

淵沉而靜 流深而遠

——纪念中国解析数论先驱闵嗣鹤先生

(上)

张英伯 刘建亚

100年前的1913年3月8日，一个婴儿降生在北京城南的奉新会馆。这个孩子从少儿时代起就显露出与众不同的数学才华，在大学读书时，受到恩师的栽培与提携。之后到西南联大任教，担任陈省身和华罗庚的助手，1945年起赴欧、美深造，成为卓有建树的数学家。1948年回到祖国，继续研究工作并着力培养学生。七、八年后，正值壮年的他不得不停下他视之为生命的纯数学研究，转入应用数学领域。他积忧积劳成疾，仍然一如既往地工作着、努力着。1973年10月10日，前一天还在为数字地震勘探解决数学问题的他于清晨溘然长逝，享年六十岁。他是闵嗣鹤，字彦群；他为我国解析数论的发展做出了重大贡献。

100年后的今天，已经很少有人听说过这个名字；他走得太早，甚至没能看到数学研究重新回归社会的那一天。他们那一代数学家，已经随着逝去的时代渐行渐远。

我们写下这篇文章，只是为了纪念那一些不应该被忘怀的人们，为了还原那一段不应该被忘记的历史。

一、书香世家

闵家世居江西奉新，那是一个文化底蕴深厚的地方。奉新地界内的书院多达五十余所，这些书院始于南唐，终于清末；奉新因而教育发达，人才兴盛。几百年间，这个约占江西全省面积百分之一的小县，涌现出160多名进士，几百名举人。宋徽宗曾经专门赋诗，称赞胡氏兴办的华林书院：“一门三刺史，四代五尚书。他族未闻有，朕今只见胡。”这些官员在晚年回到故乡，故乡的人们世世代代延续着耕读传家的生活。

闵家的祖上亦颇有一些书生通过科举考试走上仕途，官至节度使、尚书、员外郎等职。闵嗣鹤的祖父闵荷生20岁时加入了求取功名的行列，经过乡试、会试、殿试的层层筛选，于光绪二年（1876）被录取为恩科三甲进士。几位考官对他试卷的批语是：“吐属不凡，气清笔健，语义精琢，简洁名贵”，这位24岁年轻人的命运从此改变。只是未曾料到，他走进去的是一座大厦将倾的晚清京城。闵荷生官及四品，曾任大名府知府，为人慷慨好义。在十九世纪末年，他响应康有为等人发起的戊戌维新运动，作为江西的两名代表之一，在“国会代表请愿书”上签字，“冒死奏闻”朝廷颁布议院法和选举法，召集国会实行“立宪”。他在1909年被选为江西咨议局议员，后入选中央咨议院，为江西六名议员之首。1912年，严复、闵荷生等七人在陈宝琛起草的《中华帝国宪法草案》上签名，出台了中国的第一部、但是从来未曾实施过的宪法。为了抵制日本攫取江西的南浔铁路，闵荷生曾倾囊投资，不料卷进了股东会复杂的纷争，一箱股票顷刻成为废纸，家道从此中落。闵荷生晚景萧索，隐居于北京宣武门外果子巷羊肉胡同的江西奉新会馆北馆。

闵嗣鹤的父亲闵持正体弱多病，在京师警察厅任职。母亲郑锦棠出身于江西上饶的一个进士之家，知书达理，对于子女的教育以至科学实业救国自有一番理解。虽然家境拮据，不免靠典当和亲友接济维持，但世代书香门第，对孩子的教育从来

不敢有丝毫松懈。

在闵嗣鹤四、五岁时，祖父刚过七十，尚有精力教他读书识字。小孙子也不辜负祖父的辛苦，由此渐通古籍，打下了深厚的文学功底。这个孩子眉清目秀，聪颖好学，恭顺知礼，天性仁厚，深得祖父疼爱；以至祖父不让他进小学读书，只在家中自学。而对于孙子的谦和、退让，祖父甚为嘉许。

奉新会馆南馆的甘仲陶夫妇没有子女，但是特别喜欢孩子，会馆里东西南北中馆的儿童都是他家常客。民国初年，已经终止了以四书五经为内容、以科举考试为目的的私塾；欧美的新式教育随着西学东渐而日益兴盛，各类学校蓬蓬勃勃地开办起来。有一天，闵嗣鹤在甘先生家里和上小学的孩子一起玩耍，为他们解答了一道算术难题。甘先生见后大为惊奇和赞赏，他是会馆的理事兼会计，长于计算，便断定这个孩子是闵家的希望。邻居当中的小学生们很快拜服了这位从未进过校门的小老师，常拿课本给闵嗣鹤看，所以他虽然身在校外，却能够了解学校的课程。有一位萧姓表兄在北京读书，见他自学勤奋，也时常相帮。就这样，他渐渐地爱上了数学。他每天一个人悄悄地来到甘先生家中，自己读课本，做习题。这一片小小的自学园地，既使他心无旁骛，又使他愉快自如。闵嗣鹤于1925年12岁时考入北京师范大学附属中学，进入了他的少年时代。

