅仅因为有较高的学术水准，还因为其先进的教学方法：经常请有知识的学者和名流来做讲座。的确，校长杨诲玉居然能把美国实用主义哲学大师和教育改革家杜威（John Dewey, 1859-1952）以及著名弟子请来给女中学生们做演讲，并观摩她们的家政课、品尝她们的烹饪手艺，这让小小年纪的她们早早接受了世界潮流新思维的启蒙和熏陶，为日后的改造世界建立根基。请来的另一位演讲者就是新文化运动的先驱之一，大名鼎鼎并且风度翩翩的胡适（1891-1962）博士。胡博士就是杜威教授的中国产品，这位原产安徽绩溪的才子从美国的导师处搬回了西方的自由和民主并身体力行地参与改造中国的语言和文化。如果问吴健雄一生中最欣赏谁，可以引用她的话：一生中影响她最大的两个人，一个是她父亲，另一个则是胡适先生。当时她根本想不到，

吴健雄与父亲

几十年后她会在杜威传道授业几十年的哥伦比亚大学授业传道也是几十年。

胡适并非仅在那时对她深有影响，历史给了他更多机会影响她。苏州女子师范学校毕业后，吴健雄因成绩好被保送进入南京的国立中央大学。入学前，她先去了上海的中国公学继续求学。中国公学 1906 年由一批集体退学的爱国留日学生创办，早年的胡适曾就学于此，并参与过后来与该校合并的中国新公学的创立。还在北京大学当教授的胡适此时每周南下一次在那里教书，并且担任这个中国第一所私立大学的校长。就是在这个学校里，吴健雄的多方面才智，包括融会贯通的人文知识和“笔大如椽”的作文能力，甚至“挺秀劲拔”的一手好字，赢得了长她 20 岁的胡适的高度赞赏，并建立了终生的友谊。

江才健 1989 年采访吴健雄时，记录了她对中国公学的美好回忆并写进自己的书中：吴健雄修了胡适每周一次两小时的大课“有清三百年思想史”。一次考试，她坐在教室中间最前排，面对胡适。三个小时的卷子，她两个小时就头一个交卷。改好卷子后，胡适对教历史的杨鸿烈（1903-1977）和教社会学的马君武（1881-1940）两位老师说，他从没有看到一个学生，对清朝三百年思想史懂得那么的透彻，我给了她一百分。杨鸿烈和马君武也告诉他，班上有一个女生总是考一百分。于是三人各自把这个学生的名字写下来，结果拿出来一对，写的都是吴健雄。

胡适对吴健雄不光赞誉有加，而且期许也高。在她赴美读书后，他逛书店时看到一本 20 世纪最伟大的实验物理学家、1908 年诺贝尔化学奖获得者卢瑟福（1871-1934）的书信集，


袁世凯（1859-1916）

就买下直接寄给了远在伯克利的她。吴健雄 1990 年对江才健说，“这才是师生关系啊！”

如果说吴健雄的父亲只是一个顺应时代潮流的进步知识分子，袁家骝的祖父却是影响了中国近代史的一位叱咤风云的人物。天下华人很少没听说过袁世凯（1859-1916）这个大名的，许多人还忘记不了民国初年时期银元上的“袁大头”像。正因为他逆历史潮流而动的“洪宪皇帝”之举，不光政治上身败名裂，更以 57 岁之年忧郁而死。这一年，袁家骝才 4 岁。他的父亲袁克文(1889-1931)是袁世凯的次子。与政治上野心勃勃的长兄袁克定（1878-1958）不一样的是，袁克文一生对政治冷淡，曾写下“绝怜高处多风雨，莫到琼楼最上层”的诗句影射洪宪帝制，从此被他的父亲冷淡。他长于诗文，工于书法，演唱昆曲，爱好藏书，玩赏古物，和章诒和畅销书《往事并不如烟》一书中回忆的张伯驹（1898-1982）同属一类人物。事实上,他们都被称为“民国四公子”，另两位公子则为张学良（1901-2001）和溥侗人。幸而有了这样一位远离是非之地、躲开政治漩涡而寓居上海且最后贫病交加死于天津的父亲，袁家骝从小就养成了自强不息自力更生的好习惯，而不是一个可以叫嚣“我爸是李刚”的纨绔子弟。

袁家骝出生于河南省项城市王明口镇袁寨行政村，是袁克文的第三子。由于父亲失宠于祖父，他很小就和母亲居住乡间老家，呆到爷爷去世离开袁寨。他虽生于官宦之家，从小却没能像生于乡贤之家的吴健雄那样得到家庭厚爱。13 岁时，他随同母亲和妹妹一起迁到天津居住，并进入天津南开中学读书,可算是周恩来的后学校友。但他读了一个月余，就转到英国伦敦传教士办的教会学校——新学书院。三年后他考进了工商大学就读工程学。这是一所不太起眼的学校，但促进了他两项终生爱好：从事应用研究和喜欢动手做事。

中央燕京

1930 年袁家骝转学到美国基督教长老会传教士、教育家司徒雷登（John Leighton Stuart，1876-1962）当校长的燕京大学，改读物理。有工程背景的他最大的业余爱好之一是刚刚兴起不久的无线电通讯，这一爱好让他和具有同一爱好的校长建立了友谊。另一大爱好则是拉京胡。在学问上，他的业师是谢玉铭（1893-1986）教授。复旦大学的学生如果对这个名字生疏的话，可以查查已故复旦前校长、女物理学家谢希德（1921-2000）的家谱。不知这个家谱是否起始于东晋谢安、谢玄叔侄。唐朝才子诗人王勃的《滕王阁序》中有一自谦之句“非谢家之宝树，接孟氏之芳邻”。谢玉铭谢希德父女可以说是现代中国的谢家之宝树。谢玉铭为芝加哥大学诺贝尔物理奖获得者迈克尔逊（Albert Abrahan Michelson，1852-1931）的学生，1926 年获得博士学位。他 1932 年应邀去了加州理工学院担任客座教授，与同事休斯顿（William Vermillion Houston, 1900-1968）发现并发表了一个实验与理论不符的惊人结果，这就是十多年后兰姆（Willis Eugene Lamb, 1913-2008）发现并获诺贝尔奖的“兰姆位移”。杨振宁认为如果当时的理论物理学家面对同时存在的真假难辨的试验结果深入思考一番，中国人获诺奖的时间或许能提前二十年。

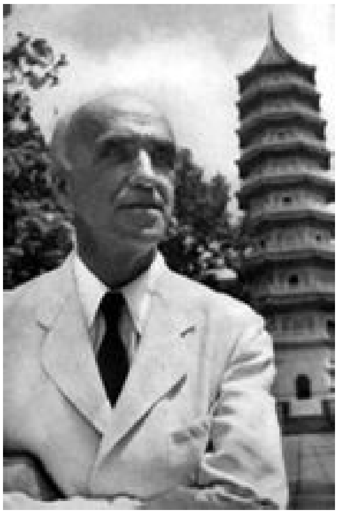
谢玉铭燕京大学后来成名的学生中除了袁家骝外，有 1931 年本科毕业、两年后取得硕士学位、1938 年在英国剑桥大学卢瑟福门下拿到博士学位的张文裕（1910-1992）以及他未来的太太王承书（1912-1994），她 1934 年和 1936 年分别获得学士、硕士学位，1944 年于密西根大学在发现电子自旋的著名物理学家乌伦贝克（George Eugene Uhlenbeck, 1900-1988）的指导下拿到博士文凭。这也是一对中华物理双星，分治实验和理论，丈夫是中国宇宙线研究和高能实验物理的开创人之一，妻子则是气体动力学和铀同位素分离的一位先驱。稍迟入学的另一个学生卢鹤绂（1914-1997），本科毕业就去了美国留学，27 岁取得明尼苏达大学的博士学位，后来成为中国的核能之父。看来燕京大学这所当时校园

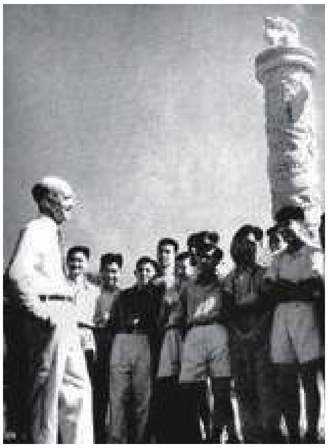
谢玉铭（1893-1986）

最美的教会大学，对中国的人才培养功不可没。就像“尊师爱生”的匡亚明校长一直被南大学子永志不忘一样，提倡“学术自由”的司徒雷登校长也被燕大的校友们铭记在心。2008 年，在美国去世 46 年后的司徒雷登的骨灰终于在其中国出生地杭州安葬，部分地完成了他生前的遗愿。于是乎，“别了，司徒雷登”又回到了中国。

