现代数学的特点、境界和应用

丁伟岳

本文是笔者在讲座中对同学们一些问题的回答。这些问题中大部分都是关系现代数学大局的问题，很深刻，也很难回答。问题本身是没有标准答案的，每个人会有不同的答案。下面是我的个人意见，不一定正确，仅供大家参考。

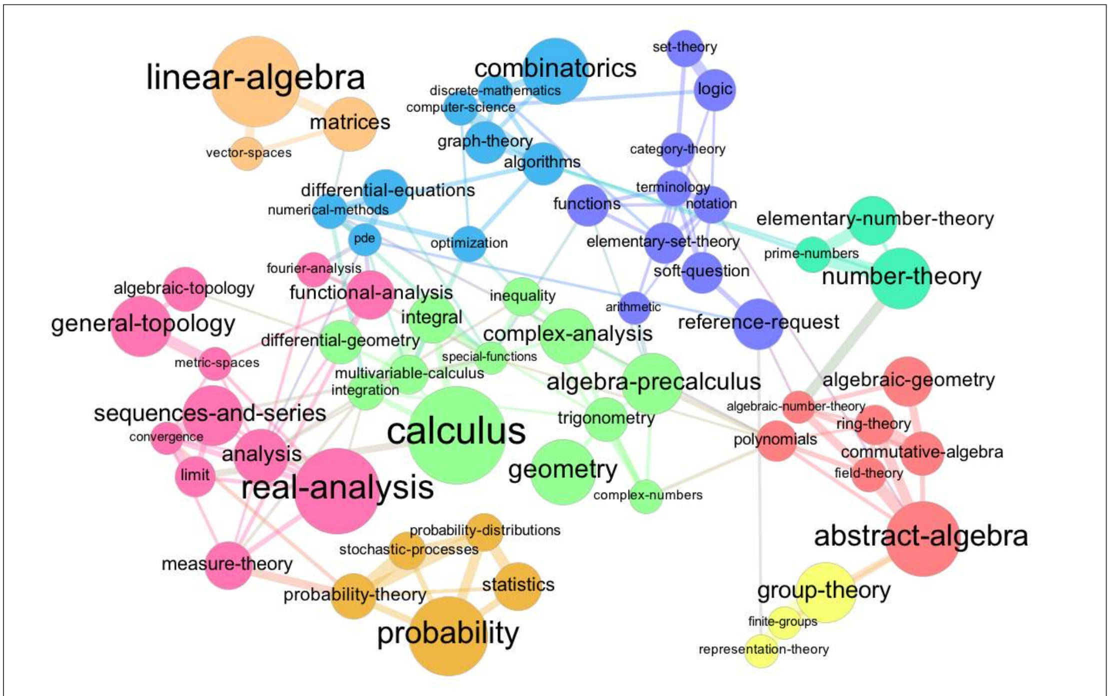
1. 现代数学的特点和现状

有的同学问：听说现代数学分支非常细，不同分支的人彼此不了解，这样还能出现总揽全局的数学大师吗？此外，数学的复杂是否使它远离“简单性”这个朴素的自然法则？

这是一个很大的问题，提这个问题的同学希望从总体上了解现代数学，这是非常好，非常值得鼓励的。但是要把这个问题说清楚并不容易。确实，现代数学分支繁多。按美国数学会的分类，数学科目可以分成 60 多个大类，每个大类下面又有几十个子类，总计有 3500 个以上的子类。肯定没有人能对所有这些分支都了如指掌，甚至于一个分支的专家也很难把分支里的所有数学了解得一清二楚。

但是，真正影响大局的数学却没有那么多。这就像世界上有 200 多个国家，但是影响全球格局的却只有少数大国。这种影响大局的数学可以叫做“主流数学”。即便在主流数学中也不是所有的问题都是平等的，还有主次之分。因此，如果能抓住主流数学中的主流问题，大体上就可以说是“总揽全局”了。至于说“大师”，他不仅能总揽全局，而且能通过他的工作影响全局。这样的人肯定很少，但也不能说一个没有，这要由历史来做定论。那么，为什么现在出不了牛顿、欧拉、高斯、黎曼这样的大师了呢？这有两个原因。首先，时势造英雄，不是每个时代都会出旷世英雄的。其次，即便是这样的英雄，他的历史地位也要经过历史的考验，并不是在当时就能确立的。