坐落在城南和平门外的北师大附中是当年北京城里最出色的中学，能够考进这个学校的学生或多或少有些功底。因为家境清贫，闵嗣鹤生活十分简朴，一年四季穿着母亲手制的布鞋。他的言谈举止颇有几分书卷气，加上古籍知识丰富，这个眉清目秀的少年被同学们戏称为“老夫子”。他喜欢素描，轻妙的小手画出禽鱼虫草，栩栩如生。他也喜欢排球，课后常和同学去操场玩上两局。他每天总是天傍黑才回家，到家就匆匆吃饭，紧接着誊写笔记，赶做繁多的作业。这样的日子过得紧张，生活也充

满趣味。他是师长们称赞的好学生，学校的各门课程他都学得很好，语文和英语尤其突出。但是在这三年当中，他的兴趣却逐渐地转向了数学。祖父依照自己读书的观点，殷切地希望他读中国文学。故而 1928 年升高中时，他考入了师大附中的文科班。

闵嗣鹤虽然孝顺，但骨子里是一个执着的少年，心中的爱好和追求不曾动摇。由

于学非所愿，他在高中一年级的暑假对祖父托称要上大学读书，同时考取了北京大学的文预科和北京师范大学的理预科。继而他以用度较少，离家较近为理由，选择了和平门外的北京师范大学。过了很久，当祖父发现他竟然专攻数学，十分不以为然，他对孙儿说：“你们也想懂数学，你看看中国的《周髀算经》是何等深奥！”

二、恩师挚友



闵嗣鹤在大学时代



傅种孙

1929 年，北师大预科生闵嗣鹤向他的数学老师傅种孙请教一个组合问题：“五对夫妇围坐一圆桌，要男女相间而夫妇不邻，问有多少种坐法？”因为问题不在老师的授课范围之内，傅先生过了几天才给他解答。但是通过这件事情，先生已经发觉闵嗣鹤用心精细。

傅种孙先生 1898 年生于江西高安。他身材瘦小，有几分文弱，而双目炯炯，语音洪亮，出口成章，气度不凡。其父为晚清秀才，教他不少古籍。12 岁时父亲去世，遗嘱万般困难也不能让傅种孙辍学。傅先生在南昌读中学时特别喜欢几何，写过一篇关于轨迹的论文。1916 年中学毕业，因

家贫无力升入大学，刚好公费读书的北京高等师范学校（北京师范大学的前身）在南昌招生，傅先生考取进入数学学部。他在大学期间十分活跃，曾任学校数理学会的会长，并在《数理杂志》上发表过多篇文章。1920 年傅先生毕业，留在北京高等师范学校附属中学（后来的师大附中）任教。一年之后，高等师范学校聘请他担任数学学部讲师。1923 年高等师范学校改名北京师范大学。1928 年冬，北京师范大学校方采纳学生意见，请傅种孙回到母校，担任数学系教授。从预科到大学，傅种孙为闵嗣鹤所在的班级任课五年，深知他是一个不可多得的数学人才。



赵慈庚

正当闵嗣鹤锐意进取之际，1930年祖母与父亲相继去世，家庭断了经济来源，到了难以为继的地步。八十三岁的祖父要赡养，三个妹妹要读书，眼看母亲以一介妇人之力，冒着风雨寒暑，奔走柴米油盐，尚未成年的闵嗣鹤心事沉重。仁孝之心不许他再像以往那样，毫不记挂家事。为了

节省开支，他每天走读，即便是冰天雪地，也要回家吃午饭，往返学校两次。闵嗣鹤在1931年升入北师大本科。为了缓解家庭的窘境，他从本科三年级开始在校内私立中学和北师大学生主办的群化预备学校兼课，作为家中刚刚成年的男子汉，和母亲一起挑起了六口之家的生活重担。

在上世纪三十年代，民国的大学颇为活跃。凡国家大事，学校存亡，校长更迭，都会在血气方刚的大学生中引起轩然大波。尤其对校长人选，学生间好恶不一，结派互相攻击。身在这喧哗浮躁的局势之中，闵嗣鹤选择了认真读书，科学报国。

同班二十余人，闵嗣鹤年龄最小，个头最矮，且面庞清秀，是同学们喜爱的小弟弟。这个小弟弟学业出众，聪颖过人，加之天性谦和，平实温良，大家都与他谈笑无忌。学习中有了疑问，便不约而同地找他求解。若是他正在研究的问题，三言两语便能点出要害，不是他正在研究的问题，也能给出满意的答复，所以全班人人佩服。甚至他读过的数学课本上对较难问题的批注和证明，都成为班里同学的借鉴。闵嗣鹤不仅读书用心，对周围事物亦独立思考，从不麻烦别人。他不像一般学生那样过多地依赖老师，也从不一议论老师的短长，对每位老师都很