北方的袁家骝插入燕京大学的同年，南方的吴健雄也跨进了中央大学的大门。她开始念的是数学系，一年后转入物理系，和袁家骝是殊途同归，可惜当时两人并不相识。一个人从事其最喜爱的工作时，成功的几率最大，因为他（她）会像堕入情网的人一样全神贯注、全力以赴。通常所说的勉励之语“失败是成功之母”可以改成“爱好是成功之母”。

1932 年，袁家骝大学毕业后留在本校的研究生院继续读书，两年后获得硕士学位。他不光学习好，为人也好，深受美国校长的青睐。是司徒雷登帮助他顺利获得国际奖学金，而于 1936 年考入美国加州大学伯克利校区深造。几年后，当他和吴健雄结为连理时，另一个作为加州理工学院校长的美国人——诺贝尔物理奖获得者密立根（Robert Andrews Millikan, 1868-1953），




1	2	3
4	5	

1. 司徒雷登
2. 司徒雷登在燕园
3. 司徒雷登与周恩来
4. 司徒雷登与燕大学生
5. 燕京大学老校友向司徒雷登校长墓地鲜花

密立根（1868-1953）

施士元（1908-2007）

充当了新娘新郎的证婚人。能让两个大学校长都亲自出面的青年学生，应该是“德智体全面发展”的佼佼者。

中央大学时代的吴健雄，依然是一个人见人爱的好学生。她后来的卓越成就常让人将她和居里夫人（Maria Sklodowska-Curie, 1867-1934）相比。她的老师即费米（Enrica Fermi, 1901-1954）的学生、诺奖获得者塞格瑞（Emilio Segre, 1905-1989）早年与居里夫人有所交往。他在评论吴健雄时写道：“她的意志力和对工作的投身，使人联想到居里夫人，但她更加入世、优雅和智慧。”其实，早在本科生时代，就有人于无形之中将她与居里夫人相连了。这个人就是 25 岁就成了中央大学物理系教授兼系主任的施士元(1908-2007)。1933 年，施士元在居里夫人的门下拿到博士学位后当即回国效力。很快他就成了吴健雄毕业论文的指导教师。虽然回国的施士元由于科研氛围的限制，未能像自己的老师和学生那样成为世人景仰的大物理学家，但他作为伟大的物理教育家打下了吴健雄从事物理研究的第一桩，就像杨振宁的硕士研究生导师王竹溪（1911-1983）那样。多年后，尊师的吴健雄每次回国都要探望老师，而比吴健雄只大 4 岁的施士元一生淡泊明志，教书育人，并活到百岁，弟子中有一打成为院士。

吴健雄不光书念得好，待人接物也是有口皆碑。她当时的最好朋友之一是酷爱丹青的孙多慈（1913-1975），比她小一岁并晚一年进中央大学。艺术细胞超群的她是深受美术系主任徐悲鸿（1895-1953）器重的好学生，后来还与老师擦出令人感叹万千的“慈悲之恋”。孙多慈最终去了台湾，1975 年因病赴美就医，同年在她一生知己吴健雄的家里与世长辞。吴健雄的另一位好朋友曹诚英（1902-1973）因比她大 10 岁，已留校在农学院当助教，对她也特别体贴。曹诚英是胡适二嫂的半个妹妹，之前曾和长她 10 岁的胡适发展出未有结果的“诚适之恋”，未有结果的原因就是胡适母亲送给宝贝儿子的大礼物——三寸金莲、目不识丁、治夫有方的太太江冬秀（1890-1975）。以白话诗运动来推动中国新文化的胡适大概曾为所爱之女写下了《有感》一诗：“咬不开，捶不碎的核儿，关不住核儿里的一点生意；百尺的宫墙，千年的礼教，锁不住一个少年的心！”

1934 年，吴健雄以一篇题为《证明布喇格定律》的优秀毕业论文获得学士学位。之后她受聘到被李约瑟（Joseph Terence Montgomery Needham, 1900-1995）称为“东方剑桥”的浙江大学物理系当助教，不久就进入中央研究院物理所，跟随一名从美国密西根大学获得博士留学归来的女物理学家顾静薇从事研究工作。顾教授不知听谁提过吴健雄，一次碰见在化学所做研究的中央大学化学系毕业生程崇道，问她认不认识吴健雄。对方回答：“是的，我认识她，她是我们同学中的健者，智慧高，能力强，做事认真，性情和善。”这就是为何吴健雄被顾教授招进物理所。

但是，吴健雄胸有大志，她想步顾静薇的后尘，横渡太平洋去密西根大学深造。顾教授也热情鼓励她，加上她自己办公司的叔叔吴琢之也愿意解囊相助，资助她的学费生活费。这样 1936 年的夏天，她去了美国。但是，谁也没有想到，与父母在上海黄浦江边的告别，本以为只是几年的短暂分离，却是实际上的永别。

大学毕业的吴健雄学位照

挂在南密西西比大学物理天文系会议室的吴健雄工作照

加州邂逅

与当今中国阔佬的子弟腰缠万贯出国留学的经济实力完全不可同日而语的是，当袁世凯的孙子袁家骝1936年的7月踏上了赴美的旅程时，他身上仅有40美元，坐的是三等舱，在两周多的大海航程中，只靠充满腥臭味的咸鱼果腹，连稍贵一点的稀饭也舍不得吃。到达旧金山时，他的体重下降了十几斤，口袋里也只剩下25美元。此时，他那“才华横溢君薄命，一世英明是鬼雄”的父亲已经撒手人寰五年。

袁家骝到达加州大学伯克利校区物理系报到后，过了两三周，吴健雄与同行的董若芬抵达旧金山，住在一个老同学家里（其丈夫在伯克利教书），准备停留一周继续东行前往密西根州的美国大学之母密西根大学，一个读物理、一个读化学。然而，这时候，历史开始改写。自然，在旧金山海湾地区盘桓几日休整一下的吴健雄想看看伯克利的物理系，于是热心的伯克利中国学生会会长、在美国土生土长的华人Victor杨让最合适人选的物理系研究生新人袁家骝全程陪同参观。杨君的历史功绩是他客观上成了吴健雄与袁家骝的红娘。

比密西根大学年轻得多的伯克利物理系，此时正如早晨的太阳一样地蒸蒸日上、气象万千。回旋加速器之父劳伦斯（Ernest Orlando Lawrence, 1901-1958）和未来的原子弹之父奥本海默（J. Robert Oppenheimer, 1904-1967）正在那里朝气蓬勃地干着，而塞格瑞两年后也去了那里。一个个物理实验室，尤其是劳伦斯的放射性实验室，让做过X光晶体绕射光谱实验的吴健雄看得流连忘返，马上就动了留在这里读书的念头。

但是真正让吴健雄下决心留在伯克利的倒是她那周听到的一件传闻。据说密西根大学的一个学生俱乐部不让女生从正门入内，尽管女生和男生一样为建它出过力、捐过款。这让生于中国男女平等之家的吴健雄大吃一惊。这种歧视甚至在中央大学她都没有经历过。尽管有六百名中国学生正在密西根大学读书，她怎么能去那里当性别上的二等公民呢？其实，吴健雄在她后来的美国高校职业生涯的初始阶段依然未逃脱民主国家“男尊女卑”的影响。

决心已下，驷马难追。即便得罪了本应一起东行的同乡女伴董若芬并被其耿耿于怀到终生冷遇，吴健雄仍然由袁家骝陪同去见了物理系的主任柏基（Raymond Thayer Birge, 1887-1980）申请入学。对带外国腔尤其是中国腔或女性的学生也有点歧视的他却破例录取了她，尽管学校已经开了学。这大概归功于吴健雄身上迸发出的物理天分和优雅气质。一滴水反映太阳，具有魄力的柏基领导物理系一直到1955年为止，把伯克利打造成了世界一流的研究基地和人才中心。

