谷歌数学涂鸦赏析（中）[1]

欧阳顺湘

16 费马诞辰 410 周年

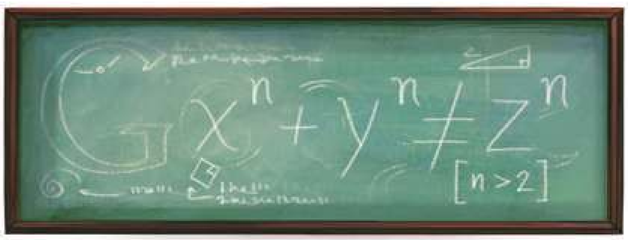

图 66 费马诞辰 410 周年纪念（2011 年 8 月 17 日，全球）

法国数学家皮埃尔 • 德 • 费马（Pierre de Fermat, 1601 年 8 月 17 日-1665 年 1 月 12 日）主职为律师，业余从事数学研究，被称为“业余数学家之王”。他在微积分的早期发展过程中起过重要的作用——研究过求切线和极大极小问题，是概率论和解析几何的开创者之一，还被誉为“近代数论之父”。

纪念费马诞辰 410 周年的谷歌涂鸦很有特色，为很多媒体和读者所留意。涂鸦以黑框灰绿色底的黑板为背景，上书费马大定理的内容：

$$x^n + y^n \neq z^n \ (n > 2).$$

即方程 $x^n + y^n = z^n$ 在 $n > 2$ 时无正整数解。

涂鸦右上角画了一个直角三角形。按勾股定理（即毕达哥拉斯定理），直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方。这提示我们，费马所考虑方程是当 $n = 2$ 时的方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的推广。与费马大定理对 $n > 2$ 情形的论断相反，这时方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 有无穷多个整数解 [2]。这等价于说有无穷多个整数组（常被称为勾股数组）可以构成一个直角三角形的三条边。

方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的特殊解的首次发现一般被当作各民族和国家数学水平发展的标志：

1. 公元前 19-前 15 世纪的巴比伦泥板中，就记载了 15 组勾股数，其中有 (119, 120, 169)，(3367, 3456, 4825)，(12709, 13500, 18541) 等。
2. 公元前 11 世纪我国《周髀算经》中记载有商高说的：“若勾三，股四，则弦五。”此说明商高已经知道边

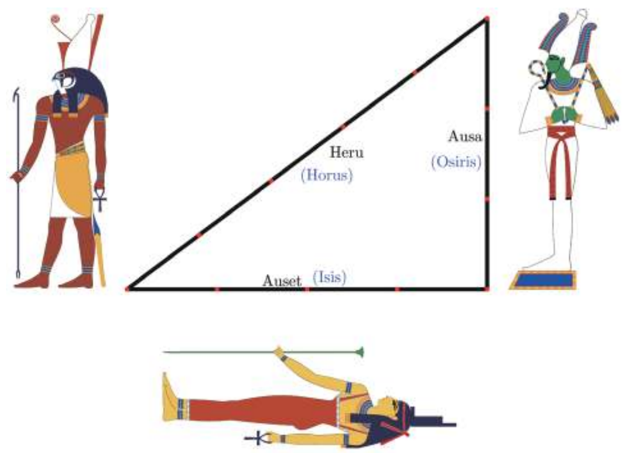

图 67 埃及三角形的象征

[1] 本文续同作者《谷歌数学涂鸦赏析（上）》，《数学文化》第 4 卷第 1 期，页 16-35，2013 年。

[2] 解的通用表达式、丢番图的《算术》以及费马大定理的介绍可参作者《亚历山大城的希帕蒂娅》（《数学文化》第 3 卷第 1 期，页 3–28，2012 年）一文。

图 68 费马

长为 3, 4, 5 的直角三角形。

3. 比例为 3:4:5 的直角三角形在古埃及有着神秘的色彩，常被称为埃及三角形。希腊作家普鲁塔克（Plutarchus，约 46 年-125 年）在他的《道德论集》（*Ethica*，亦作 *Moralia*）第 5 卷中首先描述了这样的三角形：短直角边被称为 Ausa，对应于作为起源的父亲欧西里斯（Osiris）；长直角边被称为 Auset，对应于接受者母亲伊西斯（Isis）；斜边被称为 Heru，对应于前述两者的完满结果：儿子荷鲁斯（Horus）。

费马大定理虽然冠以定理之名，但在 1995 年英国数学家安德鲁•怀尔斯（Andrew Wiles, 1953-）给出这个定理的完整证明之前，并无定理之实。在较早期的文献中，

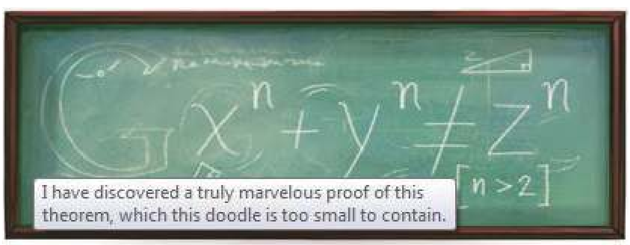

图 69 “费马的名言”