北京师范大学数学系1935届毕业生合影
傅种孙（前排左二）、赵慈庚（后排左四）、闵嗣鹤（第三排左四）

尊重。他特别积极地参加系里的学术活动，那时北师大数学系发行《数学季刊》，他不仅努力撰稿，还主动组稿，直至排版校对、封面设计，他都格外用心。

闵嗣鹤读大二时，就在傅种孙、范会国老师的指导下撰写了《根式和代数数及代数函数》的论文，毕业前又完成了一篇 98 页的论文《函数方程式之解法和应用》，发表在《师大月刊》上，他在该文的致谢中写道：本篇之作，是由于傅先生“那个题目的刺激，所以首先当感谢傅先生”。同学们料定他是未来的教授，便给他取外号为“教授”。在大学的这几年里，他既要钻研自己酷爱的数学，又要兼顾工作赚钱养家，无暇料理生活。他常常凝神书案，或读书，或演算，直至深夜，致使家人不能理解。三个妹妹看到他这种样子，就借当时的一部电影片名戏称他为“科学怪人”。一次同学来家，指着满案狼藉的数学算草，开玩笑说：“有纸皆算草，无瓷不江西。”他最要好的同学，也是他终生的挚友赵慈庚写过一篇《数学系班史》，给每个同学做了一、两句话的评价，谈及闵嗣鹤时是这样说的：“超逸绝尘者，闵教授也，所识独多，名曰字典；见闻出众，号称博士。”

1935 年，闵嗣鹤毕业于北师大数学系。以他的家庭状况，无疑不能离京别去。但是在北京谋得一个合适的职位极其不易。这时，惜才如命、急公好义的傅先生挺身而出，为闵嗣鹤留京工作四处奔走。师大附中作为全国最好的中学之一，教师都从师大最优秀的毕业生中挑选。但年年遴选，未免人满为患，因而进入附中难而又难。傅先生亲自邀请师大教务长、数学系主任、附中教务主任一起去见校长，他动情地说：“从我教书以来，没见过闵嗣鹤这样的好学生。请求学校给他一条进修的道路，无论如何要把他留在附中。这也是鼓励学生读书，振作校风的机会。”傅先生还对校长说：“附中教务主任韩桂丛先生慨然让出四节课时，希望学校批准，请闵君担任。”傅先生的请求得到了认可，这四节课的教职，成为闵嗣鹤一生立业的基础。为了养家糊口，他有一年接替赵慈庚在傅先生家做些抄写

工作，每月可得 20 元润笔费。他还担任附中《算学丛刊》的编辑，并到私立中学兼课，成为家庭的顶梁柱。

清华大学杨武之教授是我国第一位在解析数论领域获得博士学位的学者。他在清华任教的二十年，是清华数学系人才辈出的二十年。杨先生在识别人才方面有过人的眼力，选才、育才堪称大家。华罗庚、陈省身都曾得益于杨先生的相知、相助和举荐、提携。闵嗣鹤是杨先生在师大兼课时的学生，杨先生发现了他的才华，与傅先生一起鼎力推荐他去清华工作。在大学毕业两年之后的 1937 年夏天，闵嗣鹤接到了清华大学请他担任数学系助教的聘书，一时喜出望外。这一聘任成为他走上数学研究之路的起点。

闵嗣鹤在接到聘书前后还写了一篇《相合式解数之渐进公式及应用此理以讨论奇异级数》的应征论文，在高君伟女士纪念奖金评选中获得第一名。他用奖金购买了许多书籍，后来又不远千里将这些书籍带到了西南联大，在资料匮乏的年代，对学校的教学与研究颇有帮助。

非常不幸的是，聘书到手未一个月，震惊世界的卢沟桥事件爆发了。霎时间，偌大的北京变成了混沌世界，人们纷纷向日军尚未占领的后方逃离。赵慈庚与同班同学赵文敏决定在八月初启程，行前他们对闵嗣鹤放心不下：闵嗣鹤一人支撑着母亲和三个妹妹的五口之家，没有任何积蓄；前不久钟爱他的祖父去世，入殓后与祖母和父亲的灵柩一起停放在法源寺内，兵荒马乱之中，尚未营葬。当他们找到闵嗣鹤说明去向时，闵嗣鹤难过地说：“你们走吧！该走。我怎么办呢？有家呀！刚刚接到清华的聘书，未曾一登校门，就来了这样大的变乱，清华将往何处去？……”话语间凄然欲泪。赵慈庚说：“清华大学无论走到哪里，聘约不能失效，向着清华奔过去，应该不会落空。还有那三口灵柩，自然是件大事，但是在这非常时期，也不能过于执旧礼了。”赵慈庚保管着行知社的一个存折，折上有活期存款 220 元，这是当年住校的几位同学每月凑一些钱，准备毕业后在京置房以便同学聚会的公款。这时赵慈庚把存折交到闵嗣鹤手中，