就这样，历史的机遇，使两位优秀的华夏儿女相识于万里之遥的异国他乡，邂逅于负笈海外的加大校园。诚然，这离爱情远得很呢，尽管袁家骝给吴健雄肯定留下了热心、厚道、助人为乐的好印象，而袁家骝肯定也被吴健雄的美丽和才华迷住了。他们的互相吸引和爱的旋律还要先受时间和空间的双重考验。

吴健雄由于家境较好，加上对她疼爱有加的亲叔叔的

资助，留学生活的经济状况远比袁家骝要好。后者靠的是校方免学费、可住国际学生宿舍的奖学金，十分拮据。一年后，两人书都念得很好。这时吴健雄希望得到学校的奖学金，以便减少叔叔的负担。但是，在整个国家对东方人歧视的大环境下，柏基不敢给他们全额奖学金的资助，只给了数额较少的助读金（Readership）。吴健雄尚可接受，但袁家骝则难以生存了。这种杯水车薪式的奖励实际上人为地将他们隔开了。

于是，袁家骝向位于洛杉矶的另一所蒸蒸日上的学校加州理工学院申请转学。几年前他曾经转学到燕京大学，并为校长司徒雷登所器重并推荐给伯克利。没想到，这一次申请学校的校长密立根亲自拍来电报给他奖学金，并要他立即回复。袁家骝马上接受了这雪中送炭的资助，虽然对爱惜青年人才的柏基是个不小的打击。

但是，卢沟桥事变烧起的中国抗战烈火炙烤着袁家骝七尺男儿的爱国之心。他和好几个中国学生商议，打算回国效力。恰巧胡适来到洛杉矶，听说他们有此想法，眼光深远的他把他们叫去相劝：中国必将胜利，战后国家建设需要许多人才，你们应当好好读书，以便战后建设新中国。这和1814年敌军兵临城下时法国的拿破仑（Napoleon Bonaparte, 1769-1821) 不让巴黎高工的学生上前线的名言“我不愿为取金蛋杀掉我的老母鸡！”一个道理。于是，袁家骝安心读书，与吴健雄同年获得博士学位，并留在加州理工做了两年博士后。

健雄起飞

1937年袁家骝转学后，吴健雄继续留在伯克利，开始了她第二年的博士课程学习。她的老师都是才华横溢的物理奇才，如曾在量子力学的发源地和波恩（Max Born, 1882-1970）等先驱者互动频繁的美国理论物理学家奥本海默。她的一帮同学中不少人后来成了北美物理学界的顶级人物，如费米实验室主任、1973年的美国国家科学奖获得者威尔逊（Robert R. Wilson, 1914-2000）、加拿大物理学会会长渥科夫（George Michael Volkoff, 1914-2000）和兰姆。第一年刚开始时她和袁家骝的英文听力都不太灵光，有时要抄后来自谦自己“不是一个好的物理学家，但却是一个很好的学生”的渥科夫的笔记。

读了两年的博士课程后，吴健雄真正的研究生涯1938年开始起航。两年后完成的博士论文实际上由两个重要实验的结果组成。她的博士导师名义上是劳伦斯，他不光是大牌教授，在她毕业的前一年甚至荣获诺贝尔奖。但忙碌不堪的劳伦斯无暇顾及全部，导致吴健雄实际上的导师为一开始还不是教授的意大利人塞格瑞。

吴健雄后来以“β-衰变”的世界权威著称。其实她的第一个实验工作就是1938年由劳伦斯指导的关于放射性铅因产生β-衰变放出电子而激发产生出两类X光的现象。第二年她就跟随塞格瑞研究铀原子核分裂的产物。这直接与前一年年底德国人的实验结果有关。王淦昌（1907-1998）1933年博士论文的导师、被爱因斯坦认为“天赋高于居里夫人”的麦特勒（Lise Meitner, 1878-1968）和其同为物理学家的侄子费许（Otto Frisch, 1904-1979）断定此结果为铀原子核分裂而于1939年1月19日发表在《自然》杂志上，导致全世界的原子核物理学家们都迫不及待地开展类似的实验研究。在这两年的探索中，虽然有导师的指导和他的许多初始想法，但吴健雄的实验大部分是自己独立做出来的。其中的一项成果，居然为后来的原子弹研制做出了大贡献。麦特勒和吴健雄除了都是女性外，还有相同的一点是两人都令人遗憾地被诺贝尔奖委员会忽视了。常常有人拿她们与曾为居里（Pierre Curie, 1859-1906) 学生并在早期事业上得到夫君极大提携的居里夫人比。这三位女性在不同科学家的眼里有着不同的排列。当然居里夫人名气最大，因为她两次获得诺贝尔奖。或许，也可以把吴健雄称为中国的麦特勒，因为她对麦特勒比对居里夫人更加佩服。

吴健雄的实验工作深受他的两位导师的赞赏，因为它们一直是精确而细致的，这是她一贯的风格。笔者买过一本塞格瑞1993年自传的中文翻译，看到他对其第一个学生的高度评价：对工作狂热、对物理着迷，极有天分、十分聪敏、才气横溢。比吴健雄早三年在伯克利拿到博士学位的1951年诺贝尔化学奖获得者、核化学家西博格（Glean Seaborg, 1912-1999）1990年这样描绘他对她的看法：在伯克利一大群聪明的人中，作为非常聪明的少数几个女性之一，吴健雄最令他印象深刻的，还是她的坚持和决心。西博格记得吴健雄在用劳伦斯的回旋加速器做实验时是那样的顽强、那样的执着，使人很难跟她竞争。这种寸土不让的毅力后来在她一生最伟大的工作中充分展现。

塞格瑞作为导师也常有高尚道德的闪光，让吴健雄感动。有一次他去见自己的老导师费米“获取灵感”，吴健雄在此期间独立得出两种放射性态钝性气体的半衰期和其他数据，这让从东海岸回来的塞格瑞大为激赏。基于这些实验结果，有中国传统的吴健雄写了个报告，把导师名字自然地放在上面。塞格瑞看了报告后，划去了自己的作者名。1940年这篇只有吴健雄一位作者的响当当论文发表在美国地位

崇高的《物理评论》上。在当今论文数量挂帅的中国，不知有多少比例的教授愿意删去自己没有实质性贡献的学生论文上的本人名字。

吴健雄刊登在《物理评论》的工作，有些二战时敏感的数据并未发表。当美国介入太平洋战争后启动原子弹研制时，一个关于原子反应堆的停滞问题由于是钝性气体在作祟而让塞格瑞一挥手“应该去问吴健雄！”于是，吴健雄那些本想推迟到战后发表的绝密数据在关键的时刻派上了大用场。吴健雄，一个中国人，一个女实验物理学家，成了世界上第一颗原子弹研制成功的一位奉献者。

珠联璧合

从中国大学本科生到美国大学博士生前期，尽管其江南女子的美貌和读书种子的内涵赢得许多也包括同性的仰慕者，吴健雄从未让自己的先天条件放纵自己，也没有在狭义的意义上与人相爱过。大概在中国公学“恰同学少年，风华正茂”豆蔻年华的青春岁月里，“指点江山，激扬文字”的胡适博士是她十分崇拜的对象，或者已升华成朦胧的爱慕之情。歌德（Johann Wolfgang von Goethe, 1749-1832）在郭沫若（1892-1978）所译的《少年维特之烦恼》中感叹万分：哪有少男不钟情，哪有少女不怀春？和自己的太太没有多少精神交流而和别人的爱情又被扼杀在摇篮之中的胡适，对早年吴健雄的提携之恩和忘年之交或许带有柏拉图式的精神恋爱之成分。但这种老师对学生的挚爱已经上升到对其满怀期许的更高境界。请读一封他 1936 年在海外与她第一次见面后第二天等船回国时写给她的信（摘自江才健的书）：

健雄女士：

昨晚在马宅相见，颇出意外，使我十分高兴。

此次在海外见著你，知道你抱著很大的求学决心，我很高兴。昨夜我们乱谈的话，其中实有经验之谈，值得留意。凡治学问，功力之外，还需要天才。龟兔之喻，是勉励中人以下之语，也是警惕天才之语，有兔子的天才，加上乌龟的功力，定可无敌于一世，仅有功力，可无大过，而未必有大成功。

