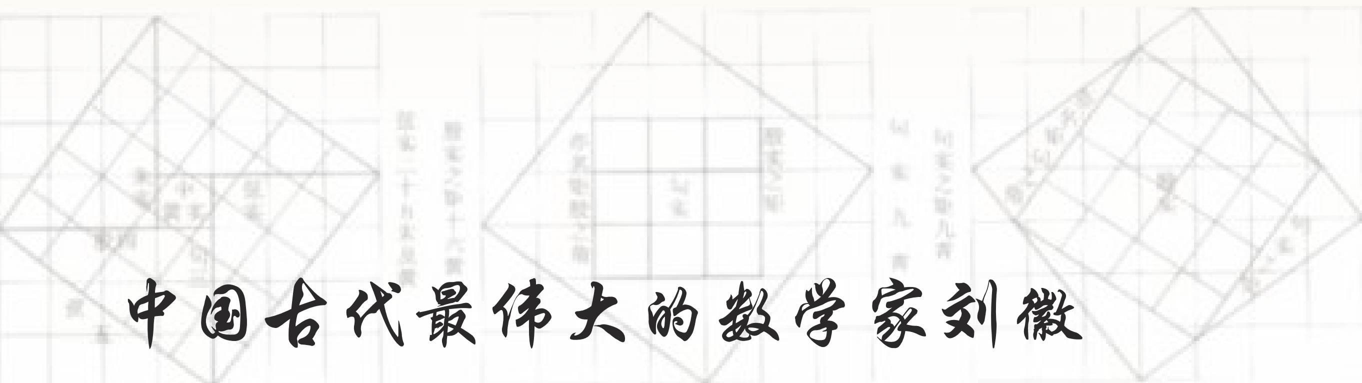


中国古代最伟大的数学家刘徽

——为纪念刘徽注《九章筭术》1750周年而作

郭书春

中国古代最伟大的数学家不是祖冲之吗？怎么会是刘徽呢？祖冲之（429-500）确实是伟大的数学家，应该说，他的数学水平不会低于刘徽。但是他的数学著作《缀术》(一作《缀述》)由于隋唐最高数学学府算学馆的学官“莫能究其深奥”，因而失传。因此其全部数学贡献人们至今无法了解。我们现在仅知道他的两项确切成就：将圆周率精确到8位有效数字以及与他的儿子祖暅之完成的球体的体积公式的推导。这两项成就都是刘徽为其提出方法或建立理论基础的。从数学的角度而言，这当然比祖冲之的贡献更重要。

中国科学院系统科学研究所于1985年10月举办了现代数学讨论班，要以一位伟大的数学家冠名。许多学者主张称为祖冲之讨论班，吴文俊院士力排众议，主张以刘徽命名。吴先生认为，刘徽无可争议地是我国传统数学中唯一的代表人物。

刘徽以演绎逻辑为主要方法全面证明了《九章筭术》的算法，建立了中国传统数学的理论体系。最值得称道的是他在世界数学史上第一次将无穷小分割方法和极限思想用于数学证明。刘徽逻辑之严谨，所达到的高度，在中国古代也无居其右者。可是，在上世纪70年代末以前，中国数学史界对刘徽没有给予应有的重视。其原因主要是刘徽注十分难读，其最重要成就，中国人或者以为弄通了，实际上搞错了，比如割圆术；或者根本没有搞懂，比如刘徽原理；或者没有涉及，比如刘徽关于“率”的理论和刘徽的逻辑思想。加之，它以为《九章筭术》作注的形式出现，很容易被误以为依附于《九章筭术》，因而导致把刘徽看成是一位二流的数学家。

上世纪70年代末至90年代出现了研究《九章筭术》及其刘徽注的高潮，对《九章筭术》的编纂和体例，刘徽的主要成就，刘徽的思想，产生刘徽注这样划时代著作的社会背景，以及《九章筭术》的版本基本上弄清楚了，对《九章筭术》的校勘也有重大进展。

《九章筭术》——中国传统数学框架的确立

刘徽是为《九章筭术》作注而名垂青史的。我们平日所说的《九章筭术》有狭义与广义两种涵义。狭义地说，仅指《九章筭术》本文。谈成就、编纂、体例等，常用这种涵义。广义地说，还包括魏刘徽注、唐李淳风等注释。谈版本、校勘等常用这种涵义。

《九章筭术》的体例和编纂

学术界一种流行的看法是把《九章筭术》说成一部“一题、一答、一术的应用问题集”，甚至说“概莫能外”。但这是一种似是而非的说法，而且会引起许多误解，往往成为中国古代数学没有理论的根据。但是，只要打开《九章筭术》，就会发现这并不符合《九章筭术》的实际情况。实际上，《九章筭术》的题、答、术的关系相当复杂。下面简要叙述。

《九章筭术》大部分内容采用算法统率例题的形式，往往是多题一术或一题一术，甚或多题多术。这里又有不同的情形：(i) 给出一个或几个例题，然后给出一条或几条抽象性术文，而例题中只有题目、答案，没有具体演算的术文。整个方田章、商功章的大部分内容以及粟米、少广、均输、盈不足、勾股章的部分内容，都属于这类情形，共有 73 术，106 道例题。(ii) 先给出抽象的术文，再列出几个例题；而例题只有题目、答案，亦没有演算细草。商功章的堑等、刍童等 2 条术及其 10 道例题便是如此。(iii) 先给出抽象性的总术，再给出若干例题；而例题包含了题目、答案、术文三项，其术文是总术的应用。方程章及粟米、衰分、少广、盈不足章的部分共 7 术 80 个例题是如此。

以上三种情形共 82 术，196 问，约占《九章筭术》全书的 80%。我们将之称为算法（术）统率例题的形式。尽管其间的表达方式有差异，却有几个共同特点：术文都非常抽象、严谨，具有普适性，换成现代符号就是公式或运算程序；在这里抽象性术文是中心，是主体，题目是作为它的例题出现的，是依附于术文的，而不是相反；这些术文具有构造性、机械化。

另外还有一少部分内容采取应用问题集的形式，往往是一题、一答、一术，共有 50 个题目，都是以题目为中心。尽管计算程序是正确的，但都是应用问题的演算细草。

值得注意的是，《九章筭术》的这些体例，在近年发现的秦简《数》、秦简《筭书》、汉简《筭数书》等秦汉数学简牍中全都有。《九章筭术》和秦汉数学简牍的内容大多数都是完成于秦和先秦的。因此，这反映了秦和先秦数学的共同特点。


九章筭經卷第一
魏 劉徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勑注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步 圖從十四 廣十二

