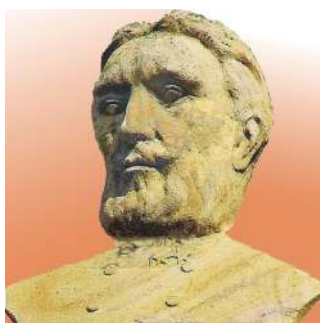




## 鲍耶与非欧几何

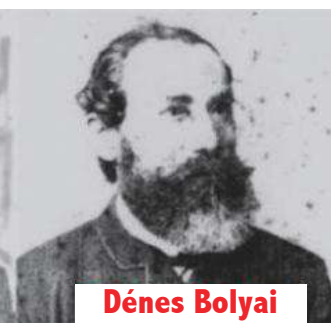
张小平 刺克



János Bolyai



Computer



Dénes Bolyai

1	
2	3
	4

运气不佳的雅诺什·鲍耶 (János Bolyai, 在英文中有时也被称为 John Bolyai, 即约翰·鲍耶——笔者注) 数百年来给人们的印象一直是这副样子 (图片 1)。不过在美国数学会会刊 *Notices* 2011 年的一篇文章《鲍耶的真实面目》(*Real Face of János Bolyai*) 中, 通过计算机结合目前留下的唯一一尊雅诺什·鲍耶的雕像 (图片 2) 以及他的儿子丹尼斯·鲍耶 (Dénes Bolyai) 的照片, 生成了一幅全新的鲍耶图像 (图片 3)。画家弗朗西斯·马科斯 (Ferenc Márkos) 在此基础上于 2012 年重新创作了数学家雅诺什·鲍耶的油画 (图片 4), 目前这幅油画已经成为维基百科中雅诺什·鲍耶的“标准像”。不过所有这些雕像、照片、油画仍然和真正的鲍耶相去甚远。



提起匈牙利数学家, 您可能最先想到的是数学史上最多产的保罗·爱多士 (Paul Erdős); 提起非欧几何, 您可能最先想到的是罗巴切夫斯基 (Nikolas Lobachevsky) 和黎曼 (Georg Riemann)。那如果取交集呢? 这不是一个空集, 但却只有一个元素, 就是本文的主人公——雅诺什·鲍耶 (János Bolyai), 这位匈牙利数学家和罗巴切夫斯基几乎同时独立地创建了非欧几何中的双曲几何。对于非欧几何这个挑战经典的成果, 它的产生必定不会是一帆风顺, 鲍耶也遇到了种种非议, 甚至还有父亲的反对, 今天就让我们带您走近这位数学家, 看看他的生平和非欧几何在他手中诞生的过程。

## 欧氏几何

所谓非欧几何就是非欧几里得几何的简称，要了解非欧几何，我们还得从欧几里得几何，即欧氏几何，谈起。

欧氏几何是欧几里得于公元前 3 世纪创立的。欧几里得的《几何原本》是最早用公理化方法建立演绎数学体系的典范，是世界上流传最广、影响最大的一部数学经典之作。他精心选择了五个公理和五个公设，经过严密地逻辑推理，导出了欧氏几何的全部理论。这个理论所确立的公理化思想是数学的灵魂。所谓公理或公设，指的是不需要证明而加以承认的命题，它具有“不证自明”的特征。

如果说欧氏几何是一块美玉，那么这块美玉上有一处微瑕，就是第五公设。这条公设是指：

在同一平面内，如果一条线段与两条直线相交，在某一侧的内角和小于两直角和，那么这两条直线在不断延伸后，会在内角和小于两直角和的一侧相交。

首先，数学家们认为这条公设表述得过于复杂，根本不具备“不证自明”的特征，而且《几何原本》直到第 29 个命题的证明中才用到它。于是，数学家们自然就想用一种新的思路去处理它。这首先就要解决一个问题，第五公设相对于其它的公设是否是一个独立的命题。如果是的话，就很简单了，只须用一个简明的等价命题去替代它。其次，数学家们也质疑它的独立性，总想利用其它几个公理和公设直接证明它，使它成为一个定理。就为这样一个看似简单的问题，数学家们竟然忙碌了两千多年，在证明它是否具有独立性方面没有取得任何实质性进展。不过在这个过程中，数学家们倒是发现了与第五公设等价的许多命题。其中最简明的一个是普罗克勒斯（Proclus, 410-485）提出的：

在同一平面内，过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行。

由于数学家们难以撼动《几何原本》的理论，一批哲学家和数学家对欧几里得的几何就表示出了绝对的信任。1736 年以后，从数学家克吕格尔（G. S. Kerügel）开始，就陆续有数学家和哲学家公开宣布，欧几里得几何的第五公设相对于其它公设是独立的，是不能被证明的。康德（Immanuel Kant）认为，欧几里得几何揭示的是“先天的、唯一的现实空间的概念”。哲学家黑格尔（G. W. F. Hegel）更加认为：欧几里得几何体系已经相当完备，不可能取得进一步的实质性进展了。