你是很聪明的人，千万珍重自爱，将来成就未可限量。这还不是我要对你说的话。我要对你说的是希望你能利用你的海外住留期间，多留意此邦文物，多读文史的书，多读其他科学，使胸襟阔大，使见解高明。我不是要引诱你“改行”回到文史路上来；我是要你做一个博学的人。前几天，我在 Pasadena 见著 Dr. Robert A.（原误作为 M.）Millikan。他带我去参观各种研究室，他在 Geretics 研究室中指示室中各种工作，也“如数家珍”，使我心里赞叹。凡第一流的科学家，都是极渊博的人，取精而用弘，由博而反约，故能有大成功。

国内科学界的几个老的领袖，如丁在君、翁咏霓，都是博览的人，故他们的领袖地位不限于地质学一门。后起的科学家都往往不能由此渊博，恐只能守成规，而不能创业拓地。

以此相期许，你不笑我多管闲事吗？匆匆祝你平安。

胡适 一九三六年十月三十日

胡适是一丝不苟的学者。几天后他突然想起信里提到的美国人全名中的中间名第一个字母写错了，马上又写了一封短信给她更正。这就是中国老一辈学人的求真精神，应给我们新的启示。

吴健雄真正意义上的爱的历程应该以到达美国的第一周作为故事的起点。素昧平生但人品极佳的袁家骝的一举一行给她留下深刻的印象。但他们并没有谈恋爱，原因很简单。他们刚去那里读书，环境陌生，课程紧张，英文还需提高。一心一意的苦读没有给他们留下太多相互了解的空间与时间。一年后袁家骝的突然离去，更让他们各自把精力放在学习上。

但是，“人非草木，孰能无情？”1989 年的金秋十月，当江才健飞到加拿大西部最美校园——不列颠哥伦比亚大学的教职员俱乐部采访已经退休的渥科夫时，意外惊喜地见到吴健雄与两位男同学的一张合照。照片中这两名高大的男生，一个就是生于俄国并随父母在中国哈尔滨住过几年的渥科夫，另一个更高更帅的是个犹太人，名叫法兰柯（Stanley Phillips Frankel, 1919-1978）。他们像护卫着一位天使一般地将娇小的中国姑娘夹在中间，使得这三颗头颅可以拟合成一条曲率较大的双曲线。照片中最吸引人之处是吴健雄的一只小手握进了法兰柯的那只大手。按照江才健的解说词，“照片上的她和法兰柯都笑得很开心，一旁的渥科夫则显得比较拘谨”。尽管渥科夫除了显示这张相片，并没有多说什么，但是江才健套用了新闻学的一句格言“一张照片胜过千言万语”，让读者伸出想象的翅膀。

的确，当时近在咫尺的法兰柯和远在洛杉矶的袁家骝是吴健雄已经接纳的两个追求者，仅此二人而已，尽管李政道曾经听威尔逊太太说过她的丈夫在伯克利读书时也在

追求者行列，但只是在单行道上行驶的。法兰柯是美国人，喜欢谁就直截了当地表达出来，而袁家骝可能是东方式的更加含蓄。法兰柯尽管比吴健雄小了七岁，却只迟两年获得博士学位。吴健雄后来回忆起他时说过，“史丹利真聪明，没有看到这样聪明的人”。1943 年法兰柯随奥本海默去研制原子弹，他理论组的领导、美国天才物理学家费恩曼（Richard P. Feynman, 1918-1988）在他的畅销书“Surely You're Joking, Mr. Feynman”中称他是“聪明的家伙”。被绝顶聪明的费恩曼觉得“聪明”的人大概是够聪明的。吴健雄或许被他的聪明、热情和英俊一时迷住了。可是再聪明的他最终还是没能为吴健雄戴上订婚戒指，也许重要的原因是两人较大的逆向年龄之差以及东方文化与犹太文化的人生取向之异。连江才健这个新闻老手都未能从守口如瓶的吴健雄或讳莫如深的袁家骝嘴中挖出更多，我们也不必妄加评论了。

1940 年到 1942 年间吴健雄和两个人有着约会的关系。最终，她选择了袁家骝，接受了他的爱。这是有基础的爱。她从见到他的第一次起就一直喜欢他。他的勤劳有礼，他的乐于助人,给她印象深刻。1937 年他去了加州理工学院后，由于时空的距离，有段时间他们的关系是疏远了一些。但是“两情若是久长时，又岂在朝朝暮暮”，他们的情谊随着各自博士学位的到来又开始恢复，并渐趋稳定。和吴健雄同住国际宿舍的一位中国女学生徐静仪 1989 年回忆到，一次吴健雄去加州理工学院和袁家骝见面，她看到法兰柯心情低落，在酒吧间闷头喝酒，也没对陪他来但不喝酒的徐静仪说些什么。

1942 年南加州的春天见证了吴健雄和袁家骝结下秦晋之好。和袁家骝同住一房、1940 年由清华大学派去加州理工学院跟随冯•卡门（Theodore von Karman, 1881-1963）读博士成为其关门弟子的张捷迁（1908-2004），见到吴健雄来找袁家骝。后来，袁家骝告诉他，他们要结婚了。女方的好友们一致认为她做了一个好选择。吴健雄在加州时代的最要好的女朋友阿蒂娜在上一年暑假和他们同游时一看到袁家骝，就对吴健雄说稳定可靠的袁家骝“这就是适合你的人”。

1942 年的 5 月 30 日，在中国恰是吴健雄的阳历三十周岁生日，由密立根主婚，这一对中国新人在校长公馆举行了婚礼。当时也在加州理工学院的钱学森（1911-2009）特地为婚礼拍了一部小电影。度完蜜月，新娘新郎贯穿美国来到了东海岸。袁家骝去 RCA 公司从事国防研究，吴健雄则赴一所精英女子学院——史密斯学院教书。

婚礼

盛名之前

婚后的他们由西部搬到了东部，一个在美国无线电公司从事战时的雷达研究，这和袁家骝很早培养的对无线电的爱好很匹配；另一个则先当起了教书匠，这并不完全与吴健雄的雄心大志很吻合。

那时的美国，前 20 名的物理系完全是男人的天下，因为一个女教授也没有，这连中国都不如。吴健雄还是因为前一年访问过伯克利物理系的史密斯学院的一位女原子核物理学家兼理学院院长对她非常欣赏，邀她加盟这所贵族女校，这才随夫东行接受这个教职的。但是这所以教学为主的私立大学没有足够的经费支持她的研究。连续做了几年激动人心、硕果累累的实验，一下子失去了伯克利式的研究氛围，让野心勃勃的她颇感失落。那时，美国前总统里根（Ronald Wilson Reagan, 1911-2004）的太太南希（Nancy Davis, 1921-）在这所学校读英文和戏剧，而谢希德也在那里念书，并获得硕士学位。

但是另一方面，新婚的甜美依然如故，因为她嫁给了一位事业上优秀、生活上体贴的好丈夫。在那两年比较轻松悠闲的日子里，她经常给加州的老朋友们写信，让她们共享她的幸福。在 1942 年 9 月 19 日写给阿蒂娜的信中，她这样形容她的家庭快乐：

“在三个月共同生活中，我对他了解得更为透彻。他在沉重工作中显现的奉献和爱，赢得我的尊敬和仰慕。我们狂热地相爱着。”

尽管无研究实验可做，吴健雄未丢掉看物理文献和参加学术会议的习惯，跟上科学的步伐。第二年她在波士顿的会议期间见到劳伦斯时坦言无法研究的苦恼。她的昔日导师马上给她写了极强的推荐信，一下子所有常春藤名校都接受

了她的申请。尽管史密斯学院给她涨了不少薪水，并将职称提为助理教授，但是吴健雄还是去了普林斯顿大学，成为该校有史以来的第一位女讲师。然而，她的聘书姗姗来迟，因为系主任自己也没有想到在普林斯顿雇佣一位女教员会是如此的艰难。这个小插曲是恰恰四十年后吴健雄在哈佛大学授予她终身成就奖的演讲中透露的。

然而，即便在大名鼎鼎的学术重镇普林斯顿，吴健雄还是有怀才不遇之感，因为她的主要工作是教海军军官，而不是研究实验物理。

不过，在他们一家 1943 年搬到普林斯顿的小镇后，一群暂时呆在那里的中国年轻有为的知识分子成了他们家的常客。他们包括建筑学家贝聿铭（1917-）、数学家华罗庚（1910-1985）和陈省身（1911-2004）、物理学家张文裕和胡宁（1916-1997）。不时串门的还有被称为“伟大的”物理学家泡利（Wolfgang E. Pauli, 1900-1958）和钱学森的老师冯 • 卡门，前者直到因病早逝都和吴健雄很谈得来，后者因长期在加州理工，对袁家骝照顾有加。一生未婚的冯 • 卡门每年去欧洲前都把车子和加州的房子留给袁家骝用。

