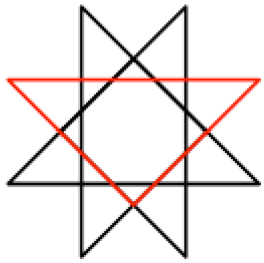
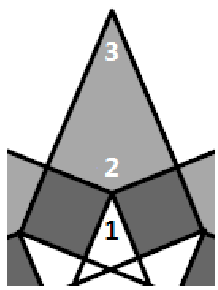
《数学文化》2013 年第 3 期数学趣题答案

1

由题图易知，白色正八角星是由 4 个等腰三角形构成的。



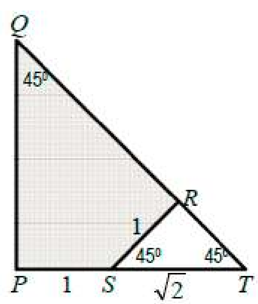
题中已指明，深灰色部分为正方形；因此，上图中红色边框三角形为等腰直角三角形。故正八角星的每个角均为 45°。



所以，∠ 2 ＝ 360° − 90° ×2 −∠ 1 ＝ 135°；

∠ 3 ＝ 360° − 90° ×2 −∠ 2 ＝ 45°。

对每个“风筝形” $QPSR$，延长 PS，QR 交于点 T，可作出如下图形：



$$S_{\Delta QPT}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2=\frac{3+2\sqrt{2}}{2};$$

$$S_{\Delta RST}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

所以“风筝形”的面积 $S_{\Delta QPSR}=S_{\Delta QPT}-S_{\Delta RST}=1+\sqrt{2}$

2

选一对方格填黄色，其余的填绿色，共有 C(49,2) ＝ 1176 种选法。

① 如果这一对方格关于棋盘中心对称，那么旋转 90°（或 270°）后将与另一对方格重合；

旋转 180° 后与自身重合。

这种方格共 (49 − 1)/2 ＝ 24 对，因此不同的“对称涂色法”有 24/2 ＝ 12 种。

② 如果这对方格不关于棋盘中心对称，那么绕中心旋转 90°，180°，270° 后，将分别与另外 3 对方格重合。故不同的“不对称涂色法”有 (1176 − 24)/4 ＝ 288 种。

综上所述，不同填色法的数量为为 12 ＋ 288 ＝ 300。

3

设第 i 对男女栓对的概率为 $P(A_i)$，则一对都没拴中的概率为 $1-P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_5)$。由容斥原理的基本公式，得

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cdots A_5)\\&=\sum_{i=1}^{5}P(A_i)-\sum_{1\le j\le i\le 5}P(A_i\cap A_j)+\cdots\\&\quad+(-1)^{5+1}P(A_1\cap A_2\cdots\cap A_5)\\&=C_5^1\frac{A_4^4}{A_5^5}-C_5^2\frac{A_3^3}{A_5^5}+\cdots+(-1)^{5+1}\frac{1}{A_5^5}\\&=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&P(\overline{A_1\cup A_2\cdots A_5})\\&=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\\&=\frac{11}{30}.\end{aligned}$$

补充：由以上计算可知，n 对男女都没栓中的概率，等于

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!},$$

即 $1/e$ 的泰勒展开式的前 n 项和。当 n 趋向于无穷，该概率趋向于 $1/e$。

4

总共有 100 种分数，200 个人，所以每个分数至少重复两次（抽屉原理）。如果每个分数重复两次，总分 ＝（1 ＋ 100）×100 ＝ 10100（高斯求和）。10101 − 10100 ＝ 1，还余下 1 分，把这 1 分分配给任何一人，就会造成 3 个人同分。故至少有三个人的分数相同。

5

不考虑特殊因素（例如闰年，双胞胎），并假设一年 365 天的出生概率是平均分布的。若班上只有两个学生，很显然，这两个学生生日不同的概率是 1 × 364/365。再加入第三个学生，若要满足三人生日各不相同，则只剩下 363 种选择，此刻的概率是 1 ×364/365 × 363/365。

以此类推，n 个学生生日各不相同的概率

$$Q(n)=\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\cdots\times\frac{365-n+1}{365}=\frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

当 n ＝ 50 时，$Q(n)\approx 3\%$。班主任的胜率低得可怜！这种与常识相悖的计算结果，被称为生日“悖论”。理解生日悖论的关键在于，任意两个人的搭配方式可以有很多。譬如 50 个人，就有高达 $C(50,2)$ ＝ 1225 种搭配方式。

本期数学趣题

1

一列长 200m 的火车沿长直轨道匀速前进。火车外面，一只闲的发慌的蜜蜂自车尾起飞，飞向车头，抵达后立即飞回车尾（全程匀速）。当蜜蜂回到车尾时，火车恰好行驶了等同于自身长度的距离。问这只蜜蜂总共的飞行路程是多少？

2

很多整数都能用由三个 2 组成的算式表达，譬如 4 等于 2 的 2 ＋ 2 次方的平方根，231 等于 $C(22, 2)$……那么，最小的不能用三个 2 表达的正整数是什么？为明确起见，本题可用的运算仅限加、减、乘、除、乘方、开根、阶乘、对数、排列数和组合数。

3

“若 x, y 均为无理数，则 x 的 y 次方一定为无理数”是真命题吗？请作出证明。

4

2012 是否可以写成两个整数的平方差？2014 呢？只要找准方法，解答或许会出乎意料地简单。

5

已知正方形 ABCD，只用一根直尺，能否作出面积为 ABCD 两倍的正方形？

注： 直尺只能用来作连结两点的直线，尺上面没有刻度，也不能做标记。