[3] 费马小定理：设 a 为整数，p 为素数，则 p 整除 $a^p - a$。读者可以考虑 $a = 2$，p 分别为 3, 5, 7 的例子：$2^3 - 2 = 2\times3$，$2^5 - 2 = 5\times6$，$2^7\times2 - 2 = 126 = 7\times18$。

它被直接称为费马猜想，后来因为费马的其它猜想或断言均被核实，且只有少数被否定，所以称之为费马最后的定理（Fermat's Last Theorem）。在中文里此定理被称为大定理，是相对于“费马小定理（Fermat's Little Theorem）[3]”而言的。

费马大定理原是费马在 1637 年左右阅读古希腊数学家丢番图的名著《算术》一书的译本时在页边空白的一个断言，当时他还在页边注释“我发现了一个美妙的证明，可惜由于空白太小而不能写下来”。如果你将鼠标移到这幅谷歌涂鸦上，可以读到这句名言的模仿：“我已发现了这个定理一个美妙的证明，可惜这个涂鸦太小而没法写下来。（I have discovered a truly marvelous proof of this theorem, which this doodle is too small to contain.）”怀尔斯的论文长达 100 多页，这篇论文以及他与其学生理查德•泰勒（Richard Taylor）合写的 19 页补充论文，发表在《数学年刊》（*Annals of Mathematics*）1995 年第 3 期整个一期，页边空白和涂鸦空白明显不够！

费马的许多数论结果都像这个论断一样没有给出过证明。不过，费马证明了 $x^4 + y^4 = z^4$ 没有正整数解。这也是现存费马在数论领域给出的仅有的两个证明之一。经过检验，人们发现费马提出的猜想和论断几乎都是对的。但他也“马”失前蹄过。费马知道形如 $2^m + 1$（m 为正整数）的数要为素数，m 必须等于 2 的非负整数幂。接着他检验了 $F_n := 2^{2^n} + 1$（n 为非负整数）的前 5 个数：$F_0 = 2^1 + 1 = 3$，$F_1 = 2^2 + 1 = 5$, $F_2 = 2^4 + 1 = 17$, $F_3 = 2^8 + 1 = 257$, $F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$。发现他们都是素数。他猜测所有的 F_n，这些被后人称之为费马数的数，都是素数。但在约 100 年后的 1732 年，计算能力超强的欧拉发现：

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641\times6700417.$$

这表明第 6 个费马数不是素数，否定了费马的猜测。至今还只知道前面 5 个费马数是素数。

在怀尔斯之前，数学家们已证明了费马猜想的许多特殊情形。在这个过程中催生了许多重要结果。相传希尔伯特不愿意去研究费马大定理的一个原因是不希望杀死这只会生金蛋的鹅。

怀尔斯的证明用到了代数数论中的椭圆曲线理论。陈省身曾在庆祝自然科学基金制设立 15 周年和国家自然科学基金委员会成立 10 周年的讲演《中国的数学——几件数学新闻和对于中国数学的一些看法》中说：“从这个定理我们应认识到：高深的数学是必要的。Fermat 定理的结论虽然简单，但它蕴藏着许多数学的关系，远远超出结论中的数学观念。这些关系日新月异，十分神妙，学问之奥，令人拜赏。”陈省身演讲中的另一段话也是很有借鉴意义的：“我相信，Fermat 定理不能用初等方法证明，这种努力是徒劳的。

数学是一个整体，一定要吸取几千年所有的进步。”

与费马大定理等许多丢番图方程密切相关的是约瑟夫•欧斯特勒（Joseph Oesterlé）及大卫•梅瑟（David Masser）在 1985 年提出的 *abc* 猜想，这个猜想一旦证明，将一举重新证明或解决包括费马大定理在内的许多问题。

abc 猜想的内容如下：设 a, b 为互质的正整数，$c = a + b$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 $C_\varepsilon > 0$，使得

$$C_\varepsilon < \frac{(\mathrm{rad}(abc))^{1+\varepsilon}}{c}.$$

这里 $\mathrm{rad}(n)$ 表示 n 的所有不同素因子的乘积。例如，对 $n = 2^3 \times 5 \times 11^2$，有 $\mathrm{rad}(n) = 2 \times 5 \times 11 = 110$。

2012 年 8 月，日本京都大学数学家望月新一（Shinichi Mochizuki, 1969-）发布总约五百页的 4 篇文章试图提供 *abc* 猜想的证明。这立即引起了很大的关注，《自然》和《科学》杂志都做了报道。望月新一也用到了椭圆曲线理论，但他接着使用了他自创的全新数学理论。

望月新一的证明目前正由其他数学家检查。他曾经证明过艰难的定理。但数学史上不乏严肃的数学家公开宣称解决了大问题，而后发现有错的例子，如 2007 年，法国数学家吕西安•施皮罗（Lucien Szpiro）就曾宣布证明了 *abc* 猜想。