诚恳地说：“这钱你尽管用，由我完全负责。”三位同窗便依依不舍地告别了。

同窗走后，闵嗣鹤将灵柩埋葬在北京城外的江西义地，与恩师傅种孙一起带着

两家人返回故乡江西。然后，傅先生随北京师范大学撤往西北，闵嗣鹤偕全家历尽艰辛从长沙乘火车到广州，再到九龙，经香港乘船到越南，辗转来到昆明。

三、联大八年

1938年，闵嗣鹤终于在西南联合大学开始工作了。这是在抗日战争的非常时期由清华、北大、南开三所学校合成的大学，聚集了那个年代知识阶层的精英，曾经在我国的教育史上谱写过惊天地、泣鬼神的不朽篇章。

闵嗣鹤以助教微薄的薪水供养母亲和三位妹妹。他一到昆明就托亲友从银行给赵慈庚汇去220元欠款；可叹的是又过了四、五年以后，这笔当时可以买到三、四头牛的款项只够买三、四个烧饼了。战时物价飞涨，生活艰难。

尽管如此，闵嗣鹤在这里却如鱼得水。西南联大数学系是藏龙卧虎之地，为我国现代数学研究做出过奠基性贡献的华罗庚、陈省身、许宝騄都在这里工作，号称数学系“三杰”；清华、北大、南开三个数学系的系主任杨武之、江泽涵、姜立夫也在这里，联大数学系则先由江泽涵，后由杨武之负责。闵嗣鹤置身于一个前沿、开放的学术氛围之中。他为陈省身讲授的黎曼几何担任助教，与陈先生结下了终生的友谊，陈先生晚年在给他的题词中写到：“1938年在昆明西南联大，我们曾对几何学有过共研之雅。”他为华罗庚组织讨论班，当年的学生徐利治晚年回忆：“有闵先生做他的助教，给他帮了不少忙。”华罗庚的“堆垒素数论”开讲时，慕名而来的学生很多，以至满堂座无虚席。之后听众一天天减少，减到最后只剩下四人听讲。又过了一个礼拜，四人减为两人，教室中留下了师生三人上课。在昆明天天有日本飞机空袭的日子，这两个学生索性搬到华家附近，租屋而居，以便就近到他家里上课。这两个人就是闵嗣鹤与钟开莱。他们认真阅读了华罗庚的手稿，并帮他做了一些修正与改进。华罗庚的名著《堆垒素数论》原拟1941年在



闵嗣鹤于西南联大

前苏联出版，后因二战搁置，直到1947年俄文版才得以面世，其中收入了华先生为1941年版所作的原序，写有感谢这两位数学家“对于本文手稿和准备都曾给予了帮助”的语句。

有一天空袭警报响过之后，日本飞机许久未到，华罗庚对家人说：“我到闵嗣鹤的防空洞去一下，跟他谈个问题，一会儿就回来。”不料华罗庚刚到闵家的防空洞里，日本飞机就过来了，向山谷间倾泻了一串串炸弹，刹那间黄土飞溅，震耳轰鸣，大树被炸倒了一片。有一颗炸弹刚好在防空洞的洞口附近炸开，黄土向着洞里铺天盖地飞来，将洞口淹没。幸亏洞里有一人听到爆炸巨响后伸手抱住了头，这样他的头和手才没有被黄土埋住。于是他将每个人的脑袋先扒拉出来，但黄土把几个人的下半身压得紧紧的。赶来救援的华罗庚家人怕伤着他们，用手慢慢地刨，花了两三个小时，才把他们从土里

刨出来了。闵嗣鹤被刨出来时，长袍变成了短衫，正襟全被撕掉；华罗庚的耳朵震出了血，大家挨了一次活埋，总算死里逃生了。

闵嗣鹤对解析数论表现出浓厚的兴趣，迅速地进入了现代科研领域。尽管战火连天，空袭不断；尽管与世隔绝，资料奇缺，他仍然发表了7篇论文，除了1940年的第一篇是组合问题之外，后面6篇皆为数论，其中1941-44年与华罗庚合作4篇，1944-45年独立完成两篇。华罗庚在 *On the number of solutions of certain congruences* 一文底稿的扉页上写道：“闵君之工作，占异常重要之地位。”

华罗庚与闵嗣鹤年龄相仿，他们亦师亦友，相得益彰。但两人合作多年，难免有些摩擦。华罗庚是一位数学天才，他刚强果断，说一不二，有时不大顾及他人的感受。闵嗣鹤兢兢业业，凭着深厚的数学功底，着力于解决合作文章的关键证明。尽管闵嗣鹤温文尔雅，但是骨子里却不失倔强，有时隐忍不住，几次撂挑子不干了。每当二人失和，杨武之便赶来调解，工作于是重新开始。几十年下来，两人分分合合，竟结下了生死相依、患难与共的情谊。在闵嗣鹤的追悼会上，华罗庚悲伤垂泪。

