

数学文化课的教与学

——以“有限与无限”一节为例

顾沛

教学的目的，不仅仅是传授知识，更重要的是育人。所以我们谈教学，不仅需要关注教师的“教”，更要关注学生的“学”；而这两者是密切联系的，学生的“学”，是在教师指导下的“学”。教师在教学中的责任，不仅是对学生的“传道、授业、解惑”，更是学生学习的组织者、引导者、启发者和合作者。教学的效果，不仅要看学生“学会”知识的多少，更要看学生的成长程度，看学生思维品质的改善程度，看学生自学能力的提高程度，看学生是否逐渐“会学”。

从注重“学会”发展到注重“会学”，形式上是一个词的“字序”的改变，实质上是教学理念的变化。“学会”，主要关注的是学习的结果，“会学”，则不但要关注学习的结果，也要关注学习的过程，在学习中学会学习；对教师而言，就是不但要关注教学的结果，也要关注教学的过程，在教学过程中引发学生的学习兴趣，改良学生的学习习惯，培养学生的自学能力。这也是“教，是为了不教”这一名言的真谛。

为了学生的成长，教师备课就不能“见物不见人”，即，教师不能仅仅备知识，还要备学生。所谓“备课备学生”，就是以知识为载体，以学生为主体，备课时创设合适的情境，引导学生在该情境中逐步地建构知识网络。因此，教师备课，一定要设计教学过程中学生的活动，设计师生互动，生生互动；一定要考虑到学生已有的知识和能力储备，可能的思维活动、心理因素；一定要预计到学生可能出现的困难和障碍，给出有针对性的解决该困难、克服该障碍的办法。

为了学生的成长，教师上课就更加不能“见物不见人”，即，教师不能仅仅关注知识的讲授，更要关注全面育人，更要在创设的情境中关注和组织学生的学习，扮演好引导者、启发者、合作者的角色。特别当学生在课堂上如果出现教师备课时未曾预想到的困难和障碍，或者提出意外的问题时，教师要“以人为本”，果断地改变预设的教案，把学生的问题当作课堂上生成的教学资源，因势利导，改善学生的思维品质，帮助学生建构合理的知识网络，提高学生的数学素养。

总之，笔者认为，数学课程的教学需要特别关注“育人为本”、“创设情境”、“师

生互动”、“建构知识网络”、“提高思维品质”、“学会学习”等核心要素。

一般的数学课是如此，数学文化课则更加应该如此。因为数学文化课以文理交融、素质教育为特色，所以更加应该“以人为本”，更加应该关注学生思维品质的改善和数学素养的提高，更加应该有较多的师生互动。

为了结合教学具体地说明上述观点，本文以南开大学数学文化课中“有限与无限”一节为例，与大家交流、讨论。有兴趣的读者还可以参看“爱课程”网上“中国大学视频公开课”里笔者讲授的“数学文化”课第三讲“有限与无限”的实况录像。

“有限与无限”一节，在南开大学是90分钟的课，内容较多，包括芝诺悖论、“有无限个房间”的旅馆、无限与有限的区别和联系、潜无限与实无限、关于“无限”的思考五个部分；限于篇幅，本文仅以“有无限个房间”的旅馆、无限与有限的区别这两个部分为主，有详有略地展开教学过程，并且以“注释”的方式与大家交流。特别是想说明，教师在教学中如何以育人为本，如何作为学生学习的组织者、引导者、启发者、合作者，如何激发学生的好奇心和探究兴趣，同时也说明如何提高学生的数学素养，等等。

因为本文着重谈教学，所以当教学过程体现“必要的铺垫”、“故意出错”等教学方法、教学艺术时，也会做一点注释。

其中“有无限个房间”的旅馆，就是经典的“希尔伯特旅馆”；为了教学的需要，笔者把该内容扩充了，发展了。教学过程如下。

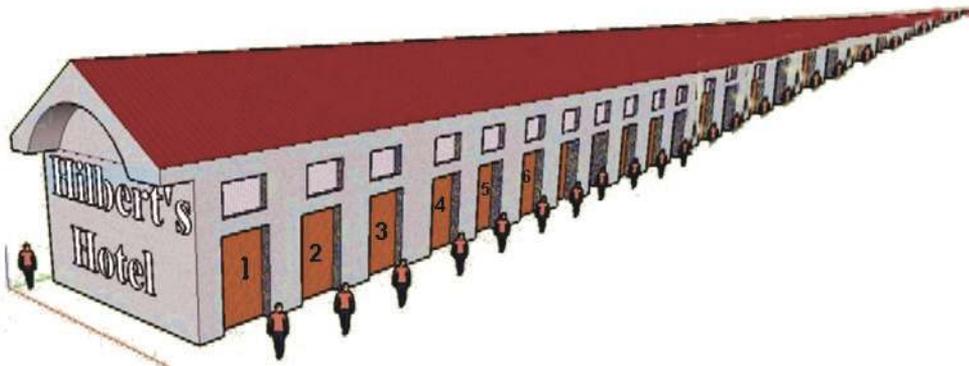
师：大家都在学高等数学了，那么高等数学与你们中学、小学学习的初等数学有什么显著的不同呢？我曾经在过去的数学文化课上对这一问题组织课堂讨论，比较有共识的是两点：一点是初等数学以研究常量为主，而高等数学则发展到以研究变量为主；另一点是从初等数学主要研究有限，发展到高等数学也要研究无限。高等数学不但研究范围发展到无限，而且研究手段也发展到无限，像取极限，定义导数、定积分，这都是用无限为手段的。所以作为一个大学生，知道无限与有限有什么本质的区别，又有什么联系，是一种基本的数学素养。

