# 万圣节时说点与鬼神有关的数学

蒋 迅　王淑红

万圣节（Halloween），又称鬼节，为每年的 10 月 31 日。一年一度的万圣节又将如期而至，作为数学人，仿佛只有在节庆中品出数学的味道才会有某种存在感和满足感。乘兴漫步数学花园，竟然有幸拾得几个与鬼神多少有关的数学掌故，聊以心慰，且与诸君共享，比如吸血鬼数、康托尔函数、骨骼、大魔群、小魔群、魔群李代数、魔群月光猜想、纳皮尔之骨、阿涅西箕舌线、兽名数目、超自然数、蛛网图和墓碑等。看到上述魔鬼色彩的数学，你是否能感受到数学无处不在，数学的魔力非比寻常呢？许多学生很清楚数学的魔法无边，却畏惧其所谓的艰深而踌躇不前。如果全社会营造出一些数学的话题，相信数学就不再是一条畏途。一些博客、论坛、科普正在担当着这样的角色。德国儿童文学创作家恩岑斯伯格 (Hans Magnus Enzensberger，1929-) 在 68 岁高龄出版力作《数字魔鬼》[1]，目的就是为了解除少年儿童学习数学的恐惧。

魔鬼不仅有凶神恶煞之义，还可以形容鬼斧神工的艺术、严格的训练、完美的身材以及杰出的艺术家。唐代浪漫主义诗人李贺虽在 26 岁英年早逝，但因其诗歌具有波谲云诡、迷离惝恍的鬼魅风韵，素有“诗鬼”之称。西方有很多关于魔鬼的传说，比如《圣经》中的恶鬼，别名撒旦，传说原为天使，因犯罪被打入地狱，从此专与上帝作对，成了诱人犯罪的恶鬼。在中国也有驱除鬼怪的传统，“千门万户曈曈日，总把新桃换旧符”描写的就是人们在新年用门符来“驱邪”和躲避瘟疫。对于中国人，最熟悉的鬼故事大概就是清代著名小说家蒲松龄的《聊斋志异》了。但是中国古代科举考试把数学打入了冷宫，我们不但未能看到像西方那样的现代数学，也未能出现这类聊斋味道的趣味数学。如果大家有兴致，就让我们用上面有点鬼魅色彩的数学掌故来做背景和道具，演绎一部万圣节的数学聊斋吧。

[1] （德）恩岑斯伯格著，朱显亮译，数字魔鬼，北京：人民文学出版社，2008.

## 1. 吸血鬼数 (vampire number)

恐怖片里有吸血鬼，数学上有一种数以吸血鬼命名。吸血鬼（vampire）是传说中的超自然生物，通过饮用人类或其他生物的血液，能够令自身长久生存下去。在以吸血鬼小说出身及闻名的美国作家安妮·莱斯（Anne Rice, 1941-）的笔下，吸血鬼在很多方面都与人类相似，但是却隐秘地生活着。吸血鬼数就是对这一特点的一种数学刻画。吸血鬼数是傅利曼数（Friedman number）的一种。傅利曼数是在给定的进位制中，能够用组成数字通过四则运算、括号和幂组成式子，结果是自己的数，例如 347 是一个傅利曼数，因为 $347 = 7^3 + 4$。吸血鬼数则限制运算为乘法，它是从合数 $v$ 开始，该合数为 $n$ 位数（且 $n$ 为偶数），然后用 $v$ 的各个数字组成两个 $n/2$ 位数的正整数 $x$ 和 $y$（$x$ 和 $y$ 不能同时以 0 为个位数），若 $x$ 和 $y$ 的积刚好就是 $v$，那么 $v$ 就是吸血鬼数，而 $x$ 和 $y$ 则称为尖牙（fangs）[2]。

例如 1260 是吸血鬼数，21 和 60 是其尖牙，因为 $21\times60 = 1260$。可是 $126000 = 210\times600$ 却不是吸血鬼数，因为不存在符合“吸血鬼数”定义的乘法分解。又例如 1023 是 31 和 33 的积，但 31 和 33 并没有用到原数的所有数字（例如 0），易见 1023 不是吸血鬼数。

吸血鬼数是由柯利弗德·皮寇弗（ Clifford Alan Pickover）于 1994 年在 Usenet 社群 sci.math 的文章中首度提出的。后来他将吸血鬼数写入“Keys to Infinity”[3] 一书的第 30 章。最初的几个吸血鬼数为：