图 1《九章筭术》书影（南宋本）

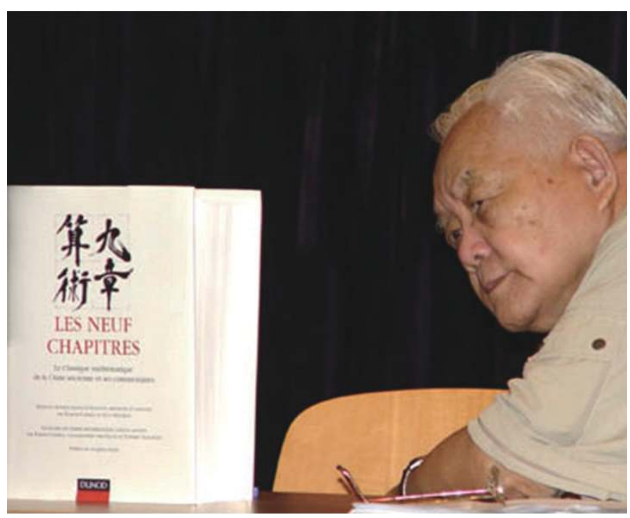


图 2 吴文俊院士在中法对照本《九章筭术》的新闻发布会上

很显然，笼统地将《九章筭术》称为“一题、一答、一术的应用问题集”是不合适的。笔者认为，数学史上起码存在三种不同体例的著作，一是像欧几里得《几何原本》那样的公理化体系，一是像希腊的丢番图的《算术》、中国的《孙子筭经》、《五曹筭经》等那样的应用问题集，一是以《九章筭术》的主体部分为代表的以算法为中心，算法统率例题的形式。

《九章筭术》的体例多种多样，表明它肯定不是一人一时编写的，而是经过许多世代，若干人的劳动积累而成的，这是学术界的共识。然而，到底是什么时候编纂的，却存在不同的看法。现存资料中最早谈到《九章筭术》编纂的就是本文所要谈到的刘徽。他说：

周公制礼而有九数，九数之流则《九章》是矣。往者暴秦焚书，经术散坏。自始厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善筭命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。

事实证明，刘徽关于《九章筭术》编纂的论述是最准确的。也就是说，在先秦已经存在某种形式的《九章筭术》，它在战乱中遭到破坏。西汉张苍（？- 前 152 年）、耿寿昌（公元前 1 世纪）搜集遗残，加以删补，编定了《九章筭术》。

《九章筭术》的内容和成就

《九章筭术》分九章。第一章方田，刘徽说“以御田畴界域”，解决田地面积问题，给出若干直线形、曲线形的面积的抽象公式。更重要的，提出世界上最早的系统、完整、抽象的分数四则运算法则。第二章粟米，刘徽说“以御交质变易”，解决粟米互换问题。提出十分抽象的“今有术”，即比例算法。此法在后来的印度和西方称为三率法。第三章衰分，刘徽说“以御贵贱禀税”，用“衰分术”、“返衰术”解决比例分配问题。后半章不是衰分问题，而是贸易、取保、贷钱等应用题，应该用今有术求解。第四章少广，刘徽说“以御积幂方圆”，解决面积、体积的逆运算问题。提出了世界上最早的开平方、开立方的抽象程序。第五章商功，刘徽说“以御功程积实”。此章的本义是解决土方工程中工作量的分配问题，但现今人们更重视其中的若干多面体、圆体的抽象的体积公式。第六章均输，刘徽说“以御远近劳费”，解决赋税中的合理负担问题，是更为复杂的衰分问题。后半章是各种算术难题。第七章盈不足，刘徽说“以御隐杂互见”，解决盈亏类问题，并用盈不足术，通过两次假设解决了若干一般数学问题，在世界数学史上影响巨大。第八章方程，刘徽说“以御错糅正负”。“方程”即现今线性方程组。此章提出了世界上最早的线性方程组解法，“正负术”即正负数加减法则，以及列“方程”的方法“损益”法。第九章勾股，刘徽说“以御高深广远”，提出了抽象的“勾股术”即勾股定理，给出了解勾股形的各种方法和世界上最早的勾股数组通解公式，以及勾股容圆和简单测望等问题。

以上许多成就超前其他文化传统几个世纪甚至上千年。

《九章筭术》历来被尊为算经之首，明中叶至清中叶的数学家已经看不到《九章筭术》，许多数学著作的标题却都有“九章”或“九数”二字，或以“九数”分类。甚至在西方数学传入之后，还有人将以西方数学为主体的内容按“九数”分类，著书立说。

另一方面，为《九章筭术》作注是中国传统数学著作的重要形式，成为中国传统数学成就的重要载体。其中成就最大的是魏刘徽的《九章筭术注》，北宋贾宪的《黄帝九章算经细草》。它们分别奠定了魏晋南北朝与宋元两个数学高潮的基础。《九章筭术》还传到朝鲜、日本和东南亚，成为这些地区数学知识的源泉。《九章筭术》在东方数学中的地位，大体相当于欧几里得《几何原本》在西方数学中的地位。《九章筭术》与《几何原本》像两颗璀璨的明珠，在古代东西晖映。

《九章筭术》的成书之时，正值古希腊数学越过其高峰，走向衰替之际。《九章筭术》的问世标志着中国及后来的印度、阿拉伯地区取代古希腊成为世界数学研究的重心，也标志着世界数学从研究空间形式为主，转变为以研究数量关系为主，标志着数学机械化算法体系取代数学公理化演绎体系成为世界数学发展中的主流。

我们在表彰《九章筭术》的成就的同时，不能忽视它的缺点。首先就是《九章筭术》没有任何数学定义，也没有任何推导和证明。当然，这并不是说《九章筭术》在提出这些算法时没有某种形式的推导。其次，受儒家传统思想的束缚，《九章筭术》没有突破“九数”的限制。这一方面使九章的分类不尽合理，有的按应用分类，有的按数学方法分类，标准不同一。另一方面，对当时提出的许多新问题，编纂者未能与时俱进，打破“九数”的格局，设置新的类别，而是将一些题目硬塞入衰分章和均输章，不伦不类。

刘徽及其《九章筭术注》《海岛算经》

刘徽生平不详。笔者根据《宋史•算学祀典》及有关史料断定，刘徽的籍贯是淄乡，属今山东邹平县。他自述“徽幼习《九章》，长再详览”。根据《晋书•律历志》、《隋书•律历志》记载，刘徽于魏景元四年（公元 263 年）撰《九章筭术注》，今年恰好是 1750 周年。国内外的学者在邹平成功举行了国际学术研讨会。

刘徽的思想受何晏（？ -249）、嵇康（223-262）、王弼（226-249）等玄学名士的影响较大，甚至有许多语句相类。由此，我们可以推断，刘徽的生年大约与嵇康、王弼相近 , 或稍晚一些，就是说，刘徽应该生于公元 3 世纪 20 年代后期至公元 240 年之间。换言之，公元 263 年他完成《九章筭术注》时 , 年仅 30 岁上下 , 或更小一点。有的画家将正在注《九章筭术》的刘徽画成一位满脸皱纹的耄耋老人，有悖于魏晋的时代精神和特点。

《九章筭术注》原十卷，第十卷“重差”系自撰自注，后来以《海岛算经》为名单行，因第 1 问是测望一海岛高、远，故名。其宋刻本已亡佚，今传本是清戴震从《永乐大典》辑录出来的，只有 9 问，且无刘徽自注。刘徽还有《九章重差图》一卷，已佚。

