人心不足蛇吞象

金 磊

海盗问题

8 个海盗得到了 100 枚金币，他们要分配这些金币（金币的最小单位为 1）。海盗按实力排序依次为老大、老二……老八，他们的分配方式很“民主”：由老大提出一种分配方案，然后所有人（包括老大）投票表决，如果赞成率（即赞成人数与总人数之比）$p>0.5$，则方案通过，按此方案分配；反之，即若 $p\leq 0.5$，则老大将受到“惩罚”，强盗的唯一惩罚方式就是扔进海里喂鲨鱼。把老大扔进海里喂鲨鱼后，由老二继续提方案、大家表决……，以此类推。假设所有的海盗都足够聪明（傻瓜不适合从事海盗这种高风险的“职业”），海盗也都极度贪婪自私，各自为政，不群不党，也就是说他们在保护性命的同时会想方设法占有尽可能多的金币，在不损害自己利益的情况下尽量害死别人，当然，“盗亦有道”，他们都是“死理性派”，还是严格遵守规则的。那么这些金币最终会如何分配呢？

此类问题最早见于 1999 年《科学美国人》刊登过的趣题“海盗分金”，国内也有不少研究，本问题为“变种”版。

思路分析

乍一看此题无从入手，按常识来猜测，要么老大必死、要么平均分配、要么按实力强弱等差分配等。而事实上，对于陌生的、条件繁多的难题，最常用也是最重要的方法就是——探索法，从简单情况做起！正如《老子》所说：道生一，一生二，二生三，三生万物。因此我们可以从最简单的情形去列举以帮助我们理解题意，找到突破口。我们按强盗人数 n 从少到多考虑（其实这正是数学归纳法的精髓：有序思考），不妨设 n 个强盗按实力强弱顺序为 1 号，2 号，3 号……n 号，则

若 $n=1$，无需分配。

若 $n=2$，则无论 1 号提什么方案，2 号都会反对，这样通过率 $p\leq 0.5$，则 1 号被喂鲨鱼，2 号获得所有金币。

若 $n=3$，由上面的分析，1 号知道：若自己死掉，则 2 号必死；从而 2 号为保命，必然赞成自己的任何方案。因此他可以放心地把金币全部据为己有。分配方案为(100, 0, 0)，投票结果为 1 号、2 号赞成，通过。

这样我们就找到了这个问题的解决思路，以此类推，应该即能解决多个海盗的问题。

若 $n=4$，同理，1 号知道：若自己死掉，则分配方案如上，从而当前的 3 号，4 号将一无所获，因此他只要给 3 号、4 号各一个金币，即可收买他们，分配方案为（98, 0, 1, 1），投票结果为得钱者赞同，通过！

若 $n=5$，1 号需用 1 个金币收买 3 号，用 2 个金币收买 4 号、5 号中的某一个即可。故有两种方案：（97, 0, 1, 2, 0）或者（97, 0, 1, 0, 2）。

若 $n=6$，若 1 号死掉，则对最后两人 5 号、6 号而言，他可能得不到，也可能得 2 个金币，

平均值（即数学期望）为 1。因此 1 号只需各用 1 枚金币即可收买到他们（俗话说“隔夜的金不如到手的铜”，在收益相同的情况下，理性的人总是尽量避免冒险）。然后 1 号再用 1 枚金币收买 3 号即可。最佳分配方案只有一种为（97, 0, 1, 0, 1, 1）。

若 $n=7$，类似的，1 号除了各用 1 枚金币收买 3、5 号外，还需要用 2 个金币收买 4、6、7 中的任一个。故有 3 种分配方案，分别为：

（96, 0, 1, 2, 1, 0, 0）或（96, 0, 1, 0, 1, 2, 0）或（96, 0, 1, 0, 1, 0, 2）。

若 $n=8$，同理 1 号只要各用 1 枚金币收买 3, 5, 7, 8 号即可，故只有一种方案（96, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1）。

上述结果列表如下，其中 $n>3$ 投票时分得金币者都会赞同方案。

n	分配方案	备注
1	（100）	
2	（0, 100）	1 号死掉
3	（100, 0, 0）	
4	（98,0, 1, 1）	
5	（97, 0, 1, 2, 0）或（97, 0, 1, 0, 2）	
6	（97, 0, 1, 0, 1, 1）	
7	（96, 0, 1, 2, 1, 0, 0）或（96, 0, 1, 0, 1, 2, 0）或（96, 0, 1, 0, 1, 0, 2）	
8	（96, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1）	

意外结局

至此，8 个海盗分赃完毕，但分配结果却让人大跌眼镜！尽管规则看起来很公平，甚至还有些对老大不利，可是老大在充分利用规则和每个个体都是“死理性派”的情况下，各个击破，不但有惊无险，而且攫取了几乎全部金币（96%）。但是我们仔细想来，这也基本符合现实。比如某些垄断企业在平等竞争的招牌下占据着行业的绝大多数利润；再比如一些人宁为鸡头、不为牛后，宁愿在一个小地方做“土皇帝”也不愿意到一个大地方受人管制，原因可能就在于山高皇帝远，当个“老大”还是非常“有利可图”的。

其次，在此种极其绝对的假设下，老二永远得不到任何利益，因为他一直觊觎老大的位置，而老大知道无法收买他，因此选择将其隔离开来，退而收买其余的海盗。故老二得到的利益还不如后面实力比他弱很多的海盗。现实中确也有类似的事情，一个组织的二把手往往被一把手隔离，处于一个“上不着天、下不着地”的尴尬境地。

