前排从左至右：林亚南，刘建亚，张智民，付晓青；后排从左至右：张英伯，蔡天新，邓明立，顾沛，罗懋康，汤涛，励建书，游志平（刘青阳 摄）

主　办　香港 Global Science Press
沙田新城市中央广场第一座 1521 室

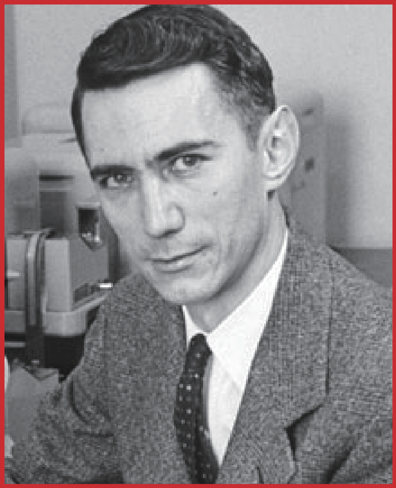
《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者

《数学文化》欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com

本刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本刊淘宝网：http://mysanco.taobao.com/
本期出版时间：2013年5月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金的支持

Contents | 目录



张益唐和北大数学 78 级

谨以此文纪念陈景润诞辰 80 周年；他影响了那个难忘的时代

汤 涛

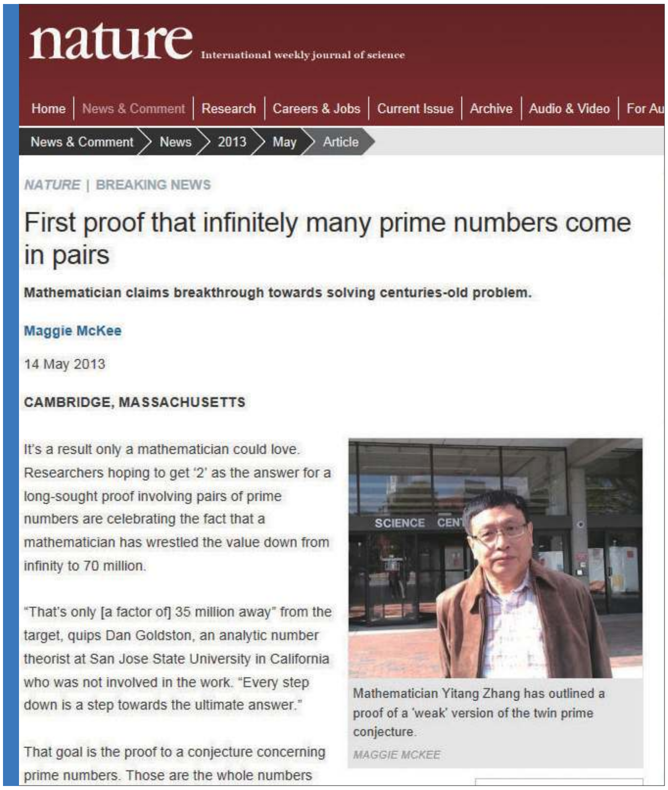
2013 年是北京大学数学系成立 100 周年。百年大庆，作为校友，总觉得应该写点什么作为纪念。

1904 年，清政府颁布的《钦定学堂章程》规定“高等算学”隶属格致科（现在称理科），并且规定了算学门的课程。辛亥革命后，京师大学堂于 1912 年 5 月 1 日改名为国立北京大学。同年公布的“民国元年所订之大学学制及其学科”中格致科改名为理科，其中包括数学门。1913 年秋，北京大学数学门招收新生，标志着中国现代第一个大学数学系正式开始教学活动。北大数学的早期学生张国焘因为后期的政治生涯为数学系增添了些许另类传奇。

北大数学的一百年培养了大量的人才，先后培养出 6000 多名本科生，1000 多名硕士、博士毕业生，一大批优秀的数学家和其他方面的专家。他们分布在各行业，许多人成绩斐然，得到了社会各界的高度评价。其中有 30 余位毕业生被选为中国科学院院士。著名数学家江泽涵、许宝騄、段学复、程民德等都是数学系重量级的前辈，获得国家最高科技奖的吴文俊院士、王选院士也任教或毕业于北大数学系。特别值得一提的是，由哈佛大学和麻省理工学院联合举办的 2013 年度“数学发展前沿”（Current Developments in Mathematics）研讨会上，六位主旨发言的数学家中北大数学毕业生就占了三位：2000 级的恽之玮和张伟、1978 级的张益唐。另外三位包括菲尔兹奖得主、著名数学家爱德华•威滕（Edward Witten）。