《海岛算经》将以重差术为主的中国测望技术发展得相当完善，在西方测望技术于明末传入中国之前，再无大的突破。图 4 是测望海岛示意图。刘徽测望海岛的原型可能是泰山。

尽管对刘徽的生平我们知之甚少，但是由于他的《九章筭术注》比较完整地保存下来了，因此对他的思想品格，却是明末之前的数学家中我们了解最多的一位。刘徽博览群书，精心研究了墨家、儒家、道家等先

图 3 纪念刘徽注《九章筭术》1750 周年国际学术研讨会主席台

图 4 刘徽测望海岛示意图

淳風等謹依密率爲田十畝二
百五步八十八分步之八十七
術曰半周半徑相乘得積步
按半周爲從
半徑爲廣故
廣從相乘爲積步也假令圓徑二尺圓中
容六弧之一面與圓徑之半其數均等令
徑率一而弧周率三也又按爲圖以六弧
之一面乘一弧半徑二因而六之得十二
弧之冪若又割之次以十二弧之一面乘
一弧之冪半徑四因而六之則得二十四弧
之冪割之彌細所失彌少割之又割以至
於不可割則與圓周合體而無所失矣弧
面之外猶有餘徑以面乘徑則冪出弧表
若夫之弧之細者與圓合體則表無餘徑表
無餘徑則冪不外出矣以一面乘半徑弧
而裁之每輒自倍故以半周乘半徑而爲
圓冪此以周徑謂至然之數非周三徑一
之率也周三者從其六弧之環耳以推圓

图 5 刘徽割圆术书影（南宋本）

秦诸子的著述，以及司马迁、王充、郑玄等两汉学者的著作。他受思想界的正始之音（240-248）和此后的辩难之风的深刻影响，善于从其中及在辩难中泛起的先秦诸子、两汉典籍中汲取大量的思想资料，或者以某些命题作外壳，加以改造，融会贯通，赋予数学内容，得出正确或比较正确的结论，或者撷取其正确部分指导自己的数学研究。他的深邃的思想方法和数学理论蕴含着对传统文化的深刻理解。

坚持实事求是，一切从实际出发，是刘徽治学的重大特点。整个刘徽注言必有据，不讲空话。历来有“隶首作数”的说法，刘徽说“其详未之闻也”。汉代盛行谶纬迷信，出现数字神秘主义，大科学家张衡也未能免俗，刘徽批评他是“欲协其阴阳奇耦之说而不顾疏密矣”。刘徽把自己的数学知识和创造完全建立在必然性基础之上，没有任何猜测或神秘的成分。

刘徽认为人们的数学知识是不断进步的，他不迷信古人。《九章筭术》最迟在东汉已被官方奉为经典，刘徽为之作注，自然对之很推崇。但他并不妄从，指出了它若干不准确之处甚或错误。刘徽是在中国数学史上批评《九章筭术》最多的数学家。

敢于创新，是刘徽治学的突出特点，这是他实事求是精神的升华。刘徽《九章筭术注》的创新非常多。在一部著作中，新的思想、新的方法、新的成就这么多，在中国数学史上是少见的。

刘徽还具有知之为知之，不知为不知，不图虚名，敢于承认自己的不足，寄希望于后学的高尚品格。他对自己设计的牟合方盖，功亏一篑，没能求出其体积，便老老实实地承认：“欲陋形措意，惧失正理，敢不阙疑，以俟能言者。”反映了一位真正的科学家的光辉本色。

刘徽还善于灵活运用数学方法，指出不弄通数学原理，“徒按本术”，是“胶柱调瑟”，就像把琴瑟的弦的转柱胶住而要调节弦的音律。他常常在《九章筭术》的术文之外，提出另外的方法，或者对《九章筭术》的同一条术文，记下不同的思路。有时候他明知自己提出的新方法不如原来的方法简便，为什么还要提出呢？他说：“广异法也。”要广开思路。

《九章筭术注》的结构和成就

刘徽的《九章筭术注》是不是全都反映了刘徽的思想呢？学术界实际上存在着不同意见。刘徽自述注《九章筭术》的过程时说：

> 徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。

这说明，《九章筭术注》中含有两种内容：一

是他自己的数学创造，即“悟其意”者；二是前人的研究成果，即“采其所见”者。两者的分野在许多术文和问题的注解中十分清楚。比如刘徽几次严厉地批评前人使用周三径一的错误，但又有大量的段落使用周三径一；他指出使用棊验法对证明长、宽、高不等的阳马和鳖臑体积公式“则难为之矣”，但在许多多面体体积公式的注的第一段中往往使用棊验法。这些段落显然不是刘徽的思想，而是前人的，刘徽“采其所见”，写入注中。

认识刘徽注中有“采其所见”者，对《九章筭术》及其刘徽注的研究有重要意义。首先，刘徽注中的“采其所见”者透露出《九章筭术》成书时代的某些信息，比如，棊验法就是《九章筭术》成书时代推导多面体体积公式的一种方法。

其次，可以使我们更加清晰地认识刘徽。如果将刘徽注都看成是刘徽的思想，那么刘徽是一个成就极大，但思想混乱的数学家。如果在刘徽注中剔除了“采其所见”者，那么，一位成就极大、逻辑清晰、思想深邃的刘徽，便跃然纸上。

还有，对《九章筭术》的校勘特别重要。戴震等人由于不懂刘徽注有“采其所见”者，发现其中有不同思路时，便将后面一种思路改为李淳风等注释，造成极大混乱。

刘徽的数学成就大致有下面几方面：发展了传统的率概念和齐同原理，拓展了其应用，指出它们是“算之纲纪”。继承发展了传统的出入相补原理。首创极限思想和无穷小分割方法并严格证明了《九章筭术》提出的圆面积公式和他自己提出的刘徽原理。前者今称为割圆术，后者将多面体的体积理论建立在无穷小分割基础之上。刘徽明确认识了截面积原理，是为中国人完全认识祖暅之原理的关键一步。将极限思想应用于近似计算，在开方不尽时提出求其“微数”，以十进分数逼近无理根的思想。他在中国首创求圆周率的科学方法，奠定了中国的圆周率近似值的计算领先世界千余年的基础。修正了《九章筭术》的若干错误和不精确之处，提出了许多新的公式和解法，大大改善并丰富了《九章筭术》的内容。改变了《九章筭术》对数学概念的涵义约定俗成的做法，给出了若干明确的数学定义。以演绎逻辑为主全面论证了《九章筭术》的算法。他的论证常常是真正的数学证明。分析了各种数学概念、数学方法和命题之间的关系，梳理了各个分支乃至整个数学的逻辑系统。他认为数学像一株发自一端、枝繁叶茂、条缕分明而具有同一本干的大树，并基于此认识完成了中国传统数学的理论体系。

