



枪打出头鸟

三人决斗问题趣谈

万精油

三人决斗问题在网上流传很久了，甚至有人已经把它写进书里。这个大家熟悉的题目我本来没有想把它放到我的微博上。可是，上周在《数学文化》的微博上看见推荐一个两人决斗问题，我觉得过于简单，于是把这个三人决斗问题拿出来作比较。题目出来一个星期了，想写一个答案算交差，没想到越写越长，140字的微博不够，于是干脆把它加长成一篇文章。

先说那个两人决斗问题。说是两个人搞“俄罗斯轮盘赌”，一个可以装六颗子弹的左轮手枪里装了一颗子弹。随机转盘以后两个人轮流用枪对准对方额头射击。每次打枪后重新转盘。问是先开枪划算还是后开枪划算，并算先开枪和后开枪的存活率。因为每次打枪后重新转盘，所以想都不用想肯定是先开枪的划算。至于先后的存活率，后开枪的人要在第一枪没有被打死的情况下（概率是 $\frac{5}{6}$ ）才能达到与先开枪的人相同的状态。所以，后开枪的人的存活率是先开枪的人的存活率的 $\frac{5}{6}$ 。再加上两人的存活率之和是1，可以得



出先开枪与后开枪的存活率分别为 $6/11$ 和 $5/11$ 。所以我说这个问题过于简单。

其实，上面那个题篡改了“俄罗斯轮盘赌”。真正的“俄罗斯轮盘赌”是随机转盘后对准自己额头打，而且每次打完不再转盘，自动转进下一个子弹位。在这种情况下问先开枪划算还是后开枪划算就是一个很好的条件概率题。第一枪被打死的概率是 $1/6$ 。第二枪被打死的概率是 $5/6 \times 1/5$ ，还是 $1/6$ ，以此类推。当然如果对题目理解的很清楚，根本就不需要算。第 K 枪死的概率就是子弹在第 K 个弹腔的概率，因为是随机的，每个位置的概率都是 $1/6$ ，所以先打后打都一样。

三人的情况就要有意思得多。从两人到三人有点像从二体运动到三体运动。因为二体运动必须是平面运动，简单解一解 $F = Ma$ 就可以有结果。三体问题要复杂得多，根本没有解析解。牛顿、庞加莱这些大家都没有办法。当然，这个三人决斗问题只是比两人决斗问题麻烦一点，比三体问题那是要简单多了。先叙述一下三人决斗问题。

A, B, C 三人决斗。已知 A 的枪法奇准，百发百中。B 次之，三枪命中两枪。C 最差，三枪只能打中一枪。决斗的方式是三人轮流开枪，每次只能开一枪，可以随便选向谁开枪。为公平起见，他们决定让 C 先开枪。然后是 B（如果还活着），最后是 A（如果还活着）。如果一轮结束后还有超过一人活着，再按 CBA 循环。问：在上面给出的条件下，每人的最佳策略是什么？如果大家都采用最佳策略，每人的存活率是多少？

首先，在三人都在的情况下，开枪的人应该打另外两人中命中率高的，因为如果他打中就轮到剩下的那个人打他，当然希望命中率不高的人剩下。所以 A, B 肯定互射，而最差的 C 被当作老弱病残保护起来。那么 C 是不是该打 A 呢？如果他打中 A，那么该 B 来打他。他知道有三人存在时 A, B 都不会来打他，打掉一人反倒对他不利。所以他的最佳策略是放空枪。等 A, B 相互之间干掉一人后轮他先打，不管命中率如何差，两人中先开枪总是划算的。这就是所谓鹬蚌相争，渔翁得利。

有了这个策略以后，算存活率就是很直接的概率题了。在 A 的命中率是 1 (100%) 的情况下，B 和 C 的命中率对每人的存活率的影响很不一样。为了求一个通式，我们假设 B 的命中率是 b ，C 的命中率是 c 。按题目假设，我们有 $1 > b > c > 0$ 。通过一些推导，我们可以得出 A, B, C 的存活率分别为：

$$\begin{aligned} A: & (1 - c) \times (1 - b) \\ B: & b - b \times c / (b + c - b \times c) \\ C: & c + b \times c \times (1 / (b + c - b \times c) - 1) \end{aligned}$$