北大数学的辉煌历史，不是我这样一个晚辈敢写的，也不可能写得好。但是为了表达对院庆的祝贺，我就写一个跟我稍稍沾点边的文革后北大数学第一届学生的故事吧。

张益唐与孪生素数


nature International weekly journal of science

Home | News & Comment | Research | Careers & Jobs | Current Issue | Archive | Audio & Video | For Au

News & Comment > News > 2013 > May > Article

NATURE | BREAKING NEWS

First proof that infinitely many prime numbers come in pairs

Mathematician claims breakthrough towards solving centuries-old problem.

Maggie McKee

14 May 2013

CAMBRIDGE, MASSACHUSETTS

It's a result only a mathematician could love. Researchers hoping to get '2' as the answer for a long-sought proof involving pairs of prime numbers are celebrating the fact that a mathematician has wrestled the value down from infinity to 70 million.

"That's only [a factor of] 35 million away" from the target, quips Dan Goldston, an analytic number theorist at San Jose State University in California who was not involved in the work. "Every step down is a step towards the ultimate answer."

That goal is the proof to a conjecture concerning prime numbers. Those are the whole numbers

Mathematician Yitang Zhang has outlined a proof of a 'weak' version of the twin prime conjecture.

MAGGIE MCKEE

《自然》5 月 14 日的报道

北大数学系张益唐沉默 20 多年，几天前突然横空出世，为世纪难题孪生素数猜想的解决做出了突破性的工作。为此，顶级科学杂志《自然》在“突破性新闻”栏目里，报道了张益唐证明了存在无穷多个差值小于 7 千万的素数对，从而在解决孪生素数猜想这一百年数论难题的道路上前进了一大步。

为了认识孪生素数猜想，让我们先做一些简单铺垫。先谈谈素数。素数是数学中美妙的音乐，美丽的女神，有着很多让人捉摸不透的秘密。传说大数学家欧拉说过：“一直以来，数学家总是在孜孜不倦地寻找素数规律，但是很难成功。我们可以把素数看作人类思维无法渗透的奥秘。”

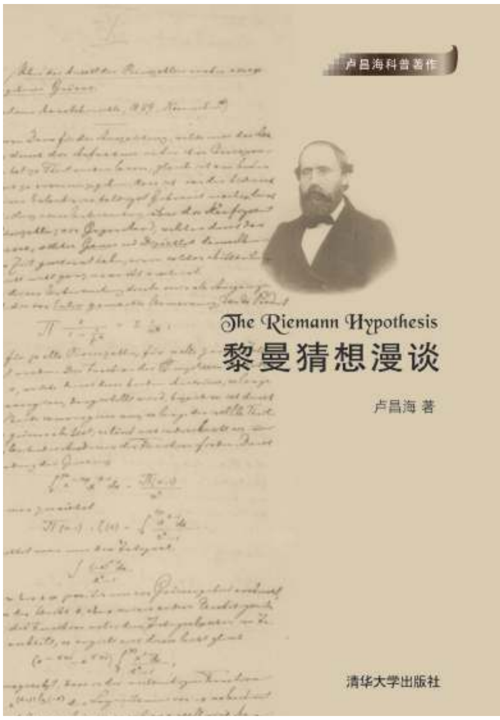
远在中古时代，就产生了自然数的概念，印度人对数学最大的贡献之一就是引进了符号“1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0”来计数。正是由于有了数的合理记法，对于数的研究才能够代代相传。比零大的正整数统称为自然数，它们共有三类：即 1（民间常说的大佬，无人敢与其争锋）；素数（素数也叫质数，只能被 1 和自身整除的数，比如 5, 7, 11, 19 等）；合数（可以被 1 和自身以外的某个自然数整除的数，如 9, 16, 20）。