17 哈雷诞辰 355 周年

图 70 哈雷诞辰 355 周年纪念（2011 年 11 月 8 日，英国）

埃德蒙•哈雷（Edmond Halley, 1656 年 11 月 8 日-1742 年 1 月 14 日）是英国历史上一位在天文学、数学、物理学、金融和精算等方面做出过重要贡献的人物。他最出名的成就是我们熟知的：成功预言了现在被命名为哈雷彗星的周期（76 年）和椭圆轨道。谷歌在纪念哈雷诞辰 355 周年的涂鸦中就是用星空中的彗星来纪念哈雷的这一成就。1706 年，在他做出对哈雷彗星的预测之后一年，他学会了阿拉伯语，将阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga, 约前 262- 约前 190）的《圆锥曲线论》的第 5 至第 7 卷从阿拉伯文翻译为拉丁文，而且重建了佚失的第 8 卷。圆锥曲线与天体运行轨道密切相关，从此也可以看出哈雷的努力。

吸引公众的天文现象的出现往往是进行科学教育的重要契机。古代因为对天文现象的不解而常将彗星视为会带来霉运的“扫把星”。现在因为哈雷等人的贡献，我们可以正确认识彗星了。也因为这样一个相关的原因，哈雷彗星出现的时间成了激励美国进行科学教育的信号。在上一次哈雷彗星访问地球的 1985 年，美国提出 2061 计划，期望通过 76 年的努力，在哈雷彗星再次回来的 2061 年，所有能看见这颗彗星的美国人，都能够适应科学技术和社会生活的发展变化。为此目的，在 1985 年美国就需要着手进行科学、数学和技术教育等方面的改革。美国的 2061 计划也促使了中国在科学教育方面的反思，提出“2049 计划”，即全民科学素质行动计划，希望到 2049 年新中国建国 100 周年时，国民的科学素养有大的提高。

图 71 哈雷

哈雷很早就做出了天文学重要贡献。1673 年，年仅 17 岁的他进入牛津大学王后学院学习。两年后他即开始协助皇家天文学家约翰•佛兰斯蒂德（John Flamsteed, 1646-1719）进行天文观测。一年后他更是放弃学业去南大西洋上的圣赫勒拿岛（St. Helena）工作了两年，编制了第一个南天星表，补充了当时天文学界只有的北天星表。因此工作，哈雷被选入皇家学会，当时他才 22 岁。哈雷在 1720 年还继任佛兰斯蒂德成为第二位英国皇家天文学家

哈雷对引力的兴趣以及天体运行轨道的疑问，使他在 1684 年 8 月到剑桥去访问牛顿，发现牛顿已得到了万有引力定律，哈雷于是说服牛顿发表该结果，并资助牛顿出版了《自然哲学的数学原理》。类似的故事在英国历史上也重现过：达尔文在赖尔的催促下才在 1859 年出版《物种起源》。实际上他的进化论思想早在 1844 年就已基本定型，并写好了初稿。

哈雷与另一位大数学家拉格朗日的“交往”却是时空相隔的。17 岁以前的拉格朗日喜欢文学，对数学并无感觉，很可能会在父亲的安排下成为一名律师。使得拉格朗日迷上数学的原因是他读到了哈雷所写的一篇介绍牛顿微积分思想的文章。

哈雷在人口统计学与保险方面也有影响深远的工作。他参与到这项工作也有一定的偶然性。

1662 年英国人格兰特（John Graunt, 1620-1674）已经发表了著名的人口统计工作《关于死亡表的自然的和政治的观察》。但他所使用的数据中伦敦人口死亡时的年龄没有记录。大约 30 年后，布雷斯劳（Breslau，即波兰的弗罗茨瓦夫 [Wrocław]）的牧师卡斯帕 • 诺依曼（Caspar Neumann, 1648-1715）发表了一份有关布雷斯劳人口的出生、死亡以及死亡时年龄的详细报告 *Reflexionen über Leben und Tod bey denen in Breslau Geborenen und Gestorbenen*。他将此报告寄给了莱布尼兹，而莱布尼兹转告了英国伦敦皇家学会。1691 年，诺依曼按要求将报告寄给了伦敦皇家学会的秘书。哈雷分析了这份报告，在 1693 年发表了一篇关于人寿保险的文章，改进了格兰特的死亡表并引进了死亡率的定义。

1762 年，世界上第一家保险公司——伦敦公平保险社（The Equitable）在英国成立。这家保险公司应用的技术就来源于哈雷的计算方法。现在很受追捧的职业“精算师”即源于这家公司。