1944年夏天，数学系主任杨武之致信西南联大理学院院长吴有训（字正之）：“正之吾兄大鉴：敬启者，算学系教员闵嗣鹤先生到校迄今夏已过七年，服务忠勤，研究有得，先后著成论文十余篇（目录及稿件附呈）。弟意欲请兄向校长提出，自今夏起，聘闵先生为专任讲师，是否有意，更新裁酌，顺颂时绥。弟杨武之。”

由于美国空军对日军飞机的歼击，昆明空袭有所缓解，迁往外地的昆明中学得以恢复。随着大批学生到昆明求学，自1942年以来，昆明新成立了公立和私立中学30余所。其中的龙渊中学是北师大毕业生创办的，学生在黄土坡的土坯房中上课，在黄尘漫卷中晨读。很多联大师生风尘仆仆前来助学，一时间龙渊中学名师济济。闵嗣鹤住处距此不远，便联络几位青年教师课余义务为学生上课，开设数学讲座。他讲得次数最多，颇受学生欢迎。一位学生在很多年后回忆：“闵嗣鹤在龙渊教平面几

何与高等代数，教学语言精练、准确、严密，概念讲解明白，推理层层分明。许多数学难点能一语点化，使学生思路豁然开朗。”正如好友赵慈庚所言，闵嗣鹤有“乐育为怀”的胸襟，他不大计较物质的报酬与别人的称赞，而是欣慰于少年的成长。不然的话，这种无名无利的义务劳动，大多数人是不会争先去做的。

在母亲和兄长的抚育下，闵嗣鹤的三个妹妹在西南联大长大了。四兄妹按照数理化生进行学科分布，闵嗣鹤在数学系任教，大妹闵嗣桂1938年入西南联大化学系学习，后任助教。二妹闵嗣云聪慧异常，1936年考入北京大学物理系，在人才济济的同班同学中成绩优秀，颇有巾帼不让须眉之势，1943年毕业后在联大担任助教。三妹闵嗣霓先在联大化学系就读，后考入清华大学生物系。当时有人开玩笑说：“联大理学院让你们闵家包了”。四个儿女的不凡表现，成为含辛茹苦的母亲最大的安慰与自豪。

陈省身早在1934年赴德留学，1936年25岁时获德国理学博士学位后，到法国师从数学大师嘉当（E. Cartan）研究微分几何，再赴美于普林斯顿高等研究院从事数学研究，在欧美游学五年。在1938年抗日战争的烽火硝烟中，陈省身毅然归国，应聘清华大学教授，来到西南联大。1943至45年陈先生应韦伯伦（O. Veblen）之邀再访普林斯顿，完成了他关于示性类的巅峰之作，成为国际数学界的学术翘楚。陈先生为人宽厚大度，颇有长者风范。他鼓励闵嗣鹤出国留学以开阔眼界，求得学术上的发展，闵嗣鹤深以为然。

随着妹妹们长大成年，家庭生活的重担不再由闵嗣鹤一个人承担。他在1944年初参加了第八届庚款留英考试，成为被录取的30名留学生之一。1945年10月，闵嗣鹤乘船前往英国。上世纪四十年代中叶，二战的硝烟刚刚散去，海上行船仍然颇有风险。一群怀抱科技救国梦想的留学生们坐在三等舱内，途经印度洋、大西洋，在时有季风、惊涛骇浪的海上颠簸，耗时月余方才抵达。闵嗣鹤来到牛津大学，师从梯其马希（E. C. Titchmarsh）研究解析数论，进入了国际上这一方向的学术中心。

四、学术家谱



哈代（左）与李特尔伍德于剑桥

1930年代，华罗庚曾在剑桥访问，研究工作受到哈代(G. H. Hardy)学派的影响，回国后培养出了王元、陈景润等新一代数学家。王元著《华罗庚传》对此有详尽的介绍。

如果编纂一个学术家谱，我国在解析数论领域师承哈代与梯其马希的一支可以这样排列：

- 哈代
- 梯其马希
- 闵嗣鹤
- 迟宗陶、尹文霖、邵品琮、潘承洞、潘承彪
- 张益唐等等……

闵嗣鹤受哈代学派嫡传，学术猛进，回国后又努力提携后学，可谓“裕后光前”。为了讲清闵嗣鹤的学术渊源与学术贡献，我们选择了家谱式的叙述方法。

1. 第一代：哈代。在数论历史上，哈代堪称为一位领袖数学家。他与李特尔伍德(J. E. Littlewood)合作，在许多数论问题的研究中做出了开创性的贡献，而且二人的合作也被称为科学合作的典范。在此，仅举与本文内容相关的两个贡献。

哈代的第一个贡献事关黎曼 zeta 函数。众所周知，黎曼 zeta 函数是打开素数宝藏大门的钥匙，zeta 函数的零点分布对素数分布有着决定性的影响。黎曼已经知道，zeta 函数有无穷多个非显然零点，这些零点散布于临界带形之内；这里的临界带形是指复平面上实部介于 0 与 1 之间的竖直带形。著名的黎曼猜想是说，zeta 函数的所有非显然零点都应该落在临界直线上，即临界带形的中轴线上。黎曼手算了 3 个零点，其实部都等于 $\frac{1}{2}$ 。哈代第一次证明了，黎曼 zeta 函数有无穷多个零点落在临界直线上。他又与李特尔伍德合作，推进了落在临界直线上的零点的密度。