那么哪些是主流数学呢？回顾历史，现代基础数学从 17 世纪开始发源，经过 18 和 19 世纪的大发展和 20 世纪的完善，现代数学的基础部分，包括代数和数论、几何与拓扑、分析学的所有主



纯数学知识点

要分支，我们叫这些为经典分支，都进入了成熟期。所谓成熟是指，理论已经十分完善，而内在的发展动力则减弱了。因此，基础数学的单独分支的自身发展已不再是主流。取而代之的是综合与交叉，集多个分支的方法来解决以前无法解决的重要问题。费尔马猜想和庞加莱猜想相继被证明就是最好的例证。在我看来，现代数学的另一个特点是应用数学的兴起，随着现代科学技术的迅速发展，各个方面对数学的需求日益增长，推动了应用数学的崛起，它正成长为数学中一个不可忽视的主流。

从重要问题的来源看，基础数学内部一些最主要的问题是来自数论、拓扑以及几何，例如克莱研究所的 7 大问题中 4 个是关于纯数学的：两个来自数论（黎曼猜想，BSD 猜想），一个拓扑（庞加莱猜想），一个代数几何（Hodge 猜想）。另外 3 个多少与应用有关：Navior-Stokes 方程（流体力学），P-NP 问题（计算复杂性），Yang-Mills 理论（理论物理）。近年来，理论物理对基础数学的影响越来越大，这是值得注意的。

数学的复杂性不在于它的分支繁多，而在于它的深度和难度越来越大。世界既有简单的一面，又有复杂的一面。科学家的任务是把复杂的东西分析和解剖，化繁为简，找出对人类有用的东西。“复杂性”也是自然界的一个法则，它与“简单性”构成了自然界辩证的两个方面，缺一不可。