18 华罗庚诞辰 101 周年

图 72 华罗庚诞辰 101 周年纪念（2011 年 11 月 12 日，中国大陆、香港）

2011 年 11 月 12 日是我国著名数学家华罗庚（1910 年 11 月 12 日-1985 年 6 月 12 日）诞辰 101 周年，谷歌以涂鸦进行纪念。涂鸦采用卡通形象的华罗庚一边泡茶一边思考“1 ＋ 1 ＝ ?”的漫画方式，突出了他的两项重要的贡献：一是以哥德巴赫猜想“1 ＋ 1 ＝ ? ”所指示的数论研究（或说所指导学生的成就），二是用华罗庚提出的“泡壶茶喝”这个经典的时间安排例子来标志他的统筹学研究。更广一些，两者分别表示他在纯数学研究与应用数学推广方面的贡献。

泡茶喝的例子来自于华罗庚 1965 年 6 月 6 日在《人民日报》上发表的《统筹方法平话》。读者对此应该不陌生，因为他的文章经节录、编写后入选了中学《语文》教材。华罗庚在文章的引子中先问：“比如，想泡壶茶喝。当时的情况是：开水没有。开水壶要洗，茶壶茶杯要洗；火已升了，茶叶也有了。怎么办？”然后比较甲、乙、丙三种办法：

图 73 中国科学院数学与系统科学研究院思源楼内的华罗庚雕像（作者摄于 2012 年 11 月 7 日）

> **办法甲**：洗好开水壶，灌上凉水，放在火上；在等待水开的时候，洗茶壶、洗茶杯、拿茶叶；等水开了，泡茶喝。
>
> **办法乙**：先做好一些准备工作，洗开水壶，洗壶杯，拿茶叶；一切就绪，灌水烧水；坐待水开了，泡茶喝。
>
> **办法丙**：洗净开水壶，灌上凉水，放在火上；坐待水开，开了之后急急忙忙找茶叶，洗壶杯，泡茶喝。

“哪一种办法省时间？”就变得很明显：“谁都能一眼看出，第一种办法好，因为后二种办法都‘窝了工’。”

华罗庚就是从人人都熟悉的泡茶的例子开始，以通俗易懂的语言，深入浅出地说明了“统筹方法，是一种为生产建设服务的数学方法。它的应用范围极为广泛，在国防、在工业的生产管理中和复杂的科研项目的组织和管理中，皆可以应用”。

此后，华罗庚还撰写和出版了另一本科普读物《优选法平话及其补充》。“优选法”可用以改进生产工艺和提高质量。华罗庚组织的“双法”（“优选法”和“统筹法”）推广小分队，共去过 26 个省、自治区和直辖市，有很大的经济效益和社会效益。

华罗庚写作《平话》以及推广“双法”得到过毛泽东

图 74 毛泽东给华罗庚的第一封信

两次亲笔信的鼓励。1964 年初，华罗庚曾给毛泽东致信，表达了自己希望走出书斋，将数学应用于实际工作的愿望。同年 3 月 18 日毛泽东回信：“华罗庚先生：诗和信已经收读，壮志凌云，可喜可贺。肃此。敬颂教祺！”1965 年，华罗庚再次致信毛泽东，写了赴三线参加生产实践的感受，并将自己关于统筹方法平话的书寄了一本给毛泽东。1965 年 7 月 21 日，毛泽东再次复信：“华罗庚同志：来信及《平话》，早在外地收到。你现在奋发有为，不为个人，而为人民服务，十分欢迎。听说你到西南视察，并讲学，大有收获，极为庆幸。专此奉复。”

纪念华罗庚涂鸦上的“1 ＋ 1 ＝？”表示哥德巴赫猜想“1 ＋ 1 ＝ 2”，含义为任意一个大于或等于 6 的偶数都可以表示为两个奇素数之和，就如我们有 6 ＝ 3 ＋ 3，8 ＝ 3 ＋ 5 以及 100 ＝ 41 ＋ 59 等。这里的“1”和“2”分别用来象征奇素数和偶数。涂鸦中的“1 ＋ 1 ＝？”与前文中纪念陈景润的谷歌涂鸦上的“1 ＋ 2”相映成趣。“1 ＋ 2”指陈景润的结果，因此这里的“1”还是表示奇素数，“2”表示不超过两个奇素数的乘积。“1 ＋ 2”是目前对于“1 ＋ 1 ＝？”的最好的答案。华罗庚的学生群体对“1 ＋ 1 ＝？”的研究可以看做华罗庚对数学的一大贡献。

因陈景润刻苦钻研，勇摘科学皇冠上的明珠的故事而使得形象地描述哥德巴赫猜想的“1 ＋ 1 ＝ 2”以及陈氏定理的“1 ＋ 2”广为人知。然而有不少人对此望文生义地来理解，以为数学家闲得没事做或数学是如此高深莫测，简单的算术 1 ＋ 1 ＝ 2，1 ＋ 2 ＝ 3 都要研究。如此疑虑和牵强附会在公众乃至某些名人的言论中并不鲜见。这反映了数学普及的迫切性。

华罗庚自己做了很多数学普及工作，除了上述两本《平话》，还撰写了《从杨辉三角谈起》、《从祖冲之的圆周率谈起》等深受读者喜爱的普及图书。华罗庚作为一位在数学研究领域有国际地位的数学家在数学普及方面做出如此的努力，必定受到人们的尊敬。