哈代与本文有关的第二个贡献，是关于哥德巴赫猜想的研究，这是与李特尔伍德合作完成的。在他们系列文章的序言中，哈代与李特尔伍德自豪地宣称，这是历史上关于哥德巴赫猜想的第一次严肃研究；言下之意，此前虽然有很多名家致力于这个猜想，但都是不严肃的。在文章中，他们不但提出并发展了著名的圆法，还提出了许多著名的猜想。例如 k 生素数猜想：若非负整数 a_1, a_2, \dots, a_k 满足明显的必要条件，则多项式

$$x + a_1, x + a_2, \dots, x + a_k$$

同时表示素数无穷多次。注意，若取 $k = 2$ ，而 $a_1 = 0, a_2 = 2$ ，则这就是孪生素数猜想。

2. 第二代：梯其马希。梯其马希是哈代的入室弟子，致力于解析数论的研究。1931年起，梯其马希任牛津大学 Savilian 讲席教授(Savilian Professor of Geometry)。能够担任这个职位的人尽皆英才；例如，梯其马希的前任是哈代，而继任者则是赫赫有名的阿提亚(M. Atiyah)。

梯其马希是黎曼 zeta 函数研究领域举足轻重的权威，他的专著《黎曼 zeta 函数论》(*The theory of the Riemann zeta-function*)初版刊印于 1951 年，后来几经再版，至今仍是本领域排名第一的重要著作。关于这本经典著作，



梯其马希

萨纳克 (P. Sarnak) 曾经评价说：“如果我被流放到孤岛上，而且只允许我带一本关于 ζ 函数的书，那么无疑我会带梯其马希这本。”

3. 第三代：闵嗣鹤。庚款考试后，闵嗣鹤被牛津大学艾克赛特学院 (Exeter College) 录取，师从梯其马希。闵嗣鹤于 1945 年底到达，1947 年获得博士学位，其博士论文将近 200 页，主要研究黎曼 ζ

函数，特别是 ζ 函数在临界直线上阶的增长，即所谓的林德洛夫 (Lindelof) 猜想。

1947 年，经梯其马希推荐，闵嗣鹤接受齐格尔 (C. L. Siegel) 邀请，赴美国普林斯顿高等研究院从事学术研究，为时一年。普林斯顿高等研究院始建于 1930 年，数学所是该院首个成立的研究所，以爱因斯坦 (A. Einstein) 的加入为标志，数学所满编制教授人数为 8 人。闵嗣鹤在高等研究院工作期间，数学所教授除爱因斯坦、齐格尔之外，还有外尔 (H. Weyl)、哥德尔 (K. Godel)、冯·诺依曼 (J. von Neumann)；这几位全是领袖科学家。高等研究院尤其重视数论研究，其数学所一直是世界数论研究的中心；数学所的 8 位教授中，经常有两三位是数论家。当然，高等研究院的访问学者之中也不乏大家，下文将提到的塞尔伯格 (A. Selberg) 也是 1947 年到达数学所，而且也是受到齐格尔的邀请。

在普林斯顿，闵嗣鹤参加了外尔的讨论班，取得了丰富的研究成果。外尔真诚地挽留他继续在美工作，梯其马希则热情邀请他重返英国。但是，报效祖国、思念慈母的赤子之心促使他立即回国。1948 年秋，他回到清华大学数学系执教，初任副教授，翌年晋升为教授。1952 年院系调整，闵嗣



1947 年牛津大学毕业合影，第三排左一为闵嗣鹤



1947-1948 年，闵嗣鹤在普林斯顿高等研究院工作期间，摄于 Fuld Hall

鹤调任北京大学数学力学系教授。

3.1. 闵嗣鹤与林德洛夫猜想。林德洛夫猜想是说，对任意的 $\varepsilon > 0$ ，估计式

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^\varepsilon)$$

对所有 $|t| > 2$ 成立。这是一个极其困难的猜想，

特别地，它是黎曼猜想的推论。利用函数论的一般方法可以证明，对任意的 $\varepsilon > 0$ ，估计式

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^{\frac{1}{4} + \varepsilon})$$

对所有 $|t| > 2$ 成立。这里的 $\frac{1}{4}$ 被称为凸性上界，或者平凡上界。将 $\frac{1}{4}$ 用更小的常数替代，所得结果叫做亚凸性上界。亚凸性上界在数论中有众多重要的应用，因此一直是数论研究的热点。黎曼 zeta 函数的第一个亚凸性上界，由外尔于 1921 年得到。外尔所用的方法，在指数和理论中是一个比较自然的方法；因此超越外尔，将有重要意义，当然也需要有哲学上的新观察以及方法论上的创新。