吴健雄专门教书的日子随着战时与原子弹有关的研究需要她而结束了。1944 年 3 月，她去了哥伦比亚大学，带着用这种方式帮助中国的对日战争的信念，带着战后返回中国的计划，来到杜威曾经教过书胡适曾经念过书的这所名校。谁知，她在哥伦比亚一呆就呆到退休。

那几年，袁家骝在超高频无线电测向和自导装置的最佳航线诸方面，取得了可喜的成就。1946 年，他来到普林斯顿大学担任物理研究员，主要研究宇宙线中的中子来源。他们唯一的孩子袁纬承于翌年的 2 月出生。儿子继承了父母的衣钵，也成了一名物理学家。当婴儿出生时，适逢爱因斯坦去医院看望胞妹，也顺便探望了剖腹产后留在医院的吴健雄。当时正巧袁家骝不在，英文不佳的这位最伟大的物理学家把剖腹产形象地说成“肚子切开了（cut open）”。

袁家骝在普林斯顿的工作卓有成就。按照百度百科上面的专业记载，他和合作者对人们普遍认为的宇宙线中的中子来源于宇宙空间提出了质疑。他们详细审查了作为普遍看法依据的探空实验结果，正确地指出了高空出现中子信号假象的原因。为此他们将中子探测器等装置全部充气密封，同时用一些性能优异的遥测和接受系统进行探空研究，测量大气中慢中子的分布，测量各个高度的中子的绝对强度，研究宇宙辐射中的中子生成率和绝对中子强度随高度的分布。三年的艰苦努力得出结论：宇宙线中的中子是在大气层中产生的，地球上空的中子是初级宇宙线在大气中产生的次级粒子。这彻底推翻了中子来自宇宙空间的错误论断。

作为一名外国籍资深科学家（Senior Scientist），吴健雄获得特殊的保密许可在哥伦比亚大学为原子弹研制工作得越来越忙。她的主要贡献之一是其博士论文的精确数据帮助解决了核反应堆的停机问题。二战后，本计划回国的袁家骝吴健雄夫妇又因为国内的国共战争继续滞留美国。1949 年，为了家庭生活的方便，袁家骝离开普林斯顿大学，去了纽约长岛的布鲁克海文国家实验室担任资深物理学家。

战后的数年，吴健雄还未能成为哥伦比亚大学的正式教授，她的资深科学家的头衔一直戴到 1952 年，这与她已经成为 β- 衰变实验物理世界权威的名望极不相称。1951 年已是哥大教授的吴健雄同学兰姆在系里的会上提出给她教席，但遭到龙头老大拉比（Isidor Isaac Rabi, 1898-1988）的反对。这位 1944 年的诺贝尔奖得主并非认为吴健雄的学术水准不够格，而是因为她是女的。如果大数学家希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）当时在场，他会拍案而起，大叫一声“这里不是澡堂！”这是他在听说大抽象代数学家诺特（Amalie Emmy Noether, 1882-1935）得不到哥廷根大学正规教职时的愤怒之语。其实，1933 年逃离纳粹德国的诺特，在美国也只能最后在和吴健雄教过的史密斯学院一个等级的布林莫尔女子学院教书。

第二年，由于更多的教授支持，吴健雄终于成为一名正式的副教授，并得终身聘用资格。但是，她在这一位置上还要坐上好几年，等到她最伟大的 1957 年实验完成，等到她 1958 年成为普林斯顿大学的荣誉博士和同年的国家科学院院士，哥伦比亚才给了她正教授的职称。后起之秀李政道 1953 年由普林斯顿高等研究院搬到哥大任助理教授，两年后被提为副教授，再过一年 29 岁的他成为这个大学 200 多年历史上最年轻的正教授。吴健雄的薪水也一直偏低，到了 1975 年新上任的系主任太看不下去了，特别给她做了大幅提高。

宇称革命

吴健雄真正的出大名，开始于 1956 年李政道与杨振宁两人的革命性工作。笔者根据学术界的习惯按照他们那篇改变历史的论文署名次序来提他们，而不管他们各自的贡献谁大谁小。理论物理中关于宇称守恒观念的首次公开质疑出现在 1956 年 4 月初美国罗彻斯特大学召开的粒子物理国际会

议最后一天的“新粒子理论解释”讨论会上，目的是为了解所谓的“θ-τ 之谜”。在奥本海默的主持下，一些极端活跃的才俊们，如杨振宁、盖尔曼（Murray Gell-Mann，1929-）和费恩曼分别发了言、提出了见解和质疑。会议的记录有这样的话：

讨论进一步地继续。……杨振宁认为，由于我们到目前为止，对于 θ 和 τ 衰变的了解如此之少，因此对这一问题最好是保持一个开放的想法。遵循这种开放的思维方式，费恩曼替布洛克提出了一个问题：会不会 θ 和 τ 是同一种粒子的不同宇称状态？而它们没有特定的宇称，也就是说宇称是不守恒的。这就是说，自然界是不是有一种单一确定右手和左手的方式呢？杨振宁说他和李政道曾经研究过这个问题，但是并没有得到确定的结论。……因此，或许存在一种粒子具有两种宇称。……或许可以说宇称守恒……是可以被破坏的。可能弱相互作用都是来自这同一来源，即空间-时间对称的破坏。

罗彻斯特会议后，一直合作并亲如弟兄的李和杨继续讨论 θ-τ 之谜，他们一人在哥大，一人在布鲁克海文国家实验室访问，每周两次会晤。他们创造历史的革命性观点是 4 月底或 5 月初杨振宁由长岛到李政道处的讨论中产生的。突破点是把宇称是否守恒的疑问固定在弱相互作用上。他们设想，在弱相互作用上宇称不守恒。β- 衰变就是一种重要的弱相互作用，他们经过计算发现 β- 衰变的结果和宇称守不守恒没有关系。而宇称守恒这个被科学家早已接受的“金科玉律”在弱相互作用下竟然还没有实验的证据。于是他们更相信他们的质疑有道理，便准备撰写一篇文章。最终当年在他们祖国的国庆节那天刊登的论文信息是：Lee, T. D. and C. N. Yang, Question of Parity Conservation in Weak Interactions, The Physical Review, 104, Oct 1, 1956。这篇为他们赢来历史上最快的诺贝尔奖的文章也提出了几个可以考虑的实验验证方案。

在科学中把设想变为现实的唯一途径是实验检验。费恩曼说过，任何理论只要与实验不符就是错的。与李政道共事的吴健雄就是举世闻名的 β- 衰变实验家。于是李政道从他普平实验大楼八楼的办公室上了十三楼吴健雄的办公室去看她。

那年夏天吴健雄已经计划与夫君同去日内瓦开会，然后去 20 年未回的东亚演讲旅行，包括台湾。但她一听李政道解释说这个实验对粒子物理的重要性，马上觉得不可错过这个机会。尽管李-杨那时并没有把宝押在“宇称不守恒”上，

亲如兄弟的杨振宁、李政道

吴健雄觉得不管实验结果是肯定还是否定，都提供了证实或证否一个物理定律的实验基础。作为一位实验大师，她马上提议用钴 60 作为 β- 衰变的放射源。那一年的夏天，袁家骝带着儿子完成了他们缺了太太和母亲的旅行，而吴健雄则一头扎进实验的准备之中。

这个同时改变了吴健雄自己命运的世纪实验需要最新的原子核极化低温技术，需要摄氏零下 270 度左右的超低温，而她不是低温物理学家。当时的哥大物理系这方面的设备远不及美国首都华盛顿的国家标准局，最终这个实验的团队以吴健雄挂帅而以标准局的四人协助。他们是安伯勒（Ernest Ambler, 1923-）、哈德森（Ralph P. Hudson, 1924-）、黑渥（Raymond W. Hayward, 1921-）以及他的研究生哈珀斯（Dale D. Hoppes, 1928-）。前两位来自牛津大学的英国人是低温物理学家，而后一对核物理学师生则是中西部的美国人。