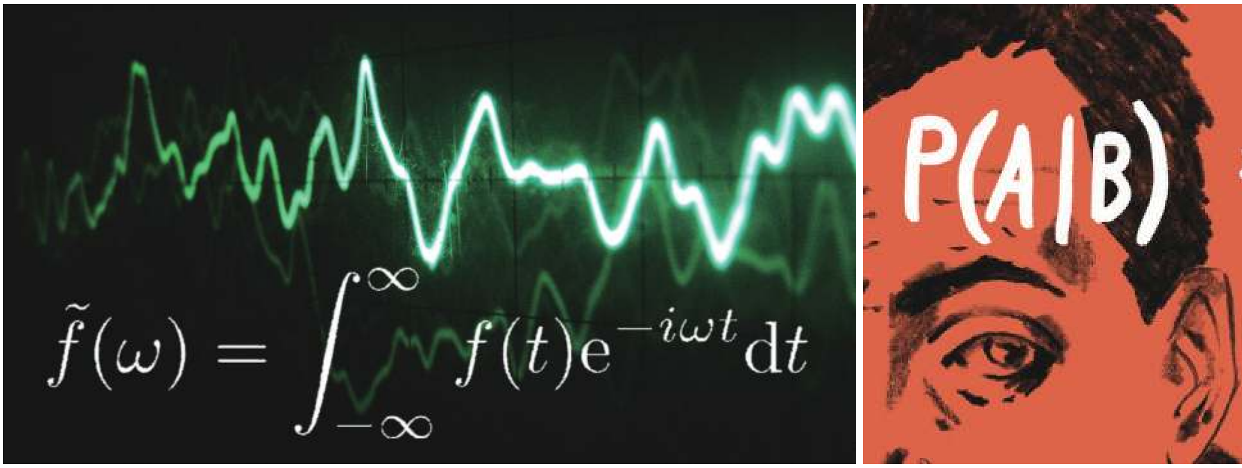
2. 数学的境界

有的同学问：数学大师的精神境界是怎样的？ 数学的最高境界是和艺术及文学相通的吗？

在我看来数学和艺术、文学是非常不同的。艺术和文学在很大程度上是创造性地表现人对现实世界的感受和观点，表现得好就能够引起人们的共鸣和感动。而数学更像是哲学，是一种客观真理，不以人的意志为转移，你只能去发现它而不能改造它。当然，数学家同艺术家、文学家之间也有共同点，那就是他们都必须有高度的创造性。虽然创造的目标不同，创造的过程是有相似之处的。

数学家有时也赞叹某人的数学工作如何优美，遗憾的是究竟有多美只有极少的人可以欣赏。既然数学的终极目标是追求数学真理，对于美的追求就是次要的。对于有些数学家喜欢舞文弄墨不必太认真，往往他是在表达一种个人的观点，未必全对；或者他只是在自我陶醉。

我想数学大师首先是一个普通的人，要尊敬他但不要神化他；要学习他，但不要被他的思想



应用数学：现代通讯、图像技术的法宝——傅里叶变换

观点束缚住自己的思想。这一点在中国特别重要，原因是中国的文化中有一种崇拜权威的倾向；而这是创造性的大敌。还需要破除的一点是对书本的崇拜，可能对我们的同学们比较重要。书是必须读的，但不能读的太多，太多就会挤压我们头脑中自由想象的空间。数学大师们最值得我们仰慕的“最高精神境界”就是他们思想的大胆和自由，这是他们能够发现新的数学和创造新的方法的根本。

然而，大师在成为大师之前的精神更值得我们学习。我认为最要紧的大概是：对数学强烈的兴趣与好奇心；对数学问题深入细致的观察以及独立思考和分析的习惯；坚持不懈的努力。在这些基础上，才有可能达到创造性思维的最高境界。

3. 数学的应用

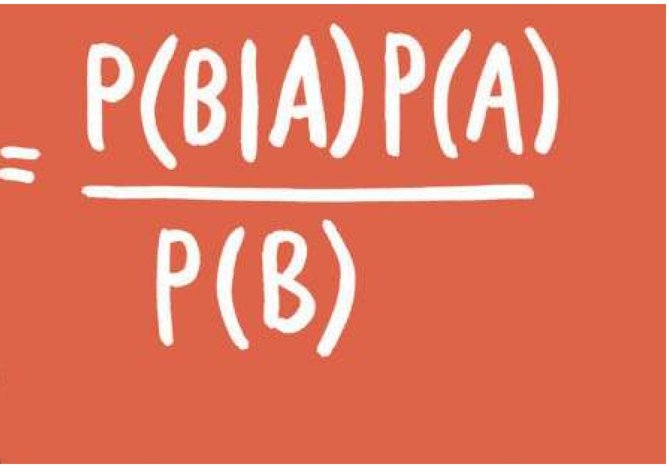
这方面的问题比较多，我选一些来回答。

Q1. 现代数学是否发展过快，以至于很多方面的理论还没有找到用武之地？

这里涉及一个问题：数学的用处究竟是什么？数学一开始是为了实用的目的而发展起来的，因为需要计算你拥有的财产、土地，等等，还要计算交易中的价格；然后，当科学发展起来的时候，必须要用数学来描述物体的运动，于是微积分就应运而生。这种例子数不胜数。但是，一旦数学发展到一定程度，它就产生了它自己的问题，不是完全为了实用，而在相当大程度上是为了满足数学家的好奇心，甚至是野心。费尔马猜想就是这样一种问题。我们知道解决这个猜想用了 300 多年，而在整个过程中这个问题对数学理论的发展，主要是代数数论和算术代数几何的发展有重要影响。现在数学理论已经发展到了极其完善的时代，数学家们仍然有很多野心，比如他们希望把流形按照各种不同的结构完全分类，他们希望建立在代数、几何、分析之间的更多深刻的联系（如 Langlands 纲领），等等。所有这些究竟有何用处是一个问题。好在我们有一个野心更大的邻居——理论物理学家，他们希望建立一种涵盖一切的物理理论，所谓“统一场论”，为了搭建理想中的宏大建筑他们把几乎所有的数学理论，特别是最新发现的理论，拿过去作为建筑材料和检验各种模型的试金石。这算不算有用还要时间的考验，因为物理学家们的理论最终是否成功，以及需要用到哪些数学，完全是未知的。我认为许多基础数学的理论是为了完善数学本身，具有方法论的意义。对于这些理论的评价要留待历史去做。