关于华罗庚的传记，感兴趣的读者可以阅读王元著《华罗庚》等作品。

19 赫兹诞辰 155 周年

图 75 赫兹诞辰 155 周年纪念（2012 年 2 月 22 日，全球）

2012 年 2 月 22 日的谷歌涂鸦是波形曲线动画，曲线分段使用蓝、红、黄、绿四种谷歌颜色。这是纪念十九世纪最重要的物理学家之一，德国物理学家海因里希 • 赫兹（Heinrich Hertz, 1857 年 2 月 22 日-1894 年 1 月 1 日）诞辰 155 周年。

涂鸦采用波形曲线，是因为赫兹在 1887 年首先用实验证实了电磁波的存在，验证了麦克斯韦的电磁波理论。电磁波的发现使得我们现在使用电视、广播、无线网络和手机等成为可能。为纪念他，频率的国际单位制单位赫兹就是以他的名字命名的。

在慕尼黑大学求学期间，赫兹听从冯 • 约里（P. G. von Jolly）的建议，研读了拉格朗日、拉普拉斯以及泊松的著作，为日后的研究奠定了坚实的数学基础。他关于数学公式有名言：“人无法摆脱这样的感觉：这些数学公式是独立存在的，有它们自己的智能，它们比我们更聪明，甚至比它们的发现者聪明，因为我们从它们中得到的多于我们赋予它们的[4]。”跟随

图 76 1994 年德国发行纪念赫兹逝世 100 周年的邮票

[4] 参考贝尔 (Eric T. Bell) 著《数学精英》（*Men of Mathematics, New York, 1937*）：One cannot escape the feeling that these mathematical formulas have an independent existence and an intelligence of their own, that they are wiser that we are, wiser even than their discoverers, that we get more out of them than was originally put into them。

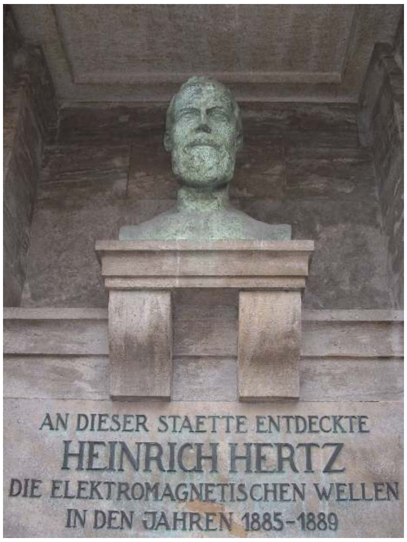

图 77 现德国卡尔斯鲁尔理工学院赫兹纪念雕像，铭文翻译：1885-1889 年，赫兹在这里发现了电磁波。(An dieser Stätte entdeckte Heinrich Hertz die elektromagnetischen Wellen in den Jahren 1885-1889)

基尔霍夫（Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887）以及亥姆赫兹（Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821-1894）等大家的学习也使得赫兹的能力得到极大的提高。

虽然因败血症，赫兹年仅 36 岁就去世了。但他的成就是多方面的，除了上述电磁波实验，他还发现了光电效应，改写了麦克斯韦方程组等。我们下面介绍他在力学体系建立方面的贡献。

赫兹是既能够从事实验物理学，也能做理论物理的物理学家，富于哲学思想。他坚信物理学应该把自然现象归结为简单的力学定律，因此开始了基础力学研究。在他生命的最后三年，与疾病斗争，与时间赛跑，撰写了《力学原理》[5]。这本书在赫兹去世后不久出版，很受重视，读者可以在《西方数学中的里程碑式作品：1640-1940》[6] 中读到更多介绍。

传统的经典力学和分析力学体系分别以力和能量为核心概念。赫兹只用到时间、空间和质量这三个量，用类似于《几何原本》中的写作体系和严谨的推理，构建了一种“无力的力学”。亥姆霍兹在为《力学原理》写的序言中说：“未来将证明，本书对揭示自然力的新的、普遍特性有着重大启发价值。”事实上，赫兹的观念后来为爱因斯坦等所继承和发扬。在广义相对论中，万有引力这一自然界最基本的力就是用空间的弯曲来表示。

20 吉泽章诞辰 101 周年

图 78 吉泽章诞辰 101 周年纪念（2012 年 3 月 14 日，全球）

2012 年 3 月 14 日的谷歌涂鸦是用折纸作品表现的，这是为了纪念日本折纸艺术大师、现代折纸之父吉泽章（1911 年 3 月 14 日-2005 年 3 月 14 日）诞辰 101 周年（也恰好为逝世 7 周年）。

纸张是中国四大发明之一，折纸也源自中国，且是中国人的传统之一。作为娱乐，不少朋友少时可能都有过用纸张折飞机和小船经历。用折纸作品祭奠故人也是中国一个重要的传统。但折纸在日本得到了更加广泛的发展。因为吉泽章等的努力，折纸已然成为日本艺术，并被日本视为其国粹之一。折纸的英文词汇“Origami”也是由日文的“折り紙”音译而来。从后文可见，有着深厚折纸“群众基础”的日本，对折纸数学的研究也处于领先地位。