闵嗣鹤在博士学位论文中，将 zeta 函数的凸性上界 $\frac{1}{4}$ 削减为亚凸性上界

$$\frac{15}{92}.$$

请注意， $\frac{1}{7} < \frac{15}{92} < \frac{1}{6}$ 。这篇论文 1949 年刊于《美国数学会汇刊》(Tran. Amer. Math. Soc.)。这个亚凸性上界，源于闵嗣鹤在二维指数和

$$\sum_{m,n} e^{2\pi i f(m,n)}$$

估计方面的创新，而这个创新在别的场合也



高等研究院 Fuld Hall 雪景（刘建亚摄）



1950年代，闵嗣鹤（左一）与华罗庚（左四）等合影

有深刻的应用。值得指出的是，经过众多数学家的努力，闵嗣鹤的亚凸性上界不断被改进，但是现在的世界纪录仍然大于 $\frac{1}{7}$ 。

3.2. 闵嗣鹤与黎曼猜想。二战期间，塞尔伯格蜷缩在挪威的一角，艰难从事着数学研究，并且得到了震惊世界的定理：黎曼 zeta 函数落在临界直线上的零点具有正密度。设 $N(T)$ 表示临界带形之内虚部不超过 T 的零点总数，而 $N_0(T)$ 表示落在临界直线上虚部不超过 T 的零点总数，则黎曼猜想就是说，对所有 T 都有

$$N_0(T) = N(T).$$

使用这些记号，塞尔伯格的定理可以更加精确地叙述为：存在一个正常数 c ，使得对所有 T 都有

$$N_0(T) > cN(T).$$

这大大推进了哈代与李特伍德的前述结果。二战一结束，塞尔伯格的成果迅速传播开来，得到了国际同行的重视；这也是塞尔伯格获得菲尔兹奖的两个重要结果之一。但是，塞尔伯格并没有给出这个常数 c 的具体数值。

闵嗣鹤第一个定出了塞尔伯格定理中 c

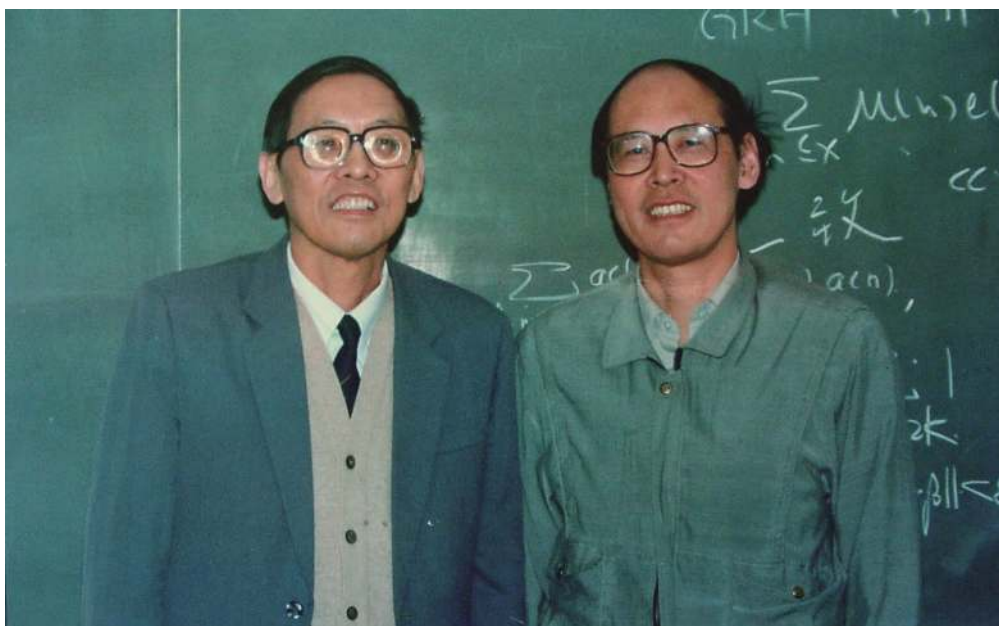
的可允许数值。闵嗣鹤证明了

$$c = \frac{1}{60000}$$

是可以允许的。不要小看这个常数；从闵嗣鹤的这个常数开始，人类开始准确地知道，我们距离黎曼猜想到底有多远。这项工作，是闵嗣鹤在普林斯顿时期就开始研究的，最后在国内完成，论文刊于《北京大学学报》。

1980年代，康瑞 (B. Conrey) 证明了 $c > 0.4$ ，从而 zeta 函数 40% 以上的零点落在临界直线上。现在最好的纪录是冯绍继的 $c > 0.41$ 。参见本期《数学文化》读者来信栏目。