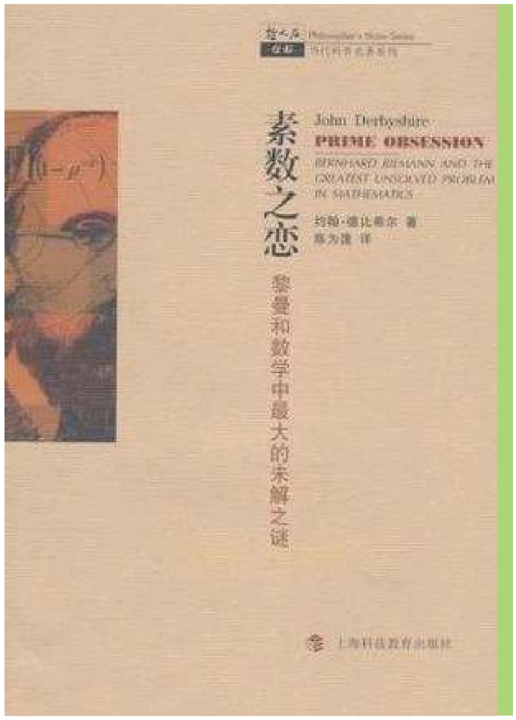
有了自然数的概念以后，很快就有了一个古老的数学分支：数论。它是纯粹数学的分支之一，主要研究自然数的性质。数论在很长一段时间里被称为算术，直到 20 世纪初才开始使用数论的名称。数论的早期铺垫有三大内容：欧几里得证明素数有无穷多个；寻找素数的过筛方法以及欧几里得求最大公约数的辗转相除法；公元 420 至 589 年（中国南北朝时期）的孙子定理。

欧几里得用漂亮的反证法证明了素数的个数有无穷多个。记得我在 80 年代初选修丁石孙的初等数论课时，被他完美的讲课风格和欧几里得伟大的证明所折服，在当时的老二教的上课时光现在还历历在目。

素数在自然数中的分布很奇妙；从公元前三世纪开始至今，吸引了众多数学家的不懈努力。公元前三世纪古希腊数学家、哲学家埃拉托色尼（Eratosthenes, 公元前 275 - 前 193）为了研究这个问题，提出了一个叫“过筛”的方法（the Sieve of Eratosthenes）简称埃氏筛法，造出了世界上第一张素数表，就是按照素数大小排成的表。比方说把一张超大的纸放在沙滩上，然后把自然数按其大小一个一个写上去；然后按下列法则把合数挖掉：

（1）先把 1 删除（因为 1 不是质数）
（2）把 2 留下（最小的偶数质数），然后把 2 的倍数删去
（3）把 3 留下，然后把 3 的倍数删去
（4）把 5 留下，然后把 5 的倍数删去
（5）同理继续进行下去，直到把所有数要么留下，要么删除





这样如果纸上最大的数是 N，则上述方法可以产生 N 以内素数的分布表。

从这个古典的方法中人们可以观察到，素数的分布随着 N 的变大，变得越来越稀疏。比如 1 到 10 之间有 2, 3, 5, 7 四个素数；100 之内有 25 个素数，1000 之内有 168 个素数，100 万之内有 78498 个素数。大量数值试验显示，当 N 变得很大时，在 1 到 N 之间素数的个数和 N 的比值变得很小。那么严格的数学刻画是什么呢？

用 $\pi(N)$ 表示不大于自然数 N 的素数的个数，如 $\pi(2)=1$，$\pi(3)=2$，$\pi(10)=4$。法国大数学家勒让德（Legendre, 1752-1833）于 1808 年建议当 N 非常大时：

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\ln N + B},$$

其中 $B=-1.08366$ 被称为勒让德常数。可惜这个公式在相应的级数展开式中仅第一项正确。1792 年，当数学王子高斯刚满 15 岁时，就猜测当 N 非常大时，$\pi(N)$ 和 $N/\ln(N)$ 差不多大；更确切地说，当 N 充分大时，$\pi(N)$ 和 $N/\ln(N)$ 之比接近于 1。用极限的语言来说就是

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\pi(N)}{\frac{N}{\ln(N)}} = 1.$$