吉泽章出生于日本的栃木县，从 1938 年起开始从事折纸的研究与创作，发表了一系列折纸作品。特别是 1955 年，他在荷兰阿姆斯特丹举办了个人折纸展，在西方引起了很大的震动。吉泽章一生创造了 5 万多件富有创

图 79 吉泽章和他的折纸作品

[5] 第一版：*Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt* (ed. P. Lenard), Leipzig: Barth, 1894。英译：*The principles of mechanics presented in a new form* (trans. D. E. Jones and J. J. Walleye), London: Macmillan, 1899。

[6] *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, I. Grattan-Guinness 著，Elsevier B. V.，2005。

意与趣味的作品。他不但发明了新的折纸法——湿折法（将纸张变潮后再折），还与美国人山姆•兰德列特（Sam Randlett）发明了图解折纸的术语——吉泽章-兰德列特系统，这使得折纸有了自己统一的语言，因而令折纸艺术能够更好地传播。

现代折纸也已经变为一门科学，并且获得很广泛的应用：从日常生活可用到的可折叠不锈钢袋到太空中人造卫星大型太阳能电池板阵列。如同许多学问一样，数学是使折纸从一门游戏成为科学而获得应用的原理。我们介绍这个涂鸦即是因其背后有趣的折纸数学。

人们很早就已经注意到了折纸与几何的密切联系。最明显的是，通过不断将纸张对折，可以将纸张的一边 2 等分，4 等分，也可以从普通的长方形纸张得到正方形等。进一步利用几何原理，人们可以将正方形的一边等分为 3、5、7、9 等等份；还可以得到正三角形、正五边形、正六边形，甚至黄金矩形和白银矩形（长宽比分别为 $(1+\sqrt{5})/2$ 和 $1+\sqrt{2}$）等。

现已退休的日本生物学家芳贺和夫（Kazuo Haga）就是一位折纸数学方面著名的专家。他曾常在做实验的间隙，琢磨折纸。他得到了被人称为芳贺第一、第二和第三定理的折纸定理：用简单的折叠，给出了各种比例。芳贺和夫还与人合作，于 2008 年出版了一本很适合中学数学教学辅助的书《折纸学——通过折纸的数学探索》（*Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding*），介绍了这些定理及其他相关结果。这本书没有一个折纸实物图，集中关注于几何对象。

作为例子，我们用图 80 来解释芳贺第二定理：设有正方形纸张 $ABCD$，先将纸张对折，分别得到 AD、BC 的中点 E、F。将三角形 $\triangle EDC$ 沿 CE 将 D 点折到正方形内部的 D' 点。再沿 ED' 折，得到 AB 与 ED' 之延长线的交点 H。则 $HB=\frac{1}{3}AB$。这个折纸方法还产生了其它很多有趣的结论，如设 G 为 CD' 与 EF 的交点，则三角形 $\triangle ED'G$ 有边长比为 3:4:5。

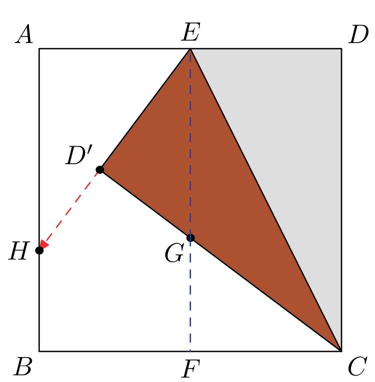

图 80 芳贺第二定理

类似于几何作图规则，折纸有自己的公理系统：

1. 给定两点 p_1 和 p_2，有且仅有一条折痕同时过这两点；
2. 给定两点 p_1 和 p_2，有且仅有一种方法把 p_1 折到 p_2 上；
3. 给定两直线 l_1 和 l_2，可以把 l_1 折到 l_2 上；
4. 给定一点 p 和一条直线 l，有且仅有一种方法过 p 折出 l 的垂线；
5. 给定两点 p_1, p_2 和一条直线 l，可以沿过 p_2 的直线将 p_1 折到 l 上；
6. 给定两点 p_1 和 p_2 以及两直线 l_1 和 l_2，可以一次将 p_1、p_2 分别折到 l_1、l_2 上；
7. 给定一点 p 和两直线 l_1 和 l_2，可以沿着 l_2 的垂线将 p 折到 l_1 上。

这些公理最早由雅克•贾斯汀（Jacques Justin）在 1989 年得到，后来被重新发现：前六条公理由藤田文章（Humiaki Huzita）在 1991 年提出，第七条公理由羽鸟公士郎（Koshiro Hatori）在 2001 年发现。罗伯特•朗（Robert Lang）也发现了第七条公理，并证明这七个公理是完备的。因此这个公理系统被称为：藤田－羽鸟公理或藤田－贾斯汀公理。