下面仅简要介绍刘徽的割圆术、刘徽原理、逻辑思想和数学体系。

割圆术

刘徽的圆田术注即割圆术分两部分。第一部分是证明《九章筭术》的圆面积公式。第二部分是求圆周率。《九章筭术》提出了圆面积公式：

术曰：半周半径相乘得积步。

以 S，L，r 分别记圆面积，圆周长和半径，那么术文用现代符号写出，就是：

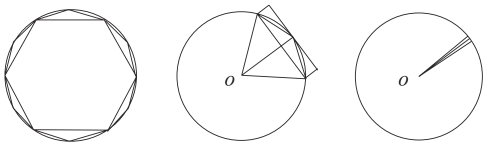
$$S=\frac{1}{2}Lr. \tag{1}$$

据刘徽记载，他之前使用出入相补原理推导这个公式。他认为，这是基于周三径一，以圆内接正六边形的周长作为圆周长，以圆内接正十二边形的面积作为圆面积，实际上并没有严格证明圆面积公式（1），遂提出了使用极限思想和无穷小分割方法的证明方法。他说：

又按：为图。以六觚之一面乘一弧半径，三之，得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚之一面乘一弧之半径，六之，则得二十四觚之幂。割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。觚面之外，犹有余径。以面乘余径，则幂出弧表。若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径。表无余径，则幂不外出矣。以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂。

如图 6，刘徽从圆内接正 6 边形开始割圆。设第 n 次分割得到正 6×2^n 边形的面积为 S_n，刘徽认为 $S_{n+1}<S<S_n+2(S_{n+1}-S_n)$。而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,\ \lim_{n\to\infty}\left[S_n+2(S_{n+1}-S_n)\right]=S.$$



（1）　　（2）　　（3）

图 6 刘徽对圆面积公式的证明（采自《古代世界数学泰斗刘徽》）

刘徽将极限状态即与圆合体的正无穷多边形分割成以圆心为顶点，以每边为底的无穷多个小等腰三角形，每个的高 r，设每个的底边长 l_i，面积为 A_i。显然 $l_i r = 2A_i$。所有这些小等腰三角形的底边之和为圆周长 $\sum_{i=1}^{\infty} l_i = L$，它们的面积之和为圆面积 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = S$。因此，

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_i r = \sum_{i=1}^{\infty} 2A_i = 2S .$$

由此式反求出 S，就得到（1）式。

这是一个论点明确，论据充分，逻辑清晰的完整证明。可是在上世纪 70 年代末以前，所有涉及刘徽割圆术的著述都有意无意地忽略了其中“以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂”这几句画龙点睛之语——甚至一篇逐字逐句翻译刘徽割圆术的文章对这几句话竟略而不译，因此都没有认识到刘徽在证明《九章筭术》的圆面积公式（1）。

在证明了《九章筭术》的圆面积公式（1）之后，刘徽接着说：

此以周、径，谓至然之数，非周三径一之率也。

因此需要求周、径的“至然之数”，即圆周率。他在批评了“学者踵古，习其谬失”，沿用“周三径一之率”的错误之后，提出了求圆周率近似值的程序。他从直径为 2 尺的圆的内接正 6 边形开始割圆，得到圆内接各正多边形的边长以及正 96 边形的面积 $S_4=313\frac{584}{625}$ 平方寸，正 192 边形的面积 $S_5=314\frac{64}{625}$ 平方寸。刘徽求出 $S_5-S_4=\frac{105}{625}$ 平方寸。而 $314\frac{64}{625}$ 平方寸 $< S < 314\frac{169}{625}$ 平方寸，因此取 314 平方寸作为圆面积的近似值。然后刘徽说：

以半径一尺除圆幂，倍所得，六尺二寸八分，即周数。……令径二尺与周六尺二寸八分相约，周得一百五十七，径得五十，则其相与之率也。周率犹为微少也。

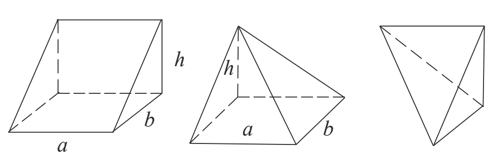
即将这个近似值与半径 1 尺代入公式（1），求出圆周长的近似值 6 尺 2 寸 8 分。将圆的直径与周长相约，便得到圆周率 $\frac{157}{50}$，相当于 $\pi = 3.14$。数学史上一般将它称为徽率或徽术。

显然，刘徽求圆周率的方法是以被他刚刚证明了的圆面积公式（1）为前提的，其中并未用到极限思想，只是极限思想在近似计算中的应用，没有任何费解之处。可是，在上世纪 70 年代末之前的所有著述都说刘徽此注中的几个极限过程是为了求圆周率，并且，在求出圆面积近似值 314 平方寸之后，利用 $S = \pi r^2$，由 $r^2 = 100$ 平方寸求出 $\pi = \frac{157}{50}$，无疑背离了刘徽注，并且还会将刘徽置于他从未犯过的循环推理错误之中。原来，刘徽在求出徽率之后，用它将《九章筭术》提出的与上述公式相当的圆面积公式 $S = \frac{3}{4} r^2$，修正为 $S = \frac{157}{200} r^2$。

刘徽原理

近代数学大师高斯曾提出一个猜想：多面体体积的解决不借助于无穷小分割是不是不可能的？这一猜想构成了希尔伯特《数学问题》（1900 年）第三问题的基础。不久，他的学生德恩作了肯定的回答。实际上，早在高斯前 1500 多年，刘徽在证明《九章筭术》提出的阳马和鳖臑的体积公式时，就涉及到了高斯猜想和希尔伯特第三问题。

中国古代在多面体分割中，一个长方体沿相对两棱剖开，得到两个楔形体，叫做堑堵，如图 7（1）。一个堑堵从一个顶点到底面一边剖开，得到一个锥体，其高的垂足在



（1）　　（2）　　（3）

图 7 堑堵、阳马、鳖臑

底面的一角上，叫做阳马，如图 7（2）；剩下的是四面皆为勾股形的四面体，叫做鳖臑，如图 7（3）。《九章筭术》给出了阳马的体积公式：

$$V=\frac{1}{3}abh, \qquad (2)$$

其中 a，b，h 分别是阳马的广、袤和高。又给出鳖臑的体积公式

$$V=\frac{1}{6}abh, \qquad (3)$$

其中 a，b，h 分别是鳖臑的下广、上袤和高。

在 $a=b=h$ 的情况下，由于一个正方体可以分解为 3 个全等的阳马，或 6 个三三全等、两两对称的鳖臑，“验之以棊，其形露矣”，（2），（3）无疑是正确的。但是，在 $a\neq b\neq h$ 的情况下，一个正方体分解成的三个阳马不全等，6 个鳖臑尽管两两对称，却不三三全等，所谓“鳖臑殊形，阳马异体”。刘徽指出：“阳马异体，则不可纯合，不纯合，则难为之矣。”换言之，用棊验法即传统的出入相补方法是无法严格证明（2），（3）两式的。他只好另辟蹊径。刘徽提出了一个重要原理：

邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。

即在一个堑堵中，恒有

$$V_{\text{阳马}}:V_{\text{鳖臑}}=2:1 \qquad (4)$$

吴文俊把它称为刘徽原理。显然，只要证明了刘徽原理，由于堑堵的体积公式为 $V=\frac{1}{2}abh$，则（2），（3）两式是不言而喻的。

刘徽使用极限思想和无穷小分割方法证明了这个原理。他说：

设为阳马为分内，鳖臑为分外。棊虽或随脩短广狭，犹有此分常率知，殊形异体，亦同也者，以此而已。其使鳖臑广、袤、高各二尺，用堑堵、鳖臑之棊各二，皆用赤棊。又使阳马之广、袤、高各二尺，用立方之棊一，堑堵、阳马之棊各二，皆用黑棊。棊之赤、黑，接为堑堵，广、袤、高各二尺。于是中效其广、袤，又中分其高。令赤、黑堑堵各自适当一方，高一尺、方一尺，每二分鳖臑，则一阳马也。其余两端各积本体，合成一方焉。是为别种而方者率居三，通其体而方者率居一。虽方随棊改，而固有常然之势也。按：余数具而可知者有一、二分之别，即一、二之为率定矣。其于理也岂虚矣？若为数而穷之，置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也。半之弥少，其余弥细。至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉？


荅曰九十三尺少半尺
術曰廣袤相乘以高乘之三而一按此術陽馬之
形方錐一隅也今謂四柱屋隅爲陽馬假令廣袤各一尺高一尺相乘之得立方積
一尺邪解立方得兩塹堵邪解塹堵其一爲陽馬一爲鼈腝陽馬居二鼈腝居一不
易之率也合兩鼈腝成一陽馬合三陽馬而成一立方故三而一驗之以棊其形露
矣悉割陽馬凡爲六鼈腝觀其割分則體勢互通蓋易了也其棊或脩短或廣狹立
方不等者亦割分以爲六鼈腝其形不悉相似然見數同積實均也鼈腝殊形陽馬
異體然陽馬異體則不可純合純合則難爲之矣何則按邪解方棊以爲塹堵者必
當以半爲分邪解塹堵以爲陽馬者亦必當以半爲分一從一橫耳設爲陽馬爲分

图 8 刘徽原理书影（南宋本）

刘徽将由两个小堑堵 II′、III′，两个小鳖臑 IV′、V′ 合成的鳖臑（图 9（1））与由一个小长方体 I，两个小堑堵 II、III，两个小阳马 IV、V 合成的阳马（图 9（2））拼合成一个堑堵，如图 9（3），则相当于堑堵被三个互相垂直的平面平分。显然，小堑堵 II 与 II′、III 与 III′ 可以分别拼合成与 I 全等的小长方体，如图 9（5）和（6）所示。小阳马 IV 与小鳖臑 IV′，小阳马 V 与小鳖臑 V′ 可以分别拼合成两个与小堑堵 II、III、II′、III′ 全等的小堑堵，它们又可以拼合成与 I 全等的第 4 个小长方体，如图 9（7）所示。显然，在前三个小长方体 I、II - II′、III - III′ 中，属于阳马的和属于鳖臑的体积的比是 2:1，即在原堑堵的 $\frac{3}{4}$ 中（4）式成立，所谓“别种而方者率居三”。刘徽

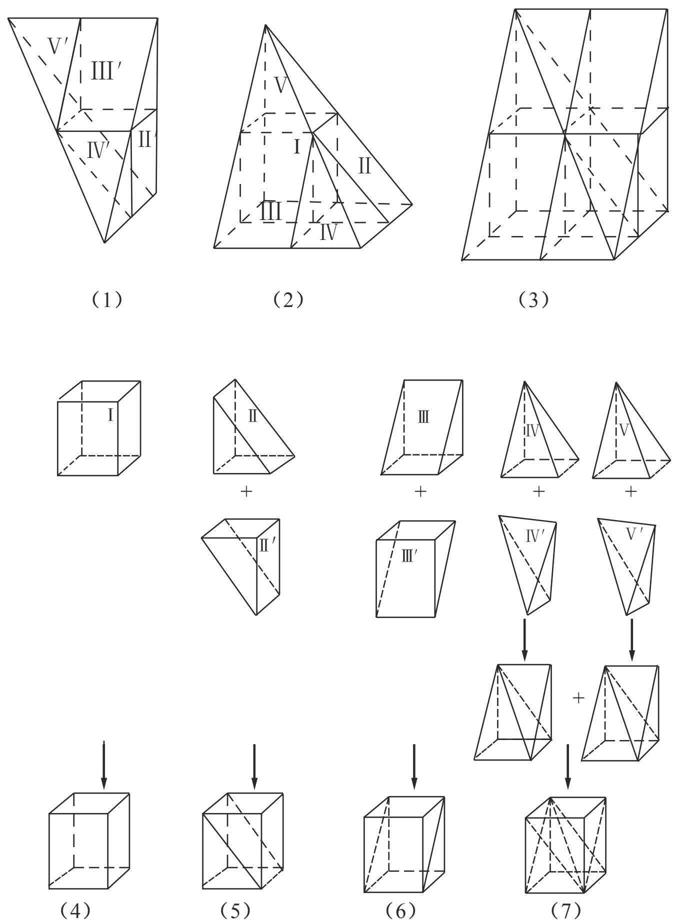


图 9 刘徽原理之证明

认为，如果能证明（4）式在第 4 个小长方体中成立，则（4）式便在整个堑堵中成立。而第 4 个小长方体中的两个小堑堵与原堑堵完全相似，所谓“通其体而方者率居一”。因此，上述分割过程完全可以继续在剩余的两个小堑堵中施行，那么又可以证明在其中的$\frac{3}{4}$中（4）式成立，在其中的$\frac{1}{4}$中尚未知。换言之，已经证明了原堑堵中的$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$中（4）式成立，而在$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$中尚未知。这个过程可以无限继续下去，第 n 次分割后只剩原堑堵的 $1/4^n$ 中（4）式是否成立尚未知。显然，$\lim\limits_{n\to\infty} 1/4^n = 0$。这就在整个堑堵中证明了（4）式，即刘徽原理成立。

刘徽原理是其多面体体积理论的基础。刘徽说：

不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之主也。

刘徽认为，鳖臑是其解决多面体体积问题的关键。刘徽为求方锥、方亭、刍甍、刍童、羡除等多面体的体积，都要通过有限次分割，将其分割成长方体、堑堵、阳马、鳖臑等已被证明了体积公式的立体，然后求其体积之和解决之。刘徽原理把多面体体积理论建立在无穷小分割基础上的思想，与现代数学的体积理论惊人地一致。