另一方面，实用的数学，通常叫做应用数学，得到了广泛的重视和迅速的发展。在我看来，这部分数学的发展最终必然会影响到基础数学本身。主流数学的概念也会随着时代的不同而变化。

最后，我想还有相当大的一部分数学是绝对无用的。原因是，这些数学的存在是由于现代大学的一些不尽合理的规定，你要求职、提升、加薪等等要看你有多少论文；于是许多没有其它用处的论文就被大量制造出来。



概率统计应用，充满应用魅力的贝叶斯公式

Q2. 我们是否可以只关心数学的应用，而只在不得已的时候去完善理论呢？

如果是以应用为目的，一开始理论总是不完善的。比如，牛顿建立微积分实际上是以力学为背景的，曲线在他看来是质点运动的轨迹，而导数被他叫做“流数”。为了应用必须归纳出微积分的运算法则，而这些法则的推导实际上是不严密的。微积分被完善成为“数学分析”用了大约 200 年的时间。其实，即使是基础数学，理论的完善也要有一个长期的过程。一开始总是从具体的问题出发，类似的问题被反复研究和解决才有可能提升为一种解决这类问题的理论。理论的产生使得解决这类问题有章可循，变得机械化。大体上说，一种研究是从问题的提出开始，而以理论的完善告终。

现在的许多实用领域，包括科学技术，也包括经济金融，给数学提出了许多新问题。面向这些问题的应用数学离成熟的理论还差得相当远。有的甚至没有办法建立比较适用的数学模型。建立数学模型的过程更像是做实验，你要试验各种不同的模型，唯一的判别标准是实践，而不是数学证明。在数学上无懈可击的模型，如果不能解决实际问题就必须加以否定。

Q3. 概率统计在数学中的地位不断上升的原因是什么？

我不是专家，只能谈一点粗浅的看法。我认为根本的原因是社会需求使得应用数学的地位不断上升，而概率统计在数学的应用中占有特殊重要的地位。随着科学技术的迅速发展，人们发现应用领域提出的大多数问题含有不确定性的因素，因而无法用完全确定的数学模型加以描述。比如，金融数学研究的对象是证券和其他金融产品的定价规律、风险控制和投资策略。各种交易对象的价格无时无刻不在变化，而影响这些变化的因素极多，比如：宏观和微观经济、国家政策、交易者的策略和心理变化，等等；而这些因素本身也在变化。这是一个极其复杂的过程，完全无法用确定性的数学来描述，只能把它看成“随机过程”；或者用过去的统计规律来推断未来。类似的情形还有许多，比如在生命科学、医药卫生、信息科学、通讯技术、心理学、企业管理等等方面，大量的问题只能用概率和统计的办法去寻找解决方案。另一方面，由于高速计算机的广泛应用，原来无法进行的大规模统计计算变得轻而易举；这使得统计方法的应用遍及几乎所有的行业。

若干年前在美国科学基金会的一份报告中提出了一种观点：数学是所有高科技的核心；而且还提出了“数学技术”的说法。我相信，数学对于现代科学技术将发挥日益重要的作用，而这将会对数学本身的发展起重要的反作用。

作者简介：

丁伟岳，著名数学家，北京大学数学院教授、中科院数学与系统科学研究院研究员，1997 年当选为中科院院士。曾任中国数学会副理事长。