折纸公理中的操作很容易直观理解。比如，取一张正方形的纸片（如设为 $ABCD$），沿对角线（BD）将它对折，折成等腰直角三角形的操作就可以用来理解公理 1（过 B 与 D 只有一条折痕 BD）、公理 2（只有一种方法将 A 点折到 C 点）和公理 3（可以将直线 AB 折到 BC 上）等。

折纸公理也可以用数学的语言来解释。比如，公理 2 相当于找由两点 p_1 与 p_2 确定的线段的中垂线。也很自然地可将折纸与尺规作图做比较。前 5 条公理的操作一般最多有两种做法，在数学上相当于最多求解二次方程，与尺规作图的能力相当。例如，在公理 3 中，当两条直线平行时，自然只有一种作法；当两条直线相交，则相当于求角平分线，分别通过两对对顶角做角平分线可以得到两种作法。又如，公理 5 中的做法相当于求一条直线与圆的交点，这需要求解二次方程，一般有两个解。

但公理 6 中的折纸一般有三种方法，比尺规作图要强。它在数学上等价于求一条直线与两抛物线相切，涉及三次方程的求解。这样诸如三等分角、倍立方等本质为三次方程求解的经典尺规作图不能问题就可以用折纸来解决。图 81 所示为如何用折纸解决倍立方问题的例子，从中可以看到公理 6 的应用：设有正方形纸张 $ABCD$，（如通过芳贺第二定理折纸法）先得到 AD、BC 的三等分点 E、G 和 F、H。根据折纸公理 6，可以将点 B、F 分别折到 AD、GH 上成为 B' 和 F' 点。可以证明 $DB'/B'A=\sqrt[3]{2}$。

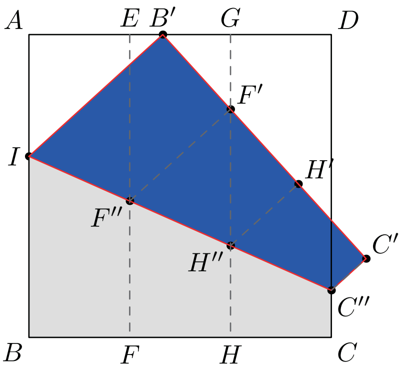

图 81 折纸求解倍立方问题

关于折纸数学，还有其它如折痕的研究等诸多方面，我们就不涉及了。有兴趣的读者可以参考许多著作以及专家罗伯特·朗的演讲 http://www.ted.com/talks/robert_lang_folds_way_new_origami.html 及其折纸主题网站 http://www.langorigami.com。实际上，纪念吉泽章的涂鸦折纸就是朗制作的，在涂鸦徽标的说明文档里（http://www.google.com/doodles/akira-yoshizawas-101st-birthday），朗除了介绍吉泽章，还提供了得到相关折纸作品的方法。

21 海亚姆诞辰 964 周年

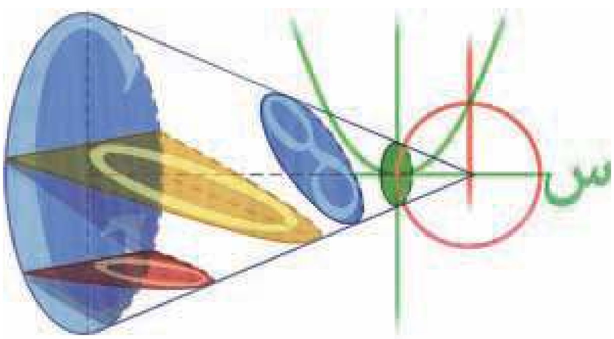

图 82 海亚姆诞辰 964 周年纪念（2012 年 5 月 18 日，阿联酋、巴林、阿尔及利亚、埃及、伊拉克、约旦、科威特、黎巴嫩、利比亚、摩洛哥、阿曼、巴勒斯坦、突尼斯、卡塔尔和沙特阿拉伯）

2012 年 5 月 18 日，谷歌在许多中东和北非国家的谷歌首页纪念古波斯诗人、数学家、天文学家和哲学家欧玛尔·海亚姆（Omar Khayyám，又译莪默·伽亚谟 [郭沫若用译名] 或峨默 [金庸用译名]，1048 年 5 月 18 日-1131 年 12 月 4 日）诞辰 964 周年。

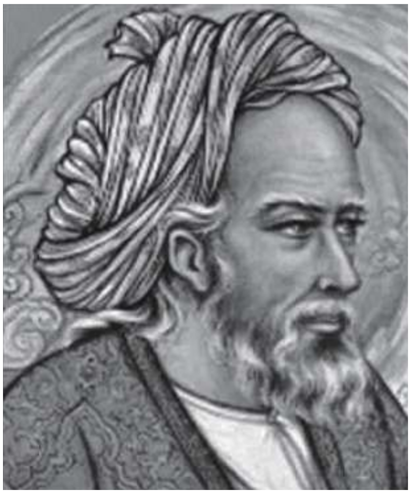

图 83 海亚姆

海亚姆出生于今伊朗东北部霍拉桑（Khorrasan）省的内沙布尔（Neyshabur 或 Nishapur）。当时的伊朗被突厥人建立的塞尔柱帝国统治。海亚姆生活的时代，内沙布尔是重要的文化中心，世界上最大的城市之一。它也是古丝绸之路上的一个城市，至今仍有古代旅馆留存下来。历史上，内沙布尔也是一座充满悲伤的城市。1221 年，成吉思汗的蒙古军队西侵时，曾对内沙布尔进行屠城杀戮，相传死亡人数约 170 万人。