大数学家外尔(H. Weyl, 1885-1955)说：“数学是关于无限的科学。”我们由此可以看到：“无限”非常重要。

【注释：这是铺垫、引课，让学生知道本节课的论题——无限，有何重要性，让学生重视这节课，从提高数学素养的角度学好这节课。**】**

现在我们来讨论无限与有限的本质区别(注：本文下面略去了讨论无限与有限的“联系”的部分；而真实的数学文化课堂上是有该部分的)。我们设计一个情境：有无限个房间的旅馆。客观世界的旅馆都只有有限个房间，那么客满以后，如果再来客人，老板就不能安排了。可是有无限个房间的旅馆，客满以后如果再来客人，老板将还能安排。我们想由此说明无限与有限的本质区别。有人可能会说，“无限个房间的旅馆，也不可能客满啊，因为地球上只有有限个人。”这个想法是对的。但是，其实不但无限个房间的旅馆不可能客满，而且地球上也不可能无限个房间的旅馆，就像地球上只有有限个人一样。所以，我们是为了讲“无限与有限的本质区别”这个话题，在思维上创设了这样一种情境：我们假设地球上无限个房间的旅馆，也假设地球上无限个人。

【注释：根据教学经验，这是一些学生在课堂上可能产生纠结的问题：无限个房间的旅馆怎么会客满？这虽然是一个枝节的问题，但有时可能整节课都影响到某些学生的思维。从“以人为本”的观念出发，教师不应掩盖或回避这一问题，而应主动揭示和化解这一问题，即告诉学生：假设一个有无限个房间的旅馆，也假设地球上无限个人，这是我们为了讲清问题，在思维上创设的一种情境。**】**



希尔伯特旅馆

但是在数学文化课的这个场合，我们要把“无限”这个概念简化一下。其实无限有很多种，我们这里所说的“无限”，则都是最简单的无限——“可数无限”。什么是“可数无限”呢？自然数集合的无限叫“可数无限”。1, 2, 3, 4, 5……这样一直数下去都数不完，这个集合的无限就是可数无限。

那么下面的说法就有关数学素养了：过去我们讲“客满”，都是对有限个房间的旅馆来讲的，现在则是讲无限个房间旅馆的客满，那就要把“客满”这个概念推广。虽然是同样两个字，虽然是同一个词“客满”，但是用的范围扩大了，其定义就应该推广。有“应该推广”这种想法，与没有这种想法的人是不一样的，这体现了两个人数学素养的不同。大家在数学课上或者其他课上，也一定遇到过这种情况：原来已有的一个概念，后来要在更大的范围里面，给出它的定义来，这就是“推广”。这种推广了的定义就要抓住原来事物的本质，推广以后，如果对象回到原来，推广了的定义又跟原来的意思应该是一样的，了解这种推广概念的原则，是基本的数学素养。

【注释：这里强调在这样的情境下“能够想到”一个概念需要推广，是一种数学素养，就表明教师在关注学生思维品质的改善，而不是仅仅关注知识的传授。】

那么，“客满”的本质是什么呢？客满的本质，其实是“每个房间都住上客人了”。这里有一点应该注意，你不能把“客满”定义为“再也住不进去新的客人了”，因为那样我们下面就无法展开讨论、说明问题了。我们现在这样来定义“客满”——“每个房间都住上了客人，叫客满。”它确实描述了“客满”的本质。所以这个推广到无限个房间旅馆“客满”的定义，回到有限个房间旅馆的情况，也是正确的。

为了说话简单，不妨设一个房间只住一个客人。也就是说，我们假设有可数无限个房间的一个旅馆，又有可数无限个人，每个房间住了一个人，这个旅馆就客满了。那么，下面第一个问题是，这个旅馆客满后又来了一位客人，老板说还能安排，老板怎么安排？哪位同学有想法，可以举手回答。（有几个学生举手。）

师：好！请后边这位同学说。

生：让一号房间的客人移到二号房间，让二号房间的客人移到三号房间，……，依此类推，最后让新来的客人住到一号房间。

师：好！我们给他鼓掌！（掌声）他说得很好！跟我下面屏幕上打出来的解答是基本一样的。只是语言欠缺一点完整性。数学语言也是数学文化的一部分。

【注释：我们强调教学应以育人为主要目的，教师在课堂上就应该对主动举手回答问题的学生“适度表扬”，给学生以正面的情感态度的影响；但是对于学生回答中的缺点



2009年10月14日作者在北大百年讲堂数学文化节开幕式上作报告

和不足,又必须实事求是地、有分寸地指出,这才是科学的态度,也会给学生正面的影响。】

现在我把这个话说完整,请各位听听。

【注释:数学语言,也是数学文化里的组成部分,所以数学文化课的课堂上教师应该重视自己的语言示范,也重视对学生表述的补充和纠正。这也是教师作为学生学习的引导者、合作者的体现。】