然而数学发展的历史总是让人无法捉摸。就在数学家和哲学家们忙于证明第五公设而一无所获时，有人用下面



罗巴切夫斯基（1792-1856）

的两个命题代替第五公设产生了不同于欧几里得理论的几何学，也就是非欧几何。

- (1) 在同一平面内，过直线外一点可以最少引两条直线与这条直线平行。
- (2) 在同一平面内，过直线外一点一条平行线也不能引。

用第二个命题代替第五公设，黎曼开创了椭圆几何（也称黎曼几何），而鲍耶和罗巴切夫斯基不约而同地想到了第一个命题，开创了双曲几何。

## 鲍耶的生平

鲍耶的父亲法卡什·鲍耶（Farkas Bolyai）是当地一位有名气的数学和物理教师，毕业于德国哥廷根大学，和“数学王子”高斯是同学。共同的志趣使法卡什·鲍耶和高斯两人成为好友，分别后经常有书信往来，共同研讨数学问题，其中第五公设问题成为他们之间经常交流的一个话题。他的理论思考始终离不开研究欧几里得的《几何原本》，虽然研究第五公设的奥秘花费了他大半生的心血，但最终也没有取得任何有价值的成果。但是，他在将欧氏几何的严密逻辑体系拓展到算术、代数和分析的理论上做出了有益的探索，这些工作还受到了高斯的称赞。

雅诺什·鲍耶于 1802 年 12 月 15 日出生于当时的匈牙利的柯罗日瓦尔（Kolozsvár），现在的罗马尼亚的克劳森堡（Cluj-Napoca）。他小时候，父亲在当地的加尔文





匈牙利分别于1960年与1975年发行的纪念鲍耶父子的邮票及他们的故居

主义学院（Calvinist College）教书；和当时的传统相似，父亲除了教数学外，还充当物理和化学老师。父亲希望自己的儿子成为一名数学家，并也沿着这个方向作出努力。同时，父亲认为光有一个智慧的大脑还不够，健康的身体发育应该是更重要的。所以小鲍耶小时候是德智体全面发展，这也为他成年后成为职业军人打下了良好的身体基础。

小鲍耶小时候就表现出了包括数学能力在内的全方位才能，整个一个小神童的形象：

他四岁时就可以分辨某些几何图形，就可以理解正弦函数，可以找出最知名的星座。五岁的时候他就有很强的阅读能力，并且这个能力几乎是自己独立开发的。他在学习语言和音乐方面表现了令人羡慕的天才。他七岁时开始拉小提琴，他几乎不费劲地就可以演奏一些很困难的曲目。

另一方面，小鲍耶生活在一个困难的家庭。父亲虽然在大学教书，但薪水微薄；虽然有一些兼职和外快，家庭的经济状况仍然很差。更糟糕的是，小鲍耶的母亲并非是一个称职的母亲，未能给他提供一个良好的家庭环境。

小鲍耶九岁以前基本上受的是私塾型的教育。父亲亲自教他数学，其它小学科目由当地最好的大学生家教。他九岁正式走进中学的校门。到13岁的时候，他已经掌握了分析力学、微积分等高等数学和力学科目；虽然父亲仍然是他的导师，这个时候他已经能够轻松地参与父亲任教的加尔文主义学院针对大四学生的专业课程。鲍耶尤其对欧几里得的几何学情有独钟，并且独立发现了一条重要定理：任何两个面积相等的多边形，将其中一个经过有限次分割，一定能够重新拼接成与另一个全等的多边形。

1818年，鲍耶16岁时，父亲写信给高斯，请他让自己这个天才的儿子住在他家并成为他的弟子。让父子两人非常失望的是高斯一口拒绝了。很难知道高斯拒绝的原因。否则小鲍耶能够在大师身边吸收科学营养，在哥廷根这个数学中心成长，可能对世界数学会有不一样的影响。

1817年6月，鲍耶中学毕业。当时的匈牙利和附近的维也纳大学还不能提供高质量的数学教育，老爸也很负担得起送儿子去国外更负盛名的大学去留学。经过痛苦地抉择，父子俩决定选择维也纳皇家工程学院的军事工程专业。鲍耶从1818年到1822年在皇家工程学院用了四年时间完成了七年的课程。他是一名出色的学生，从第二年开始学业就名列前茅。同时他也是学校的一名优秀运动员，并继续他的小提琴演奏，在维也纳参加业余表演。

鲍耶1823年参军成为工程兵的少尉，并被派驻在蒂米什瓦拉（Temesvár）的军事基地。在11年的军旅生涯里，他被誉为是奥匈帝国军队中最好的剑客和最优秀的舞蹈家。他既不抽烟也不喝酒，甚至连咖啡也不沾，时时保持着纯真和谦虚的品德，这在当时的军人里是很稀有的。令人惊讶的是，他还无师自通地掌握了九门外语，包括汉语和藏语！

## 鲍耶的数学研究

大约在1820年，在维也纳学习的鲍耶踏上了与老爸同样的路径，试图用一个可以从其它途径推出的公理来取代欧几里得的平行公设。开始，他也是从正面入手，试图用欧氏其它公设来证明平行公设，结果失败了。其父坚决反对儿子堕入在他看来是前途渺茫的深渊，1820年写信责