1260, 1395, 1435, 1530, 1827, 2187, 6880, 102510, 104260, 105210, 105264, 105750, 108135, 110758, 115672, 116725, 117067, 118440, ……

一个吸血鬼数可以有多对尖牙，例如

$125460 = 204 \times 615 = 246 \times 510$

$13078260 = 1620 \times 8073 = 1863 \times 7020 = 2070 \times 6318$

$16758243290880 = 1982736 \times 8452080=2123856 \times 7890480 = 2751840 \times 6089832=2817360 \times 5948208$

伪吸血鬼数和一般吸血鬼数不同之处在于其尖牙不强制是 $n/2$ 位数的数，故伪吸血鬼数的位数可以是奇数。把这样的数称为弱吸血鬼数可能更合适。

柯利弗德·皮寇弗（1957-）

[2] E. W. Weisstein, Vampire Numbers, MathWorld.

[3] C. A. Pickover, Keys to Infinity, New York: Wiley, 1995.

2002 年，卡洛斯 • 里维拉（Carlos Rivera）定义了质吸血鬼数（prime vampire number），亦即尖牙是质因子的吸血鬼数，第一个质吸血鬼数是 117067 = 167 × 701。第二到第五个质吸血鬼数是：124483, 146137, 371893, 536539。

皮寇弗是 IBM 沃森研究院的生化学家，也是一位作家和编辑，经常在数学和科幻方面写科普文章，至今有超过 30 本关于电脑与创意、艺术、数学、黑洞、人类行为和智慧、时间旅行的书。除了吸血鬼数，他还定义阶乘数（factorion）、杂耍数列（juggler sequence）等许多概念。吸血鬼数悄悄地隐身于我们的庞大数学系统之中，但至今仍然有许多没有被发现。原来吸血鬼数、尖牙这些名称只是名字有些可怕和触目惊心，看来发明者取这样的名字只是为说明它们的内涵，表达一种神奇吧。

## 2. 恶魔楼梯 (devil's staircase)

函数是数学中的一个重要名词，从中学开始便进入我们的视线，但不同的时期不同的科目里对它的定义形式也不同。有一种连续函数叫康托尔函数（Cantor function），又被称为恶魔楼梯。为什么搁此恶名呢？原来这个函数的图像看似陡峭，但是它的导数却几乎处处为零。这就是说，它的图像几乎处处是平稳的，但是它又实现了大幅度变化。谁要是从这样的楼梯下楼，一定有下地狱的感觉。如果配上利盖蒂 • 捷尔吉 • 山多尔（ Ligeti György Sándor，1923-2006）的钢琴第 13 练习曲“恶魔楼梯”（The devil's staircase）一起听，更是觉得脚下一步一颤。特别是最后结尾处，音箱的回音让人感觉到身临其境。下面让我们来感受一下恶魔是如何施展法力的吧。

首先，我们定义康托尔集 [4]C：

将基本区间 [0，1] 用分点 1/3，2/3 三等分，并除去中间的开区间（1/3，2/3），把余下的两个闭区间各三等分，并除去中间的开区间（1/9，2/9），（7/9，8/9）。然后再将余下的四个闭区间用同样的方法处理。


把这样的步骤继续进行下去，我们得到了一个由无穷多开区间组成的开集 $G = (1/3,2/3) \cup (1/3^2, 2/3^2) \cup (7/3^2,8/3^2) \cup (1/3^3,2/3^3) \cup (7/3^3,8/3^3) \cup (19/3^3,20/3^3) \cup (25/3^3,26/3^3) \cup \cdots$。康托尔集为其余集：$C = [0, 1] - G$。

下面，我们在 [0, 1] 区间上定义康托尔函数：

引进 [0, 1] 中小数的三进制表示来考察，例如 1/3(10) = 0.1(3)（括号中的数表示进制），2/3(10) = 0.2(3)，1/9(10) = 0.01(3)，2/9(10) = 0.02(3)，7/9(10) = 0.21(3)，8/9(10) = 0.22(3)，但是 1/3 又可表示成 0.02222⋯(3)，这里约定用无限表示。基于此可以发现，(1/3, 2/3) 区间中的数用三进制表示时，第一个不为 0 的数一定是 1。归纳可证，