这前后历时差不多半年的科学合作也反映了东西方文化的对比和差异。吴健雄的前期准备一丝不苟、细致入微，与她行事的一贯风格一致。7 月 24 日正当她这一边的预备工作一切就绪而写信给安伯勒安排去那里做实验的具体事宜时，后者的回信在介绍所需低温技术细节的同时，告诉她 8 月 4 日起他要休假两周。这让吴健雄几乎火冒三丈，因为她为了这个实验甚至放弃了和全家同去中国台湾的机会，而且在六、七两个月她马不停蹄地为实验的前期操劳。但是吴健雄的不满是中国式的含蓄。当她终于在 9 月中旬与休假后的安伯勒见面后，印象却像过去无数次的电话交流一样的好。这位后来当了国家标准局局长的英国绅士，会玩，更会工作，实践着列宁的告诫：“不会休息的人不会工作。”他给吴健雄留下的印象是“说话温和、做事能干，有效率、有自信”。

在实验的过程中，他们五人的合作相当成功。吴健雄

有课要教，所以她两头奔。到了12月的中旬，他们观察到了可以说明宇称不守恒的效应。吴健雄知道可能有其他的人也想实验求证宇称是否守恒。譬如说，哈佛的物理教授阮姆西（Norman Foster Ramsey, 1915-2011）一听到杨振宁在麻省理工学院的演讲中建议在弱相互作用中检验宇称守恒，就想到类似的实验，但由于他申请做该实验的有低温设备的橡树岭国家实验室正做一个重要实验，加上他碰到的费恩曼认为这个实验绝不会推翻宇称守恒，并打赌50:1的赔率，就没有做成。其实，许多大牌对此实验也不看好，泡利就是一例，差点也要打赌。后来在吴健雄的实验成功后的1957年4月罗彻斯特物理会上，当费恩曼一见到阮姆西，就给他开了一张50美金的支票认输。而泡利则开玩笑地回信给差点打赌的那个物理学家说："我很高兴我们没有真的打赌。因为我也许还输得起一些名声，但是却输不起我金钱的损失。"

尽管有"时间决定命运"的紧迫感，吴健雄依然谨慎万分、镇定如常。她指导她的研究生们进行计算，看这些数据是否真的证明了β-衰变的宇称不守恒效应。到了圣诞节期间，她基本认为实验成功了，便告诉李政道和杨振宁最新的结果，但还是说再次查证，并要他们暂不向外界走漏风声。但是，下个月的4日，在哥伦比亚大学物理系例行的"礼拜五午餐"上，李政道告诉大家这一喜讯。这立刻给了本系毕业留校的实验物理学家李德曼（Leon M. Lederman, 1922-）一个触动。他正进行的一个实验改动一下就可用另一方式验证宇称不守恒。当晚他就和被费米称为"真正的天才"且在他手下21岁拿到博士的哥大同事加文（Richard Lawrence Garwin, 1928-）已经想出实验方案。四天后实验完成，李德曼打电话给李政道说"宇称定律死了"。

1月7日，李德曼和加文利用π-介子衰变成μ粒子再衰变成电子和微中子的实验成功消息已广为流传。吴健雄他们在此巨大压力下，继续着从元旦第二天就开始的查证。终于在1月9日的凌晨2时大功告成。哈德森拿出一瓶上等法国红葡萄酒，然后大家一起干杯。几小时后来上班的其他科学家们看到实验室静谧无声，再看到垃圾箱里的东西，一下子恍然大悟。

在胜利的喜悦中，烦恼接踵而至。在实验进入尾声之时，吴健雄已经独自准备好了报告论文。在她的心目中，自己是实验的提议者，理应是主角，其他人则是帮忙而已。故当那个星期天他们坐下来谈论报告，男配角们发现女主角拿出已写好的东西时都有点惊讶。在他们的眼里，这是一个合作的实验，但报告中只提李-杨的论文而未提国家标准局的科学家。关键的署名排序，有人建议按字母顺序，这样安伯勒就要放在首位而吴健雄就落在最末。对此，按照江才健的写法，吴健雄"用她惯常表示反对的深长叹气，表示了意见"。安伯勒后来说于是他像"一个有教养的英国绅士"提出让吴健雄名字及其单位排第一，其他同一单位的四人按字母排序。大家都接受了这个折中方案。

吴健雄是当之无愧的。她是实验的发起者，并且从头到尾十分勤勉地为之效力。她不喜欢其他几人对实验的轻松态度，对超过15分钟的中饭时间并且有时还打桥牌的行为更不以为然。而这四位男人则认为实验期间他们都感受到了吴健雄的紧迫心情和不安全感。他们的观察或许是客观的。那时的吴健雄，因为长期职称与贡献不相匹配的现实，一心一意地想做成惊天动地的大事业，对这一次千载难逢的实验机会全身心投入。这和他们的心态是不可同日而语的。加上吴健雄无法要求他们像自己的研究生那样听话。合作完毕论文投稿后，他们的关系也冷却了。几十年后当江才健采访他们时，基本上听到的是有点遗憾之语，当然他们对吴健雄的科学贡献和敬业精神一如既往地表示了敬意之情，也知道如果没有吴健雄的发起，他们做梦也不会想到做这个开天辟地的大实验。

吴健雄等人的论文和李德曼等的登在同一期的《物理评论》上，时间是1957年2月15日。匈牙利裔物理学家泰勒格蒂（Valentin Telegdi, 1922-2006）差不多与吴健雄同时检验宇称守恒问题，但因赴欧洲奔丧而耽误，回美后得知其他实验的结果才匆匆做出实验寄出论文，结果比别人的迟了两周发表在同一期刊上。

不管怎么说，吴健雄对实验证实弱相互作用宇称不守恒拥有无可置疑的优先权。这导致诺贝尔奖委员会当年就授予李政道杨振宁物理奖。成了中国籍获诺奖的前两个，迄今还没有第三个。令许多科学家惊讶甚至愤怒的是吴健雄与诺奖失之交臂。有人说诺奖只授予最早思想的创立者，有人又归结于对东方女性的歧视，犹如以前对犹太女性麦特勒的忽略，也有人疑心评奖委员会考虑到合作者的贡献而获奖者不能超过三人。吴健雄从未公开对此评论，仅在1989年回一封新科诺贝尔物理奖得主的信中说道：

"我的一生全然投身于弱作用方面的研究，也乐在其中。尽管我从来没有为了得奖而去做研究工作，但是当我的工作因为某种原因而被人忽视，依然是深深地伤害了我。"

瑞典的委员们忽视了吴健雄，但美国的科学界和其他国际组织给予她的奖项纷至沓来。尤其是全世界的华夏儿女们沸腾了。在美国，近百年的华人移民史是一部心酸耻辱

史，一部排华的政府法案像大山一样地压得华人抬不起头来。1957 年 2 月 4 日，距离李政道和杨振宁获诺奖还有大半年，纽约的华美协会为改变华人形象的这三位英雄举行了庆祝实验证明宇称不守恒成功的欢迎会。正在旅居纽约的胡适应邀讲话。他非常自豪地提起吴健雄是他在中国公学的学生，并以她为荣，又说李政道杨振宁出生西南联大，而杨振宁的父亲杨武之是清华大学的数学教授，也是他的老朋友，他也提到北大物理教授吴大猷提拔李政道，在他西南联大大二时就带到美国芝加哥大学研究院。胡适说这是中国教育史最美的一个故事。

胡适、吴健雄、李政道（1957）

模范丈夫

人们常说“一个成功的男人背后总是站着一个女人”。这句话对于袁家骝吴健雄夫妇应该以与之对偶的形式出现：“一个成功的女人背后总是站着一个男人”。

袁家骝本身就是一位出身高贵、名校学位、名师指导、成就卓然的实验物理学家。他在受雇时间最长的布鲁克海文国家实验室工作期间参与了当时世界上能量最高的 3GeV 高能质子加速器的筹建工作，并负责设计和建造它的高频系统。同时，他先后进行了粒子探测器、高能加速器和高能物理等方面的研究。他一生最重要的学术贡献就是在高能物理的领域。他是最早用 π-p 散射证明了 π 介子和质子有共振现象的科学家。60 年代，他又用 X 射线穿越辐射来探测超高能粒子，成功地研究了带电粒子产生的穿越辐射 X 射线总能量与粒子能量的关系，并得出成正比的结论。

