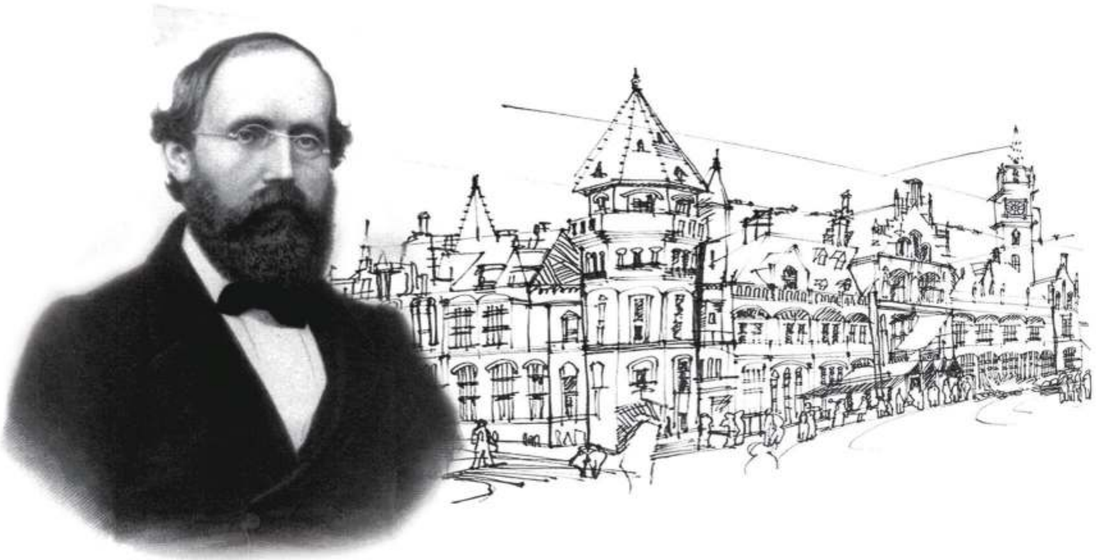


卢昌海《黎曼猜想漫谈》书评

扶磊

勿容置疑，黎曼猜想是当今数学中最重要的未解决的问题。不同于数论中其它猜想（例如费马大定理、哥德巴赫猜想等），将黎曼猜想和黎曼的思想叙述清楚至少需要用到比较高等的复变函数论的知识，因此已有的关于黎曼猜想的科普读物，要么太肤浅而不能将问题说清楚，要么用了太多的艰深的数学工具而晦涩难懂。但卢昌海的《黎曼猜想漫谈》以轻松愉快的语言清晰地介绍了黎曼猜想、黎曼在数论方面的工作和后人在黎曼的影响下所做的后继工作。一个学过复变函数论的大学生应该能看懂这本书，从而能够欣赏黎曼工作的深度和创造性。

黎曼发表的文章不多，但几乎每篇文章都是划时代的甚至是超越时代的绝世佳作，这些文章开辟的新的数学领域包括：复变函数论、黎曼几何、代数几何、解析数论等等。黎曼在1859年发表了他唯一的一篇数论方面的论文《小于给定值的素数的个数》，用复变函数 $\zeta(s)$ 研究了素数的分布。黎曼 ζ- 函数是用无穷级数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{1}$$

定义的，这个函数欧拉也研究过，并注意到

$$\zeta(s)=\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}, \tag{2}$$

这里乘积是对所有素数 p 取的。欧拉只考虑当 s 是实数时 $\zeta(s)$ 的性质，而黎曼是历史上第一个将 $\zeta(s)$ 当作复变函数，并将素数的分布与 $\zeta(s)$ 的零点分布联系起来。上面 $\zeta(s)$ 的表达式的无穷级数和无穷乘积只是当复数 s 的实部 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时才收敛。黎曼证明了由这个无穷级数 (1) 和无穷乘积 (2) 定义的函数可以解析延拓得到定义在整个复平面上的亚纯函数。这个亚纯函数就是黎曼 ζ- 函数。黎曼证明了 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 处有个单极点，在复平面其它地方解析，并满足函数方程

$$\zeta(s)=2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

当 s 是负的偶数时，我们有 $\sin(\pi s/2)=0$，从函数方程可以推出 $\zeta(s)=0$，这些零点称为 $\zeta(s)$ 的平凡零点。$\zeta(s)$ 的其它零点称为非平凡零点。黎曼考虑辅助函数

$$\xi(s)=\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s).$$

函数 $\xi(s)$ 在复平面上处处解析，即是个整函数，满足函数方程

$$\xi(s)=\xi(1-s),$$

最重要的：$\xi(s)$ 的零点正好是 $\zeta(s)$ 的非平凡零点。黎曼指出

$$\xi(s)=\xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right), \tag{3}$$