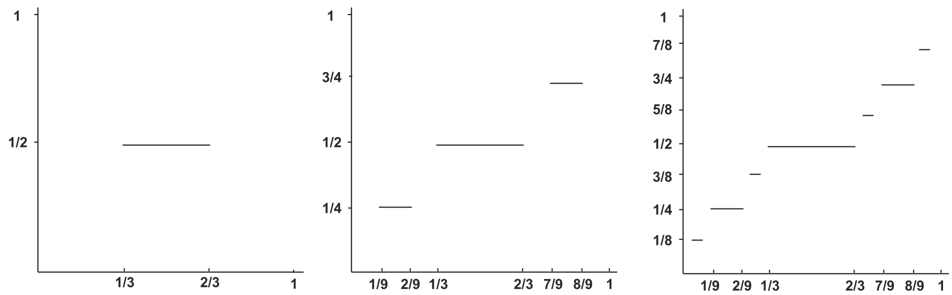
[4] J. Miller, Earliest Uses of Symbols of Set Theory and Logic, 2007.

$G$ 中的点，表示成三进制时，必有一位为 1，而 $C = \{0.x_1x_2x_3\cdots(3)$：每个 $x_i$ 为 0 或 2$\}$。

现在定义函数 $f$: $C \to [0, 1]$，对 $C$ 中任意一点 $x$，将 $x$ 用三进制表示：$x = 0.x_1x_2x_3\cdots(3)$。令 $y_i = x_i/2$，则定义 $f(x) = 0.y_1y_2y_3...(2)$

则对 $G$ 中区间的端点，函数值相等。如 $f(1/3) = f(0.02222...(3)) = 0.01111(2) = 0.1(2)$，$f(2/3) = f(0.2(3)) = 0.1(2) = f(1/3)$ 。其他区间端点同样可得。

将 $f$ 的定义域扩展到 $[0, 1]$，使 $G$ 中区间里的所有点的值定义为端点的值。由于 $C$ 中没有孤立点，且 $f$ 在 $C$ 上是单调的，这样 $f$：$[0, 1] \to [0, 1]$，是连续的。这个函数在 $[0, 1]\backslash C$ 上是可导的，且导数恒等于 0。而 $C$ 的测度为零，所以康托尔函数的导数在 $[0, 1]$ 上几乎处处为零。




如果读者感觉康托尔集和康托尔函数的定义稍微复杂一点，可以看看康托尔函数前三步的图示（如下图），就会对这个恶魔的楼梯有一个直观的体验。

《中国证券报》在 2011 年曾刊登过一篇股市分析文章 [5]，作者观察到，从图形线条上升的表面来看，股市中某些股票的分时图形和恶魔的楼梯图形相似，说如果发现了这样的分时图形，对于投资者的即时投资决策将起到很好的作用，可以快速获得最佳的短线收益。作者建议一旦具有恶魔的楼梯分时放量图形出现，投资者可据此做出投资决策。信不信只能由读者判断。也曾有人连续杀人作案，竟然是按恶魔楼梯的公式进行的。一个人把数学用到穷凶极恶的地步，很可悲，也不是数学的本意。侦探们学好数学可能会对断案有所裨益。

康托尔函数不是唯一的恶魔楼梯。闵科夫斯基问号函数（Minkowski question mark function）号称光滑恶魔楼梯，柯尔莫哥洛夫的圆映射（Kolmogorov's circle map）由阿诺尔德之舌（Arnold tongues）而得。更多的魔鬼楼梯还在等待读者们去寻找。

## 3. 骨骼和骷髅 (skeleton)

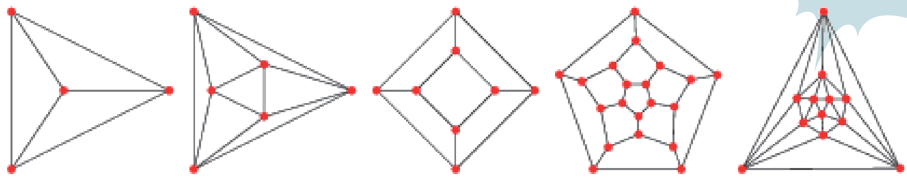
骨骼和骷髅在英语里是同一个词 skeleton。谈到骷髅，会使人不觉联想到武侠大师