尽管袁家骝研究过的领域宽广而又深入，尽管他获得过像美国著名的古根海姆奖这样的奖励，比起他太太的与大众所熟知的诺贝尔奖工作挂上钩的杰出实验，他的学术成就和知名度自然要低一些。中国的许多老百姓知道他，大概只因为他是吴健雄的先生罢了，而对他的科学行为一无所知。世俗看人习惯于名声而不管内涵。比如说，居里夫人的名气大得简直不得了，令出国前的吴健雄无限地崇拜。但当她在科学研究中越来越懂得生活的真谛后，对她名气和贡献的看法也有改变，对她被称为中国的居里夫人并不认为是抬举了她。正如电影界人士都知道的，好莱坞拿到奥斯卡奖的演员应该都不错，但是许多伟大的演员从未获奖，例如加里•格兰特（Cary Grant, 1904-1986）和德博拉•克尔（Deborah Kerr, 1921-2007）。

在中国，具有大男子主义思想的人比比皆是，甚至找对象都如钱钟书（1910-1998）《围城》里方鸿渐的父亲所发的一通议论：“所以大学毕业生才娶中学女生，留学生娶大学女生。女人留洋得了博士，只有洋人才敢娶他，否则男人至少是双料博士。”但是，娶了吴健雄博士的袁家骝博士不光不是双料博士，而且还是模范丈夫。

成名后的吴健雄经常被邀请就女性问题发表演讲。对这个困恼人类几千年的老问题，吴健雄有着切身的经历和体验，有甜蜜的，也有心酸的。前者因为她有理想的丈夫，后者与美国历史相关。在中国，尽管孔圣人的断言“唯女子与小人难养也。近之则不逊，远之则怨”影响了两千年，但中华民国之后对女性的社会观大为改观，尤其是中华人民共和国建立后的毛泽东名言“妇女能顶半边天”让妇女彻底解放。吴健雄对美国科教界歧视女性科学家的现实极为不满，在她 1974 年哈佛获奖演讲中直言“西方世界在科技上是走在我们前面，但是在利用人的才智却并未领先我们”。她这里的“我们”指的是中国，而“利用人的才智”则借代“利用女子的才智”。在更早十年麻省理工的“妇女与科学专业”研讨会上，她以这样一句幽默之语开始讲话：

“我十分怀疑，微小的原子和核子，数学的表征或者生物的基因分子，难道也会对男性或者女性有着不同的偏好吗？”

吴健雄能理直气壮地对妇女问题发表高见，底气十足，正因为她有一位自始至终全力支持她事业的好伴侣。他们的朋友都知道，袁家骝作为一个丈夫，几十年如一日对她的关心可以说是无微不至的。这对一位出生于封建家庭的中国丈夫，尤其是妻妾成群的袁世凯的孙子是难能可贵的，是应该特别提及的。

袁家骝个性谦和，绝非咄咄逼人之辈。他理解事业心极强的妻子并处处辅助她。他包揽了许多家务事，对儿子的照顾可能也多于吴健雄。但是，吴健雄毕竟是传统的中国女

吴健雄、袁家骝与周恩来会面

1990 年，吴健雄、袁家骝向获得“吴健雄、袁家骝奖学金”的南京大学学生颁奖

人，她的温柔内心和对丈夫的爱只在繁忙的工作中临时被挤压一下。一旦有暇，她就拿出江南女子的烹调手艺招待劳苦功高的丈夫。在中国北方长大的袁家骝对吴健雄烧的狮子头、鸡汤、青菜和馄饨赞不绝口。老俩口的彼此恩爱后来在祖国的访问观光中更是表现得淋漓尽致。

一个人的成功有许多必然和偶然的因素像一只看不见的手在推动着。如果没有袁家骝这么好的丈夫，吴健雄作为一个科学的女强人，很难说会感到很幸福，更难说会取得如此的成功。就像杨振宁当年有杜致礼（1927-2003）（当然现在有翁帆）李政道有秦惠君（1996 年病故）的全身心照顾家庭，辅助了他们的辉煌事业。陈省身逝世后，《美国数学会会刊》刊登的一组纪念文章中有一篇来自他的侄女。她大书特书了这位华裔杰出数学家的太太郑士宁（1915-2000）怎样照顾好没有她饭都吃不上口的丈夫，认为她是一位伟大的无名英雄。这三位杰出华人的配偶一辈子的职业都是全职太太，而袁家骝事业家庭两肩挑更应该值得大书特书了。

情满祖国

笔者多年前被一部电视连续剧《情满珠江》感动。1973 年，袁家骝吴健雄夫妇终于踏上了暌违已久的祖国大陆的土地，这距离出国留学的年份已经 37 年。从此，他们一生中的新的时代开始了，这是他们情满祖国的时代。

他们与祖国的心是一直相连的。有几次他们都做了回国服务的准备。吴健雄在中国做学生起就发现她的老师辈没有一个不是念完书就回中国的，比如施士元。晚年时她听说有些人不回国是因为太太不肯回去，就评论道，这种说法如果她父亲听见了恐怕要笑坏了。且不说袁家骝在抗战开始就差点“杀回老家去”，二战胜利后他们开始认真考虑回国问题。当时中国实力最雄厚的中央大学已经提供他们两人的教授位置，但建议他们在美国多留一年觅妥实验设备以便回国开展工作。没想到国共内战开始，一切计划泡汤。在那个兵荒马乱的时刻，吴健雄的父亲也建议他们等等再说。后来，儿子出生，他们更难下决心回国，加上那时对打下天下的共产党政府认识不足，以及 50 年代初美国政府对中国留美科学家回国的刁难，使得他们暂时打消回国之念。1954 年，为了工作和出国开会签证的方便，他们加入了美国籍。

但是，他们依然情系中国，与祖国科学家的联系一直存在。1956 年，袁家骝燕京大学的老同学张文裕、王承书夫妇作为新中国首批参加国际会议的物理学家，赴日内瓦出席第一次西欧核子研究中心高能加速器和 π 介子物理讨论会。吴健雄那时正在忙于宇称实验的准备，而袁家骝在日内瓦访问。老友的相聚再一次加深了中外科学家之间的了解和联系。袁家骝后来动情地写信给朋友：“这是我们三个人一次幸福的团聚。听到中国发生的变化，了解到我们共同的朋友在祖国的一些消息，我感到非常地高兴。我相信，这一机会可能标志着西方科学家和新中国科学家之间的第一次直接接触。”后来在 1972 年，中国科学家和工程师代表团到达瑞士参观核设备及器械展览会。正巧在那里学术访问的袁家骝怀着强烈的爱国情操，陪同中国代表团参观西欧核子研究中心。


1988 年，吴健雄、袁家骝夫妇在中国科学院院士冯端（右二）的陪同下参观南京大学固体微结构国家重点实验室

吴健雄和袁家骝分别于 1958 年和 1959 年被选为台湾中央研究院的院士。他们 1962 年回到台湾参加中研院的第五次院士会议。袁家骝在之前的 1956 年由日内瓦途经西欧数国再去印度，7 月 19 日第一次回到中国的大地——台北。蒋介石会见了他，征询有关发展原子弹的意见。袁家骝以一个科学家的坦诚建议他不要搞，但应搞原子能的和平用途。他还向台湾清华大学的梅贻琦校长提出筹建原子反应堆的建议。

让吴健雄极为悲痛的是，她第一次回中国的台湾之行竟是亲眼目睹她最敬仰的胡适突然倒地而逝的伤心之旅。胡适因 1957 年当选为中研院院长而离美回台常住。他们持久而密切的师生关系让吴健雄对重返祖国大地充满兴奋之情。2 月 22 日一到达台北，对胡适一直执弟子之礼的吴健雄马上去看他。24 日，中研院选举新的院士后，下午 5 时举办了一个酒会。胡适院长第二次讲话后请大家吃点心。这时是 6 时半，他站在那里和一些人打招呼。忽然他面色苍白，向后倒下，后脑碰到桌边摔在石头地上。就这样，中国现代史上的一代名人因心脏病突发而去世。看到眼皮下发生在自己最崇敬的老师身上的悲剧，吴健雄泣不成声。隔天在殡仪馆见到胡适遗容时再度悲痛不已。袁家骝在吊唁中想起胡适当年的教诲，也是热泪盈眶。接下来的几天，吴健雄和袁家骝在悲伤的情绪中依然继续他们的学术演讲。本来计划 28 日返美，但因极度难受，在日月潭休息了两天才于 3 月 1 日结束了这次意想不到的回国之行。1965 年当他们再次回台时，中午到达，午餐后他们立即驱车前往胡适墓地默哀致敬。对吴健雄来说，这可能比她这次来领奖更为重要。这一次，他们先在香港会见了曾经资助吴健雄出国念书的叔叔以及她硕果仅存的兄弟吴健豪。她的哥哥 1958 年病逝，父母亲分别在 1959 年和 1962 年过世。见面时的悲喜交集是可以想象的。