最后，此道数学题也从另一个方面展示了“囚徒困境”：每个个体利益的最大化并不是集体利益的最大化！在一个集体中每个人都“绝对理性”的情况下，如果我们人人抱着“人不为己，天诛地灭”的自私自利心态，一些人往往可以利用我们的“理性”，利用规则，对我们各个击破，使得最后我们感觉自己得到了便宜而实际却吃了大亏，最终每个个体都利益最大化，集体利益却远远没有达到最大化。

问题延伸

当然，本题还有很多问题值得思考，例如若海盗人数 n 继续增加呢？类似于以上的分析，我们可以得到，$2<n<201$ 时

当 n 为偶数时，设 $n=2k$，只有一种分配方案：（$100-k$, 0, 1, 0, 1⋯, 0, 1, 0, 1, 1）（其中 $100-k$ 后面有（$k-1$）个交错排列的 0，k 个 1）；

当 n 为奇数时，设 $n = 2k + 1$，1 号只需将上述中的 0 全换成 1，再用 2 枚金币收买某一个 1，剩下的留给自己即可，有 k 种分配方案，例如（$99 - k, 1, 2, 1, 0, 1, 0\cdots, 1, 0, 1, 0, 0$）（其中除 $99 - k$ 外，有 k 个 0，（$k - 1$）个交错的 1，1 个 2）等。

例如当 $n = 200$ 时，只有一种分配方案：$(0, 0, 1, 0, 1\cdots, 0, 1, 0, 1, 1)$（其中有 100 个 0，100 个 1）

如果海盗的队伍继续发展壮大，超过了 200 人，只抢到 100 枚金币的话，僧多粥少，海盗船长要收买超过半数的人似乎不太可能，他是否就死定了呢？下面我们接着往下分析：

当 $n = 201$ 时，1 号需各用 1 枚金币收买上述 $n = 200$ 中的 100 个 0，再加自己的一票，1 号险险保命，一文不名。

当 $n = 202$ 时，1 号要买通 $n = 201$ 时的 101 个 0，不可能，故老大必被投入大海喂鲨鱼，变成 $n = 201$ 时的情况。

当 $n = 203$ 时，2 号为保命，必然赞成，加上 1 号自己的一票，需要再买通 100 人，故只要买通上述 $n = 201$ 时 101 个 0 中的 100 个 0，共有 101 种方案。

同理，当 $n = 204, 205, 206$ 时，前面的必被投入大海喂鲨鱼，直到 $n = 203$ 时的情形。

当 $n = 207$ 时，1、2、3、4 号为保命，必然赞成，故需要买通 $n = 203$ 时的 103 个 0 中 100 个，故共有 C_{103}^{100} 种选择。

当 $n = 208$ 到 214 时，同理，前面的必被投入大海喂鲨鱼，直到 $n = 207$ 时的情形。

当 $n = 215$ 时，1 到 8 号为保命，必然赞成，故需要买通 $n = 207$ 时的 107 个 0 中 100 个，故共有 C_{107}^{100} 种选择。

以此类推，可以得到，当 $n > 200$ 后：

若 $n = 199 + 2^m (m > 0)$，则 1 到 2^{m-1} 号为保命，必然赞成，只需从 $199 + 2^{m-1}$ 情形时的 $99 + 2^{m-1}$ 个 0 中选出 100 个 0 即可，故共有 $C_{99+2^{m-1}}^{100}$ 种选择；

若 $n \neq 199 + 2^m (m > 0)$，设 $199 + 2^m < n < 199 + 2^{m+1} (m > 0)$，则前面连续 $n - 199 + 2^m$ 个强盗都要被喂鲨鱼，然后退成 $199 + 2^m (m > 0)$ 的情形。

当然，对于本问题，还可以思考当金币的数量变化时的情况，结果基本类似。还有当赞成率改变时，例如变成 $p > 2/3$, $p \geq 1/2$ 等，可以发现 p 的变化对结果还是影响蛮大的，请有兴趣的读者自行研究。

数学之外

上面我们解决了任意多个海盗的问题。从这个结果，我们也可以发一些感慨：在资源稀缺、数量透明且规则得以贯彻的情况下，做老大不但没有便宜，而且还很有风险（正所谓：枪打出头鸟也），韩非子都说过：“是以人之于让也，轻辞古之天子，难去今之县令者，薄厚之实异也！”上古尧舜禹等实行禅让制，有可能是因为在当时当头领风险很大，又没有收益，只能禅让，还会有叔齐、伯夷、许由等人主动逃避呢。当资源相对极大丰富的时候，做首领就能“垄断”绝大多数的物质了，这就是后来封建社会大家为当帝王将相争得头破血流的原因啦。

最后要说明的是，虽然本题在大家都是严格理性的基础上，有些结果比较“奇怪”，但这并不是“理性”的问题，而是分配规则不合理。因此我们不能因为这个结果而反对理性，恰恰相反，就是因为理性，我们才能发现这些“理性”的问题，用更理性、更科学的方法加以修正，而如果用其他非理性的方法更是无能为力，可证伪性、可修正性正是科学理性的重要标志！

当然，这一切的前提还是规则和财务的“公开化”，没有“潜规则”，而且所有人都严格按这个规则办事！

作者简介：金磊，2008 年毕业于西安交通大学。现任教于西安交大附中，除常规教学外，一直致力于特色教学的实践与研究。近年来在《数学通讯》等多个杂志上发表文章近 10 篇。