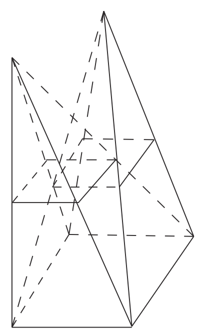


图 10 方锥与阳马同实

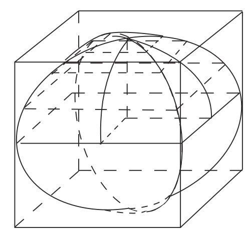


图 11 牟合方盖

截面积原理

《九章筭术》是通过比较其底面积由体积已知方体推知圆体体积的。刘徽则更进了一步，他说：“上连无成不方，故方锥与阳马同实。”如图 10。可见，刘徽实际上已经认识了祖暅之原理：“缘幂势既同，则积不容异。”此即后来西方的卡瓦列里原理。正因为如此，刘徽认识到，《九章筭术》时代由圆柱体与其内切球的体积之比是 4:π 推导球体积，从而得出的开立圆术是错误的。他设计了牟合方盖，如图 11。刘徽指出：牟合方盖与内切球的体积之比才是 4:π，只要求出牟合方盖的体积，便可以解决球体积问题，从而指出了解决球体积的正确途径。200 年后的祖冲之父子在刘徽基础上求出了牟合方盖的体积。

刘徽的逻辑思想和数学理论体系

中国古代数学没有理论，似成为学术界的主流看法。不仅鄙视中国的西方中心论者和民族虚无主义者如是说，即使是对中国古代数学成就评价甚高的学者如英国的李约瑟等亦持这种看法。众所周知，要证明数学命题为真，必须靠演绎推理。说中国传统数学没有理论，主要是说没有演绎推理。事实上，认真考察刘徽注就会发现，刘徽在数学命题的证明中主要使用了演绎推理，其中有三段论、关系推理、假言推理、选言推理、联言推理、二难推理等演绎逻辑的最重要的推理形式，还有数学归纳法的雏形。说中国传统数学没有逻辑的学者，或者是没有读刘徽的《九章筭术注》，或者是读了但没有读懂。

刘徽的演绎逻辑

三段论是演绎推理的性质判断推理中极其重要的一种。三段论不是个别民族或学派的专利，刘徽注的许多推理是典型的三段论。例如盈不足术刘徽注曰：

> 注云若两设有分者，齐其子，同其母。此问两设俱见零分，故齐其子，同其母。

其推理形式是：若两设有分者（M），须齐其子，同其母（P）。此问（S）两设俱有分（M），故此问（S）须齐其子，同其母（P）。其中含有三个概念：两设俱有分（中项 M），齐其子，同其母（大项 P），此问（小项 S）。中项在大前提中周延，结论中的概念的外延与它们在前提中的外延相同，还有，大前提是全称肯定判断，小前提是单称肯定判断，结论是单称肯定判断。可见，这个推理完全符合三段论的规则，是其第一格的 AAA 式。

关系推理实际上是三段论的一种。初等数学是关于客观世界的空间形式和数量关系的科学，关系推理在刘徽的推理中所占的比重自然特别大。而在关系推理所使用的关系判断中，又以等量关系为最多。例如方田章圆田术刘徽注对圆田又术"周、径相乘，四而一"的证明是：

> 周、径相乘各当以半，而今周、径两全，故两母相乘为四，以报除之。

其推理形式就是：

已知

$S=\frac{1}{2}Lr$（等量关系判断，刘徽已经证明），

及

$r=\frac{1}{2}d$（等量关系判断），

故

$S=\frac{1}{2}Lr=\frac{1}{2}L\times\frac{1}{2}d=\frac{1}{4}Ld$（等量关系判断）。

刘徽有时使用不等量关系推理。例如在推断圆囷（圆柱体）与所容之丸（内切球）的体积之比不是 $4:\pi$ 时说：

> 按：合盖者，方率也，丸居其中，即圆率也。推此言之，谓夫圆囷为方率，岂不阙哉？

其推理形式是：已知 $V_{hg}:V_w=4:\pi$（等量关系判断），及 $V_{yq}:V_w\neq V_{hg}:V_w$，（不等量关系判断），故 $V_{yq}:V_w\neq 4:\pi$（不等量关系判断）。其中 V_{hg}，V_w，V_{yq} 分别是牟合方盖、丸、圆囷的体积。

假言推理是数学推理中常用的一种形式，包括充分条件假言推理和必要条件假言推理。充分条件假言推理的推理形式是：若 p，则 q，今 p，故 q。上面提到的"上连无成不方，故方锥与阳马同实"，文字很简括，其完备形式是：

> 若两立体每一层都是相等的方形（p），
> 则其体积相等（q），
> 今方锥与阳马每一层都是相等的方形(p)，
> 故方锥与阳马体积相等（q）。

在**充分条件假言推理**中，若 p，则 q。若非 p，则 q 真假不定。刘徽对此有深刻的认识。例如刘徽在记述用棊验法推证阳马、鳖臑体积公式时指出，将一正方棊分割为三个阳马，或六个鳖臑。"观其割分，则体势互通，盖易了也"。"体势互通"即全等或对称。然而在长、宽、高不等的情况下，"则难为之矣"。其推理形式是：

> 若诸立体体势互通(p)，则其体积相等(q)。
> 今诸立体体势不互通（非 p），
> 故难为之矣（q 真假不定）。

这是刘徽认识到棊验法不能在数学上真正证明多面体体积公式的逻辑基础。

选言推理有两个前提。第一个前提是含有两个选言支的选言判断，第二个前提是某一选言支的否定，那么其结论是另一选言支的肯定。其推理形式是：或 p，或 q。今非 q，故 p。刘徽在许多地方使用了选言推理。例如在四则运算中，根据需要，可以先乘后除，也可以先除后乘。刘徽在商功章负土术注中指出:“乘除之或先后，意各有所在而同归耳。”刘徽通常主张先乘后除，因为先除后乘，有时会出现分数。这是一个选言推理,其形式为：

> 或先乘后除（p），或先除后乘（q）。
> 今非先除后乘（q），
> 故先乘后除（p）。

联言推理的前提是一个联言判断，其结论是一个联言支。刘徽在羡除术注中用截面积原理推导椭方锥（即长方锥）的体积时说：“阳马之棊两邪，棊底方。当其方也，不问旁角而割之，相半可知也。……角而割之者相半之势。”这是一个分解式联言推理，其推理形式是：

> 前提：对方锥平行于底的截面，用一平面切割其对边的中点，则将其体积平分（p），用一平面切割其对角，也将其体积平分（q）。
>
> 结论：用一平面切割其对角，将其体积平分（q）。

由此证明了将半个椭方锥角而割之得到的大鳖腝，其体积是椭方锥的一半，亦即与《九章筭术》的鳖腝体积公式取同样的形式。

二难推理是将假言推理与选言推理结合起来的一种推理，又称为假言选言推理。其大前提是两个假言判断，小前提是选言判断。刘徽证明《九章筭术》圆田又术 $S=\frac{1}{12}L^2$ 不准确时说：

> 六觚之周，其于圆径，三与一也。故六觚之周自相乘幂，若圆径自乘者九方，九方凡为十二觚者十有二，故曰十二而一，即十二觚之幂也。今此令周自乘，非但若为圆径自乘者九方而已。然则十二而一，所得又非十二觚之类也。若欲以为圆幂，失之于多矣。