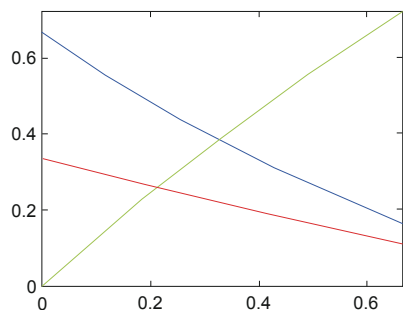
为了不把这篇文章变成数学论文，这个解的具体推导就留成作业好了。

我们最初叙述的这道题就是当 $b = 2/3$ 和 $c = 1/3$ 时的特例。在此情形下，有 A, B, C 的存活率分别是： $2/9$ ， $8/21$ ， $25/63$ 。

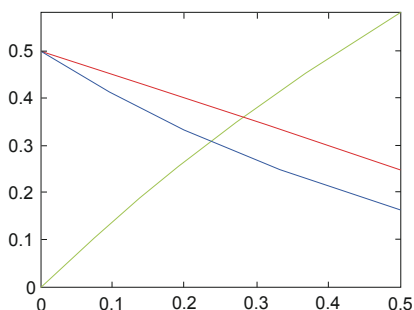
当然，这道题有趣的是在 b, c 取各种值所得的各种结果。我做了三个 A, B, C 存活率的图如下。下图中， b 分别为 $2/3$ ， $1/2$ ， $1/3$ ，横坐标是 C 的命中率，从 0 到相应的 b 。Y 坐标是存活率。

可以看到在 $b = 2/3$ 时，虽然 A 的命中率最高，但他的存活率（红色）一直在 B 的存活率（蓝色）下面。甚至当 c 比 0.2 多一点以后，C 的存活率（绿色）也比 A 高。这个图告诉我们在制度不好的时候，优秀人物并不一定混得更好。所谓“枪打出头鸟”，“出头的椽子先烂”，“木秀于林，风必摧之”都是同一个机制。坏制度不能保护他们这些出头鸟。

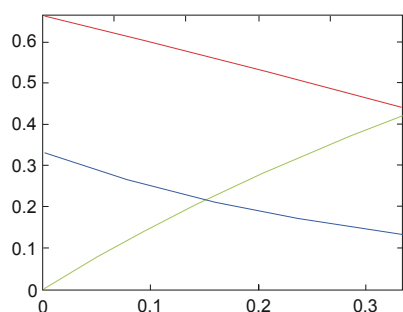
不过，要想比出头鸟混得更好，自己的本事也不能太差。当 $b = 1/2$ （或以下）时，蓝线一直在红线之下。也就是说即使有制度保护，B 也永远不会比 A 混得更好。这就是通



B 的命中率 = 0.66667



B 的命中率 = 0.5



B 的命中率 = 0.33333



A 的存活率 (红色)

B 的存活率 (蓝色)

C 的存活率 (绿色)

常所说的烂泥糊不上墙。阿斗当不好皇帝，虽然有刘皇叔托孤，诸葛亮撑腰。

三个图都有一个共性，那就是当 C 的命中率接近 B 的命中率一半以后，C 的存活率就比 B 还好。这也是一个常见现象，中等水平的人常吃亏。因为他们本事不够，自己上不去，又没有坏到需要制度照顾，最后的结果就是吃亏。美国这边现实的例子就是孩子上大学的学费问题。真正的富人是不在乎这点钱的，而收入不够的人可以申请资助，只有中产阶级，学费压力很大，却不能申请资助。

C 的存活率甚至有时候比 A 还高。不过，当 b 更小的时候（比如 $1/3$ ），红线就一直在蓝、绿之上了。这就是为什么许多统治阶层要搞愚民政策。下面的人水平太差以后，无论怎么钻空子（比如开空枪），上面的人都总是有优势。

受过数学训练的人读到这里，想要问的一个很自然的问题就是，什么时候 A, B, C 的存活率相等（都等于 $1/3$ ）。有了前面的公式，我们不难算出，当 $c = (5 - \sqrt{7})/9$, $b = (\sqrt{7} - 1)/3$ 时，A, B, C 的存活率都等于 $1/3$ 。（顺便说一下，如果找不到正确方法，要求出这个平衡点需要解一个四次方程。但如果找到正确方法，只需解一个二次方程就可以了，还是留成习题吧。）

这个平衡点表面看起来有点像三权分立，但这种表面上的相等其实很不公平。比 C 优秀差不多 4 倍的 A 在这个规则下得到的结果只不过与 C 相同而已。有点像计划经济体制下的平均主义。从前的大学生毕业，不管好坏一律都是 56 块半的工资。这种制度不能鼓励优秀人士，对社会的整体进步没有好处。

学佛的人常说一滴水珠看世界，所谓“滴水藏海”。我用这个三人决斗的趣味题目来看社会现象，搞笑之作，希望有人能欣赏。