这里乘积是对 $\xi(s)$ 的所有零点 ρ 取的。如果 $\xi(s)$ 是个多项式，这个乘积公式是明显的，但事实上 $\xi(s)$ 是个有无穷多个零点的整函数。黎曼给出了这个公式成立的一些理由，严格的证明是 1893 年阿达玛（Jacques Hadamard）给出的。比较两个乘积公式 (2) 和 (3) 并巧妙运用傅里叶分析中的反演公式，黎曼将素数 p 的分布和 $\zeta(s)$ 非平凡零点 ρ 的分布联系起来。更确切地，对任何 $x>1$，黎曼得到等式

$$\begin{aligned}J(x)=\mathrm{Li}(x)-&\sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}\left(\mathrm{Li}(x^{\rho})+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})\right)\\&-\log 2+\int_x^{\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\log t},\end{aligned} \tag{4}$$

这里 $\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{dt}{\log t}$，函数 $J(x)$ 在 $x=0$ 处取值 0，每过一个素数 p 处跳跃 1，每过一个素数平方 p^2 处跳跃 1/2，每过一个素数立方 p^3 处跳跃 1/3，……。记不超过 x 的素数的个数为 $\pi(x)$，则有

$$J(x)=\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}})+\cdots+\frac{1}{n}\pi(x^{\frac{1}{n}})+\cdots.$$

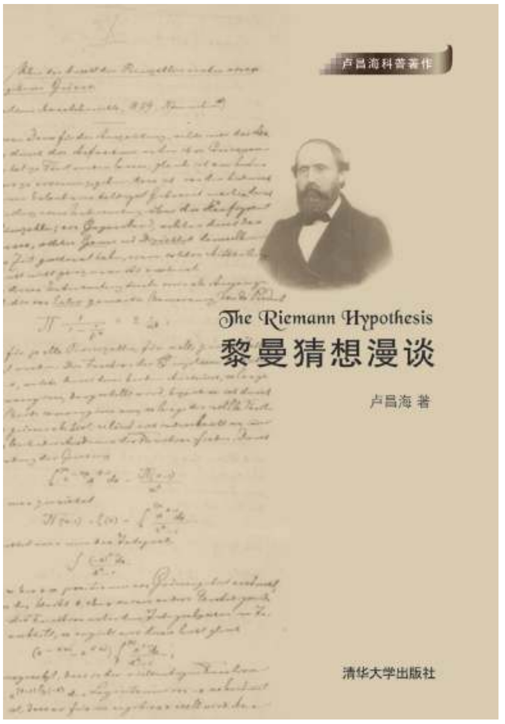
可以证明

$$\pi(x)=J(x)-\frac{1}{2}J(x^{\frac{1}{2}})-\frac{1}{3}J(x^{\frac{1}{3}})+\cdots+\frac{\mu(n)}{n}J(x^{\frac{1}{n}})+\cdots, \tag{5}$$

这里的 $\mu(n)$ 是 Möbius 函数

$$\mu(n)=\begin{cases}0 & \text{如果 } n \text{ 被素数平方整除，}\\ 1 & \text{如果 } n \text{ 是偶数个不同素数乘积，}\\ -1 & \text{如果 } n \text{ 是奇数个不同素数乘积 .}\end{cases}$$

这些公式是黎曼文章的主要结果，严格证明是 1895 年冯•曼戈尔特（Hans von Mangoldt）给出。从上面的公式 (4) 和 (5)，我们可以用 $\zeta(s)$ 的非平凡零点 ρ 去表达 $\pi(x)$:



$$\begin{aligned}&\pi(x)-\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}})\\&=-\sum_{n=1}^{N}\sum_{\rho}\frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{\frac{\rho}{n}})+\text{（更小的项）}.\end{aligned} \tag{6}$$

但如果对 $\zeta(s)$ 的非平凡零点的分布没有足够多的信息，还是不能证明

$$\pi(x)\sim\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}}).$$

特别地，上面的公式 (6) 还不足以说明素数定理成立：

$$\pi(x)\sim\mathrm{Li}(x).$$

1896 年阿达玛和查尔斯•瓦利•普桑（Charles de La Vallée Poussin）得到了证明素数定理所需要的 $\zeta(s)$ 的非平凡零点分布的信息，他们证明了 $\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上没有任何零点，并在此基础上结合冯•曼戈尔特的公式证明了素数定理。黎曼的著名猜想说 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点都落在复平面的直线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上。如果这个猜想成立，则有

$$\pi(x)-\mathrm{Li}(x)=O(x^{\frac{1}{2}}\log x).$$

在黎曼之后的很长一段时间里，人们怀疑黎曼猜想