它有两个假言前提：一个是：若以圆内接正六边形的周长作为圆周长自乘，其十二分之一，是圆内接正十二边形的面积（p），小于圆面积（r）；另一个是：若令圆周自乘，其十二分之一（q），则大于圆面积（S）。还有一个选言前提：或者以正六边形周长自乘，十二而一，或者以圆周长自乘，十二而一（或 p 或 q）。结论是:或失之于少,或失之于多（或 r 或 S），都证明了《九章筭术》该公式不准确。

数学归纳法是演绎推理的一种。刘徽继承的《九章筭术》的开方术，他创造的割圆术和用无穷小分割方法证明刘徽原理的方法，等等，都是递推方法。在后二者中更是无限递推。无限递推是数学归纳法的核心。仅以刘徽原理的证明中的递推方法说明数学归纳法的雏形。

刘徽首先通过第一次分割证明了在整个堑堵的 $\frac{3}{4}$ 中阳马与鳖腝的体积之比为 2:1，而在其 $\frac{1}{4}$ 中尚未知，这相当于在 $n=1$ 时候，刘徽原理在堑堵的 $\frac{3}{4}$ 中成立。刘徽认为第一次分割可以无限递推,“置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也”。然后，刘徽说：“按余数具而可知者有一、二分之别，即一、二之为率定矣。其于理也岂虚矣。若为数而穷之，置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也。半之弥少，其余弥细。至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉？”这相当于设 $n=k$ 时，刘徽原理在堑堵的 $\frac{1}{4^{k-1}}\times\frac{3}{4}$ 中成立，则刘徽原理在堑堵的 $\frac{1}{4^k}\times\frac{3}{4}$ 中成立。刘徽当然无法严格地表达出数学归纳法，但是他说“数而求穷之者，谓以情推，不用筹算”。“情推”具备了数学归纳法的基本要素。

总之，刘徽在论证《九章筭术》和他自己提出的公式、解法、原理时，主要使用了演绎推理，并且，现代逻辑学教科书中的演绎推理的几种最主要的形式，刘徽都使用了。这不仅在数学著作中是空前的，就严谨和抽象程度上，恐怕也是中国古代的最高水平。

数学证明

一般说来，推理形式的正确只能保证其前提和结论之间的或然的或者必然的联系，因此，推理形式的正确不能保证其前提正确，也就不能保证其结论是正确的。只有当前提是正确的时候，运用正确的推理形式，才能

获得正确的结论。这就是论证。论证是由推理组成的，推理是为论证服务的。像推理一样，只有演绎论证才能得到必然性的正确结论。由于数学具有严谨、精确、抽象的特点，因此论证数学公式、定理、解法的正确性时，只能采用演绎推理，并且前提应该是正确的，这种过程通常称为数学证明。前面所举的例子，由于其前提都是正确的，并且都是演绎推理，因而都是数学证明。特别应该指出，刘徽数学证明的依据都是已知其正确性的公理或自己已经证明过的命题。

数学证明根据其思路的方向不同，或者从予到求，或者从求到予，通常分为分析法和综合法两种。刘徽的数学证明以综合法居多，而对难度较大的命题，则往往采取综合法和分析法相结合的方法。

综合法是根据已知条件，援引公理及已经证明过的公式、解法，通过一系列推理，最终引导到论题。刘徽对《九章筭术》圆面积公式（1）的证明是一个典型的综合法证明。再以刘徽对已知勾股差与弦求勾、股的公式

$$a=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2c^2-(b-a)^2}-(b-a)\right],$$

$$b=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2c^2-(b-a)^2}+(b-a)\right]$$

的证明为例。刘徽说：

> 按图为位，弦幂适满万寸。倍之，减勾股差幂，开方除之。其所得即高广并数。以差减并而半之，即户广；加相多之数，即户高也。

其中有的推理，刘徽行文时省去了，将其补足便是：

$$c^2=a^2+b^2,$$

$$2c^2-(b-a)^2=2a^2+2b^2-(b-a)^2=(a+b)^2,$$

故

$$\sqrt{2c^2-(b-a)^2}=(a+b),$$

而

$$a=\frac{1}{2}[(a+b)-(b-a)],$$

$$b=\frac{1}{2}[(a+b)+(b-a)],$$

将（$a+b$）代入即完成证明。

显然，这是一个由已知的勾股定理及题设，逐步运用关系推理，以证明公式的综合法。其中的“弦幂适满万寸”是不必要的，还保留了归纳推理的某些痕迹。

分析法是从论题回溯论据的过程。对非常复杂的证明，刘徽往往采取综合法和分析法相结合的方式。比如关于《九章筭术》的鳖臑与阳马体积公式（2），（3）的证明，刘徽提出了刘徽原理（4）。他认为，为了证明这两个公式，只要证明刘徽原理（4）就够了。这是从论题回溯论据的分析法。为了证明刘徽原理，刘徽首先对由阳马和鳖臑合成的堑堵进行分割，证明在堑堵的$\frac{3}{4}$中，刘徽原理所指出的阳马与鳖臑的体积之比为 2:1 成立。这是综合法。接着，刘徽认为，如果能证明在堑堵剩余的$\frac{1}{4}$中可以知道其体积的部分中阳马与鳖臑的体积之比仍为 2:1，则就在整个堑堵中证明了刘徽原理。这又是分析法。随后，刘徽用无穷小分割方法和极限思想证明了这一点。这又是综合法。这种分析法与综合法相结合的方式对难度较大的复杂证明，常常可以起到画龙点睛的作用，使整个证明思路清晰，文字不冗长，不枯燥，又使读者容易抓住证明过程的关键所在。

刘徽的数学理论体系

中国数学史界有一个耳熟能详的提法，说《九章筭术》建立了中国古代的数学体系。这种提法似是而非。说“数学体系”，应该指数学理论体系。而一个理论体系，应该包含概念，由这些概念联结起来的命题，以及使用逻辑方法对这些命题的论证。对数学而言，这种论证，必须主要使用演绎逻辑。《九章筭术》只有概念和命题，没有留下逻辑论证。前已指出，从刘徽注可以探知，《九章筭术》时代实际上是存在着某些推导和论证的，但是，这些推导和论证是以归纳逻辑为主的。因此，我们认为，《九章筭术》没有建立中国古代数学的理论体系，只是构筑了中国传统数学的基本框架。在这个框架中，各章的方法之间，甚至同一章不同方法之间，除了均输术是衰分术的子术之外，几乎看不出它们的逻辑关系。

刘徽以演绎逻辑为主要方法全面证明了《九章筭术》的公式、解法，因此，到刘徽完成《九章筭术注》，中国传统数学才形成了数

学理论体系。逻辑方法的改变，必然导致一个学科内部结构的相应改变。事实上，刘徽的数学理论体系不是《九章筭术》数学框架的简单继承和补充，也不仅是为这个框架注入了血肉和灵魂，而且包括了对这个框架的根本改造。

近代人们常把数学形象地画作一株大树，通常是一株大栎树。树根上画着代数、平面几何、三角、解析几何和无理数。在这些根上长出强大的树干，即微积分。树干的顶端发出许多大的枝条，并再分成较小的枝条，即复变函数、实变函数、变分法、概率论等等高等数学的各个分支。实际上，早在 1700 多年前，刘徽通过深入研究《九章筭术》，“观阴阳之割裂，总算术之根源”，提出了数学之树的思想：