1970 年中国的乒乓球外交导致第二年基辛格（Henry Alfred Kissinger, 1923-）的秘密访华和接踵而至第三年尼克松（Richard Milhous Nixon, 1913-1994）的访问中国。杨振宁聪明过人，判断正确并当机立断地于 1971 年 7 月访问了中国大陆四个星期，成了第一个回祖国访问探亲的海外知名华人学者。他在回美后的几次报告中盛赞大陆的变化和进步。第二年李政道也去了大陆。毛主席分别会见了这两位诺贝尔奖获得者，并以哲学家的方式和他们讨论起物质的无穷分割。他们的成功访问立即带动了其他著名华人教授回国，如陈省身。

1973 年 9 月，袁家骝和吴健雄终于回到了祖国大陆，历时 53 天。但是，吴健雄在大陆所有的直系亲属都不在了。她 8 年前在香港见上一面的亲叔叔和亲弟弟在文革中先后被迫害致死，父母的墓地也被毁坏，无法祭奠，这是那个疯狂年代的派生物。袁家骝的生母早在他出国前两年就已去世。他和穷困潦倒的亲妹妹袁家祉在天津见面时不敢多言，强忍辛酸，到了旅馆卧室才敢抱头痛哭。

但是，与周恩来的见面，总理的人格魅力让他们印象极其深刻。他对袁家骝说，“袁家出了三个‘家’，你祖父是政治家，父亲是文学家，你是科学家，现在，袁家后人中又有了共产党员，你们袁家真是一代比一代进步了！”他还安排在人民大会堂的安徽厅宴请他们，说他们夫妇一是江苏人，一是河南人，而安徽则居于它们中间。周总理的细心周到令他们大为感动。

第二年，他们再次回国，并访问了作为吴健雄的母校中央大学正宗延续物的南京大学，同时拜见引导她走向科学之路的施士元教授。

1982 年 5 月，南京大学校长匡亚明授予吴健雄名誉教授称号

1992 年，匡亚明与吴健雄、袁家骝再次会面

从那时起，吴健雄和袁家骝常回国讲学访问，尤其对她的母校一往情深。这一对物理世界华人翘楚的名字频频出现在报刊上，在中国民众的眼里越来越熟悉。当时许多人甚至认为张扬描写科学家的畅销小说《第二次握手》中的女主人公就是吴健雄的版本。但是，对于南京大学和中央大学派生出去的南京工学院（现已改称东南大学）的学生们，吴健雄的母校访问才是他们最激动人心的时刻。特别是从 70 年代末期起，文革后的大学又恢复了招生，整个校园里学生们刻苦求学的气氛，其浓度之高，教师们诲人不倦的态度，其心意之诚，都创下自西南联大时期以来中国高等教育之最。吴健雄一出现在学子们的面前，好像是科学的女神降临而下。她就是科学的化身。尤其是那些求知欲旺盛的女学生，从她们的老学长的故事中看到了自己的未来。的确，几年后与笔者同机赴美留学的南大化学系才女就亲口说过，当年她的人生楷模就是吴健雄，而最佩服的校长就是匡亚明。

南大师生最爱戴的校长匡亚明和物理世界第一夫人吴健雄有好几次握手。其中最耐看的握手照片是 1982 年 5 月的那张。这个月是吴健雄的 70 岁生日，而南京大学恰比她年长十岁。照片上，匡亚明校长授予吴健雄博士南京大学名誉教授称号，笔者那时刚读研究生，也和众多仰慕者一起目睹了这一盛况。握手者都拍得风度翩翩并且潇洒自如。之前一年，与科学院学术交往更多的袁家骝被中国科技大学授予名誉教授。1986 年，南京大学的曲钦岳校长再一次授予吴健雄名誉博士学位，而笔者刚刚出洋留学，未能再次一睹风采。吴健雄 80 初度时，她和 86 高龄的匡亚明名誉校长在南京再度握手，传为佳谈。

吴健雄更没有忘记她的家乡父老，尤其是新一代的成长大业。她父亲创办的明德学校，已从当初的小学进化到今日的 12 年制中小学一条龙。1988 年她特地回乡主持父亲 100 周岁的冥诞纪念日，并捐赠她和袁家骝近百万美元的个人积蓄设立“纽约吴仲裔奖学金基金会”，基金每年的利息用以奖励明德的优秀师生。后来，他们继续为明德学校捐赠了价值几百万人民币的楼房和电脑。作为教授和研究员，他们一辈子只靠薪水吃饭，不似投资家、工业家或商人那么富有。他们自己几十年来生活很简单，从不追求个人的享乐。袁家骝 2003 年在北京逝世时，其生命的最后一段日子在医院度过，其俭朴风格令人感动。

他们不光财力上帮助家乡的教育，也传授教育的真谛。1992 年，吴健雄在与明德中学老师座谈时说，学校太注意分数，一分之差就不得了了，这不行。要注重创造力、能力、恒力，要鼓励学生发问。中国的家长比较喜欢在学生回家的时候问孩子：你今天考了几分？鲜有家长会问孩子：你今天向老师提了什么好的问题没有？

今年在江苏太仓举办的吴健雄诞辰 100 周年纪念活动时，她的女学生、美国国家科学院院士、哈佛大学讲座教授胡玲又回忆起导师对中国教育的担忧：“吴健雄先生认为中国学生的基础不错，但培养方法有问题，不让学生质疑教授，学生不敢超越老师，不让学生独立思考，不培养学生动手能力。”胡玲认为，当下这个问题仍然存在。

如今，吴健雄和袁家骝的墓地坐落在明德学校的校园内。在圆形的墓碑上刻有中、英文字的碑文，左侧的碑文内容是：

吴健雄、袁家骝的墓园

这里安葬着
世界最杰出的女性物理学家
——吴健雄（1912 — 1997）

她一生绵长深刻的科学工作
展现了深思力作和真知洞见
她的意志力和对工作的投入
使人联想到居里夫人
她的入世、优雅和聪慧
辉映着诚挚爱心和坚毅睿智
她是卓越的世界公民
和一个永远的中国人

右侧的碑文内容是：

长眠于吴健雄旁边的袁家骝
——（1912-2003）

是一个富有奉献精神的丈夫
和富有爱心的父亲
他是袁克文之子、袁世凯之孙
他和健雄生活在纽约
他是布鲁克海文国家实验室
杰出的物理学家
他专长于辐射探测
后来致力于在台湾建立
同步辐射研究中心
他逝世于他的家乡—中国大陆

完稿于 2012 年 7 月 7 日

附注：作者感谢香港城市大学陈关荣教授对初稿修改提出好建议。

《中国数学会通讯》是该刊编辑委员会编辑出版的内部刊物，季刊。主要刊登国内外数学界的重要信息，报道中国数学会与各省市自治区数学会、学科分会等的活动情况。主要栏目包括：学术活动信息，数学教育与普及，数学精品文章（数学的历史、进展、价值、趣事等），人物专栏，学科介绍，书讯与书评等。

2012 年《中国数学会通讯》全年的总订费为 50 元（含邮费）。欢迎各省市自治区数学会、学科分会和有关单位以及广大数学工作者、数学爱好者订阅本刊并踊跃投稿。

订阅办法： 请将订费邮汇至北京中关村东路 55 号（邮政编码：100190），中国数学会办公室；或行汇至中国数学会，同时请给中国数学会办公室来信告知（或在汇款单附言中注明）订购份数、收刊单位（或个人）详细地址及邮政编码，以便我们及时准确地投寄本刊。

开 户 行：北京工商行海淀西区支行
帐　　号：0200004509089161419
电　　邮：cms@math.ac.cn
电　　话：0086-10-62551022

2012 年第 3 期要目：

《中国数学会通讯》编辑部供稿