第一句话说,我们首先给所有的房间编号,从“一”开始,一号房间、二号房间、三号房间、四号房间、……,等等。第二句话说,老板重新安排原来客满的客人。然后就是这位同学刚才说的,让一号房间的客人搬到二号房间去住,让二号房间的客人搬到三号房间去住,……,让 k 号房间的客人搬到 $(k+1)$ 号房间去住。那, $(k+1)$ 号房间的客人搬到哪儿去了?(学生齐答)搬到 $(k+2)$ 号房间去了。

【注释:这句齐答的话,是照顾数学文化课堂里的少数文科学生,这也是“以人为本”观念的体现。】

下面还应有一句:“这样,原来的客人就都有房间住了。”如果没有这句话,逻辑上就不完整。最后一句话说,“并且空出了1号房间,正好让新来的客人去住,问题就解决了。”(课堂教学时的PPT上,这段叙述的图示如下。)



这样我们看到:原来有限个房间的旅馆客满之后如果再来一位客人,是不能安排的;而有可数无限个房间的旅馆客满之后再客人,就还能安排。这说明了无限与有限确实是有着本质的区别。

师:好!接下来看第二个问题:还是这个旅馆,还是客满,这次客满以后,来的不是一个客人,而是来了一个旅游团,旅游团里有可数无限个客人。老板说还能安排。

怎么安排？现在给你们一分钟的时间讨论，有想法的同学举手回答。（……有学生举手）

师：请这位同学说。

生：和刚才那位同学讲的方法类似，让一号房间的客人搬到二号房间住，二号房间的客人搬到四号房间住，依此类推，让 k 号房间的客人搬到 $2k$ 号房间住，就是说双数的房间都住了客人，将单数的房间空了出来，让旅游团的人来住。

师：好，不错！（掌声）说的也非常好，跟我们屏幕上也基本一样。（这段叙述在 PPT 上的图示如下。）



师：好，再看接下来的第三个问题，可能会有一些难度：还是这个旅馆，还是客满，这次客满以后，来的不是一个客人，也不是一个旅游团，而是来了一万个旅游团，每个旅游团里都有可数无限个客人。老板说还能安排。怎么安排？现在再给你们一分钟的时间讨论，有想法的同学举手回答。

大家有想法就可以举手，不一定想的那么十全十美才举手。（……有学生举手）

师：请这位同学说。

生：老板重新安排原来的客人，然后让一号房间的客人住到第一万零一号房间，二号房间的客人住到第二万零一号房间，依此类推，这样就空出了许多个房间，然后让新来的一万个旅游团的人住到里面。

师：好，请坐。他的思路基本上是正确的，但表达的细节有一些不当，谁来纠正或者补充一下。（有学生举手）请这位同学说。

又一学生：老板重新安排原来客满的客人，把一号房间的客人安排到第一万零一号房间，但二号房间的客人不是安排到第二万零一号房间，而是应该安排到第二万零二号房间，依此类推，把 k 号房间的客人安排到 $10001 \times k$ 号房间，这样，原来的客人就都有房间住了，但是还空出了许多个房间，可以把新来的这些旅游团的客人安排进去入住。

【注释：这里的生生互动，效果较好，也进一步提升了课堂讨论的气氛。同时又对有想法但还没有想清楚的同学一个启发。这也是教师作为课堂组织的体现。】

师：好。他说的是对的，纠正了前面那位同学表述的错误，并且前面的一段话也说完整了，只是后面的部分仍然说得不很清楚。大家现在都在积极地思考，积极地举手，积极地讨论问题了，非常好。我们希望培养学生这种积极思维的习惯，同时，好的语言也是大家应该学习的。那，什么是好的语言呢？这里有一些标准：第一是准确，第二是严谨，第三是规范，第四是完整，第五是简洁。下面我把刚才这位同学前半段的话复述一遍，然后对后半段话做一些改进。……他的后半段说的是对的，但是还可以说的更准确，更完整。现在我这样说：老板重新安排原来的客人，让原来一号房间的客人搬到第一万零一号房间，原来二号房间的客人搬到第二万零二号房间；依此类推，原来 k 号房间的客人搬到 $10001 \times k$ 号房间。这样，原来的客人就都有房间住了，同时每两个客人的住房之间都空出了一万个房间，这样就有了一万个又一万个的空房间（这里和下面，教师用教鞭指着屏幕上相应的位置），第一个一万个空房间，让新来的一万个旅游团每个团的一号客人住，第二个一万个空房间，让这一万个旅游团每个团的二号客人住，依此类推，第 k 个一万个空房间，让这一万个旅游团每个团的 k 号客人住，等等，这样，就把这新来的一万个旅游团中的每个客人都安排住宿了。（这段叙述在 PPT 上的图示如下。）