纪念海亚姆的谷歌涂鸦最右边的阿拉伯字符（或说波斯 - 伊朗字符）س[7] 用意就是揭示被纪念者所在地。伊朗人

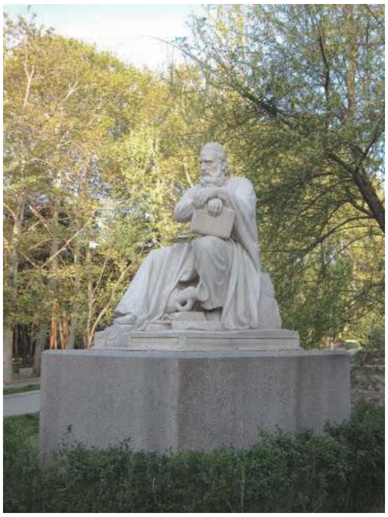

图 84 西班牙马德里康普斯顿大学里的海亚姆雕像

[7] 该字符按理应该用来显示“Google”商标中的字母“e”，但 س 对应的英文字母为“s”。有可能是谷歌失误，因为表示“e”的阿拉伯字符 ی 与 س 相似。也有可能谷歌设计者认为字母“e”已经得到表达，此字符仅是增加“波斯风味”。

图 85　电影《回到未来》(1985）中的情景，女主角所抱的书为 1937 年美国纽约出版的一本费兹哲罗译《鲁拜集》(装在书匣中，书匣表面图案如图中右下部所叠加的图片）

图 86 杜拉克为《鲁拜集》第 12 首（实为费兹哲罗英译第 1 版第 11 首）配的插画

对欧玛尔很推崇，他们把 5 月 18 日定为海亚姆日，每一年的这一天都会在内沙布尔举行纪念活动。

2011 年的 5 月 18 日，远在西班牙马德里康普斯顿大学（Complutense University of Madrid，西班牙文 Universidad Complutense de Madrid）在校园里树立了一座海亚姆的雕像来纪念他。另外，在伊朗的首都德黑兰和罗马尼亚的首都布加勒斯特也都有他的雕像。

海亚姆主要以其诗歌倾倒众人。他善写一种称为鲁拜（Rubai）的四行诗。鲁拜类似于中国的绝句，一首四行，第一、第二和第四行押韵，第三行大抵不押韵。

海亚姆生活在诗的时代。此前在他的家乡霍拉桑省有史称波斯文学之父的诗人鲁达基（Rudaki, Abu Abdollah Ja1far, 850-941）以及著名诗人菲尔多西（Ferdowsi, 约 940-1020）。菲尔多西的代表作《列王纪》是一部波斯民族的英雄史诗巨著。

海亚姆的诗歌在几百年里几乎被人遗忘。直到 1859 年英国的爱德华•费兹哲罗（Edward FitzGerald, 1809-1883）将他的诗从波斯文翻译成英文时才引起极大的关注，现在这个英译已经成为了英国文学的经典。董桥在《画＜鲁拜集＞的人》中赞道：“这部书饮誉西方文坛一百五十多年，靠的真是菲茨杰罗[8]的英文译本了。都说译文是借句发挥不是依句翻译，海亚姆笔端飘下一片落叶，菲茨杰罗的稿纸上瞬间是满山的秋色。”

此后便有几乎数不清的译本出现。单说中译就有几十种之多。郭沫若、胡适、闻一多、徐志摩和朱湘等名家都翻译过，张鸿年还从波斯文直接翻译。特别是译者黄克孙（1928-），他是一位颇有成就的美籍华人物理学家，麻省理工学院的教授，但在中文世界，他最有名的或许还是他用七言诗的形式将费兹哲罗的英译《鲁拜集》译成中文。

图 87 1967 年迪拜发行的纪念海亚姆的邮票

张承志在《波斯的礼物》里写到：“在他们（老读书人）看来，这一西域怪杰，完全可以与整个的波斯文明相匹敌。确实，这位风流诗人的绝妙‘鲁拜’，引得中国人译者如蜂，兴而不衰。……这些胡姬当炉的妙歌，它挑逗了中国文人的渴望和趣味，教导了他们个性解放的极致。文人们出于惊喜，争相一译，寄托自由的悲愿。……——于是译笔缤纷，华章比美。”

绿叶衬牡丹，好诗少不了名家的配图。著名的有法国画家杜拉克（Edmund Dulac, 1882-1953）所作的彩色插画。

[8] 即费兹哲罗。