1970年代以来轰轰烈烈发展的朗兰兹纲领，其研究基石是各种各样推广了的 zeta 函数，即自守 L 函数。对这些丰富多彩的 L 函数来说，都有广义黎曼猜想与广义林德洛夫猜想。遗憾的是，关于黎曼 zeta 函数的塞尔伯格定理，只被成功推广到了一些相对简单的 $GL(2)$ 自守 L 函数；而对绝大多数自守 L 函数而言，根本就没能证明相应的哈代定理，即无限多个零点落在临界直线之上。关于自守 L 函数的林德洛夫猜想，结果也是寥若晨星；到目前为止，只得到了某些 $GL(2)$ ， $GL(3)$ 以及 $GL(4)$ 的自守 L 函数的外尔型亚凸性上界。闵嗣鹤形式的精确上界，则是完全没有得到。



1995年潘承洞（左）与潘承彪合影（展涛摄）

4. 第四代以及第五代：闵嗣鹤的弟子与再传弟子。在清华大学，闵嗣鹤指导迟宗陶研究解析数论。利用闵嗣鹤关于 zeta 函数亚凸性上界的思想，迟宗陶改进了经典的狄利克雷除数问题的余项，所得到的新指数小于 $\frac{1}{3}$ 。在北京大学，闵嗣鹤的研究生有尹文霖、邵品琮、潘承洞。潘承洞的胞弟潘承彪，年级稍低，但也得到了闵嗣鹤的指导。



张益唐（叶扬波摄）

尹文霖、邵品琮从北京大学毕业后，分别到四川大学、曲阜师范大学任教。潘承洞从北京大学研究生毕业以后，到山东大学任教；而潘承彪则从北京大学到北京农机学院（现中国农业大学）任教，文化大革命结束以后，开始在北京大学指导数论方向的研究生。

在闵嗣鹤指导下，潘承洞本科时期就研究了著名难题——算术级数中的最小素数。经典的狄利克雷 (P. G. L. Dirichlet) 定理是说，若 $(a, q) = 1$ ，则在算术级数

$$a + q, a + 2q, a + 3q, \dots$$

中有无穷多的素数。一个自然的问题是：这个级数中的第一个素数 $P(a, q)$ 出现在什么位置？前苏联的领袖数学家林尼克 (Yu. V. Linnik) 证明了，存在一个常数 L ，使得

$$P(a, q) = O(q^L).$$

这个常数 L 被成为林尼克常数。林尼克并没有给出这个常数的具体数值；确定林尼克常数 L 具体数值，是一件困难的工作，因为 L 依赖于推广了的 zeta 函数的零点分布结果。在闵嗣鹤指导下，潘承洞得到了林尼克常数的第一个可允许的数值 $L = 5448$ 。经过许多数学家承前启后的工作，1992 年英

国数学家希斯-布朗 (D. R. Heath-Brown) 得到了 $L = 5.5$; 到本世纪, 这个结果又稍有改进, 现在最好的纪录是 $L = 5.18$. 从这个工作中, 以及从潘承洞后来关于哥德巴赫猜想 $(1 + 5)$ 的工作中, 都不难看到闵嗣鹤的哲学与精神。这就是传统的力量。

闵嗣鹤的再传弟子, 大多出自潘氏兄弟门墙。潘氏兄弟倾其心力, 培养的硕士、博士计有 30 余人, 其中的大多数仍在从事数论及其应用领域的研究。

张益唐早年师从潘承彪, 是闵嗣鹤再传弟子的杰出代表。最近他证明了, 存在无穷多对相邻素数, 其间隔不超过 7 千万。关于张益唐生平与工作的全面介绍, 请参看汤涛《张益唐与北大数学 78 级》, 刊于《数学文化》2013 年第 3 期。把张益唐定理中的 7 千万换成 2, 就得到孪生素数猜想的证明。7 千万这个数字, 貌似巨大, 但是它只是一个固定的常数, 因此与 2 并无哲学上的差别; 况且, 张益唐的论文公布之后, 这个数字不断被削减。

克隆尼克 (L. Kronecker) 说: “自然数是上帝给的, 而其他全是人造的。”如此说来, 孪生素数猜想无疑是“上帝的猜想”。张益唐的结果, 是对孪生素数猜想的决定性贡献。闵嗣鹤乃至哈代, 若于仙界有知, 必大感欣慰! 为人师者, 有一二徒子徒孙如此, 夫复何求?

待续



本文作者采访闵乐泉 (中)



本文作者采访赵藉丰 (左)

作者简介:

张英伯, 北京师范大学教授, 《数学文化》第一届编委。

刘建亚, 山东大学教授, 闵嗣鹤的再传弟子, 《数学文化》联合主编。

致谢: 本文写作素材取自作者对赵藉丰、闵惠泉、闵乐泉、潘承彪、严士健、李忠、王元诸位老师的依次采访, 以及闵惠泉、赵慈庚关于闵嗣鹤先生的文章, 和王元著述的相关情节。此外, 本刊编委罗懋康、贾朝华对本文的命题及部分细节均提出了中肯的建议, 在此一并致谢。