[5] 依据"恶魔的楼梯"短炒 http://stock.hexun.com/2011-09-12/133305824.html

金庸的《射雕英雄传》1983 年版电视剧里的梅超风，她似乎一度成了厉鬼、恶魔的代名词。直到舞蹈家杨丽萍 2003 年版的梅超风面世，重在刻画其灵魂和精神，同时也没有淡化和美化其邪恶，将有害于身心健康的血腥暴力升华为一种悲剧美，才慢慢消弱了她的恶魔印象。

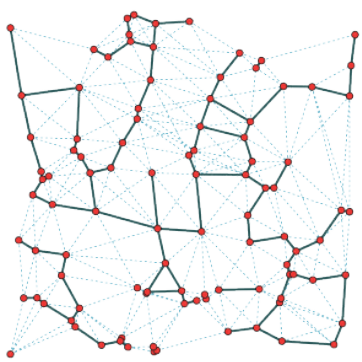
数学里用到骨骼和骷髅的地方不止一个。

在代数拓扑中，把一个 $p$- 骨骼[6]定义为复形 $k$ 的一个单纯子复形（simplicial subcomplex），即 $k$ 的所有维数至多是 $p$ 的单形（simplices）的集合，记作 $k^{(p)}$。



把一个多面体的面以其边和顶点代替，得到的图形就是多面体的 0- 骨骼或 1- 骨骼。上面的图形就是对应柏拉图立体（platonic solids）骨骼的多面体图形。有 $n(n=4,5,6,...)$ 个顶点的不同胚的骨骼数量 $N(n)$ 为 1,2,7,18,52,... 这是 Sloane 得到的结果。

“$\beta$-skeleton”是一个比较新的数学概念，1985 年才被提出。在这里，我们把它翻译成“$\beta$- 骨骼”。这个名字来自于形态分析中的拓扑骨骼（topological skeleton）。这个概念更接近于人体骨骼的概念。



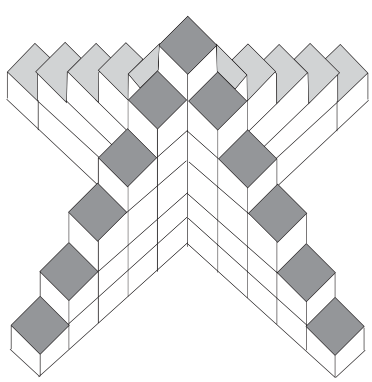
在计算几何和几何图论里，$\beta$- 骨骼是一个在欧氏平面上由一个点集形成的无向图。具体地，设 $\beta$ 为一个正实数。由 $\beta$ 定义角 $\theta$ 如下：

$$\theta=\begin{cases}\sin^{-1}\frac{1}{\beta}, & \text{if}\beta\ge 1\\ \pi-\sin^{-1}\beta, & \text{if}\beta\le 1\end{cases}$$

给定平面上的两个点 $p$ 和 $q$，设 $R_{pq}$ 为平面上所有使得 $\angle prq>\theta$ 的点集。这个点集叫做 $p$ 和 $q$ 的禁区（forbidden region）。再假定 $S$ 是平面上的一个点集，其中 $p$ 和 $q$ 是 $S$ 中的两个点。如果 $R_{pq}$ 中不含有 $S$ 的其他点，那么线段 $pq$ 就在 $S$ 的 $\beta$- 骨骼中。上图是两个由 100 个随机产生的点所成集合 $S$ 产生的 $\beta$- 骨骼。粗实线是当 $\beta=1.1$ 时的 $\beta$- 骨骼，虚线则代表当 $\beta=0.9$ 时的 $\beta$- 骨骼。关于 $\beta$- 骨骼，目前有很多研究，还有不少没有解决的数学猜想。

上面的两个例子对一般读者可能太深了。骷髅塔（skeleton tower）是一个初等数学的例子。

如图，骷髅塔是由若干方砖组成。其实它的样子并不是很恐怖，跟骨骼和骷髅也不相像。它的原型是海岸线上的铁架灯塔。一个典型的问题是，当塔层数为 $n$ 时，问需要多少方砖。这是一个锻炼学生观察总结模式的题目，在美国中学里用的很多。我们也可以把骷髅塔做一些变异，比如金字塔等。



[6] http://mathworld.wolfram.com/Skeleton.html