这个猜想被叫做素数定理。1850 年，俄罗斯数学先驱切比雪夫证明：存在两个正数 a 和 b，使不等式

$$a \le \frac{\pi(N)}{\frac{N}{\ln(N)}} \le b$$

成立，其中 $N \ge 2$。这为证明高斯的素数定理迈进了一大步；并且切比雪夫在证明中用到了微积分。

革命性的变化发生在 1859 年。1859 年 8 月，时年 32 岁的数学家黎曼 (G. F. B. Riemann) 向柏林科学院提交了一篇 8 页纸的论文，题为“论不超过一个给定值的素数的个数”。在这篇论文中，他把素数个数和所谓的 ζ 函数建立了联系，这一联系推动了解析数论的发展；文章中提出的黎曼猜想给数学家们带来了比素数分布更大的挑战。时至

今日，在经历了150多年的认真研究和极力探索后，这个猜想仍然悬而未决。关于黎曼猜想的最权威的科普文章，可以见科普高手卢昌海的《黎曼猜想漫谈》(见本期的书评)。

卢昌海的大作从2010年底在《数学文化》上连载。科学院的王元院士看后非常欣赏。有幸和元老在海淀区知春路上的一个西餐馆吃过一顿饭；其间他对卢昌海的文笔以及卢对黎曼猜想的深刻理解赞不绝口："一个学物理的能把一个这么艰深的数学问题写得如此透彻，真是太不容易了。"之后卢昌海要把文章集结成书时，叫我代请元老写序。一周后，我收到老院士亲笔写的10页纸的手稿。

美国作家约翰•德比希尔（John Derbyshire）根据黎曼猜想的提出和可能的应用，写出了畅销书《素数之恋——伯恩哈德•黎曼和数学中最大的未解之谜》。在这本《素数之恋》中，作者用明晰的笔法，对一个史诗般的数学之谜作了迷人而流畅的叙述，再次展示了素数的魅力。

虽然黎曼没有给出关于$\pi(N)$的具体结果，但他为在黑暗里奋斗的素数分布研究指明了方向。正是沿着这个方向，1896年，法国数学家阿达玛（J. S. Hadamard）和比利时数学家普桑（Charles Jean de la Vallée Poussin）几乎同时独立地证明了素数定理。差不多半个多世纪后的1949年，塞尔伯格（Atle Selberg）和爱多士（Paul Erdös）给出了素数定理的初等证明。前者因此工作以及对筛法的改进获得了1950年的菲尔兹奖。

现在回到孪生素数。孪生素数指差为2的素数对。前几对孪生素数分别是（3, 5），（5, 7），（11, 13），（17, 19），（29, 31），（41, 43），（59, 61）等。一般来说，如果p和$p+2$都是素数，则（$p, p+2$）就叫做孪生素数。100以内有8对孪生素数；501到600间只有（521, 523）和（569, 571）两对。更大的孪生素数还有，如（5971847, 5971849）。不过，可以观察到孪生素数的分布也是极不均匀的，并且也是越来越稀疏，与素数的分布相比，还要稀疏得多。

这样问题就来了：比如孪生素数的分布规律是什么？共有多少对孪生素数？或者说有没有一对最大的孪生素数？

于是人们又开始猜想了：有无数对孪生素数。但没有人确切地知道究竟有多少对。到2009年8月6日，已知最大的孪生素数为$2003663613\cdot 2^{195000}\pm 1$，这两个数都有10万多位。

上世纪最伟大的数学家大卫•希尔伯特（David Hilbert）在1900年国际数学家大会上提出了著名的23个重要数学难题和猜想，其中孪生素数问题是希尔伯特问题的第8个的一部分，可以这样描述：存在无穷多个素数p，使得p与$p+2$同为素数；而素数对（$p, p+2$）称为孪生素数。数学家们相信这个猜想是成立的。1849年，法国数学家波利尼亚克（Alphonse de Polignac, 1817-1890）提出了更一般的猜想：对所有自然数k，存在无穷多个素数对（$p, p+2k$）；其中$k=1$的情况就是孪生素数猜想。

2013年4月，张益唐向《数学年刊》（*Annals of Mathematics*）杂志提交了题为"素数间的有界距离"（*Bounded gaps between primes*）的文章。《数学年刊》是研