> 事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本知，发其一端而已。又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。

刘徽的数学之树“发其一端”，“端”就是数学之树的根。这个“端”是什么呢？刘徽说：

> 虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。至于以法相传，亦犹规矩度量可得而共，非特难为也。

规矩在这里指几何图形，即我们通常所说的客观世界的空间形式；度量是度量衡，在这里指客观世界的数量关系。因此，规矩、度量可以看成刘徽数学之树的根，数学方法由之产生出来。刘徽的话很形象地概括了中国传统数学中数与形相结合，几何问题与算术、代数问题相统一这个重要特点。根据刘徽的《九章筭术注序》及其为九章写的注中形诸文字者，我们大体可以将刘徽的数学之树的面貌勾勒于下：

数学之树从规矩、度量这两条根生长出来，统一于数，形成以率为纲纪的数学运算这一本干。刘徽以《九章筭术》的长方形面积公式、长方体体积公式（刘徽没有试图证明，可视为定义）及他自己提出的率和正负数的定义为前提，以今有术为都术，以比例问题、盈不足问题、开方问题、方程问题、面积问题、体积问题、勾股测望问题等作为主要枝条。又分出经率术，其率术和返其率术，衰分术和返衰术，重今有术，均输术，盈不足术和两盈两不足术、盈适足不足适足术，多边形面积，圆田术、圆周率和曲边形面积，刘徽原理和多面体体积公式，截面积原理和圆体体积公式，勾股术和解勾股形诸术，勾股容方和勾股容圆术，一次测望问题和重差问题，开方术和开立方术，正负术，方程术和损益术、方程新术，不定方程等等方法作为更细的枝条，形成了一株枝叶繁茂、硕果累累的大树，形成了一个完整的数学体系。如图 12 所示。

在这个体系中，刘徽尽管也使用类比和归纳逻辑，但主要地是使用演绎逻辑，从而将数学知识建立在必然性的基础之上。

在这个体系中，齐同原理、出入相补原理、极限思想和无穷小分割方法及截面积原理是刘徽所使用的主要原理。齐同原理用于计算问题，出入相补原理用于解决多边形和多面体体积，极限思想、无穷小分割方法和截面积原理用于解决曲边形面积、多面体体积和圆体体积。

这个体系“约而能周，通而不黩”，全面反映了当时中国人所掌握的数学知识，略知

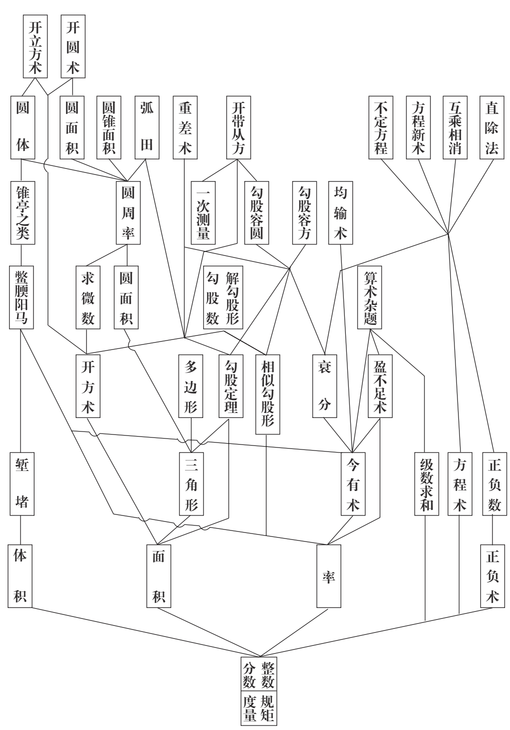


图 12 刘徽的数学之树

《九章筭术》的人即可看出九章的分布。在这里，数学概念和各个公式、解法不再是简单的堆砌，而是以演绎推理和数学证明为纽带，按照数学内部的实际联系和转化关系，形成了有机的知识体系。而刘徽数学理论体系与《九章筭术》框架的结构有着根本的不同，因此，它不是《九章筭术》框架的添补，而是对《九章筭术》的改造。

需要指出的是，说刘徽对《九章筭术》框架的改造，不是说在形式上，而是在实际上，在刘徽的头脑中。在形式上，刘徽没有改变《九章筭术》的术文和题目的顺序。在这种情况下，刘徽《九章筭术注》中没有任何循环推理，说明刘徽逻辑水平之高超。在文献注疏中以互训为重要方法的中国古代，这更是难能可贵的。可以说，刘徽的《九章筭术注》在内容上是革命的，而在形式上是保守的。然而，正是这种保守的形式，而不是撰著一部自成系统的高深著作，使刘徽的数学创造避免了《缀术》的厄运。

结论

通过上面的分析，我们可以得出以下几个结论：首先，刘徽是中国古代最伟大的数学家。祖冲之的数学水平不会低于刘徽，但《缀术》已不存，残存的几项成就都是刘徽为其奠定基础。宋元数学高潮的代表人物贾宪、李冶、秦九韶、朱世杰等，他们在高次方程数值解法和多元高次方程组解法等方面，水平当然超过刘徽，在其创造性上与刘徽也不分轩轾。但他们对极限思想和无穷小分割方法却一无所知，在演绎逻辑和数学证明上更是远逊于刘徽。考虑到刘徽比他们早七八百年至千年左右，因此刘徽是中国古代当之无愧的最伟大的数学家。

其次，刘徽《九章筭术注》奠定了中国传统数学的理论基础，建立了中国传统数学的理论体系。近年有“《九章筭术》与刘徽的数学体系”的提法。笔者认为这似是而非。刘徽《九章筭术注》无论从数学的研究方向，还是理论高度、逻辑方法，都与《九章筭术》时代有明显的不同，它的体系与《九章筭术》的框架根本不同，在数学上应该属于另一个阶段。

第三，以刘徽《九章筭术注》为代表的魏晋南北朝也是中国传统数学的一个高潮。学术界常有宋元是中国传统数学的高潮的说法。实际上，这是一个筹算高潮。笔者认为，中国传统数学的繁荣时期产生过三个高潮：第一个发生在春秋战国秦汉，是以《九章筭术》为代表的数学框架的确立；第二个发生在魏晋南北朝，是以刘徽《九章筭术注》（或许还有祖冲之）为代表的数学理论的奠基；第三个发生在唐中叶至元中叶，是筹算高潮。

作者简介：

郭书春，山东大学数学系毕业。中国科学院自然科学史研究所研究员，曾任研究所学术委员会副主任、全国数学史学会理事长。现任《中华大典》常务编委，《中华大典·数学典》主编。长期从事中国数学史研究，发表论文100余篇，著有汇校《九章算术》及其增补版、《中国古代数学》、《古代世界数学泰斗刘徽》、中法对照《九章算术》（合作）、《九章算术译注》、汉英对照《九章算术》（合作）等，主持编纂了《中国科学技术典籍通汇·数学卷》、《中国科学技术史·数学卷》等学术著作。