

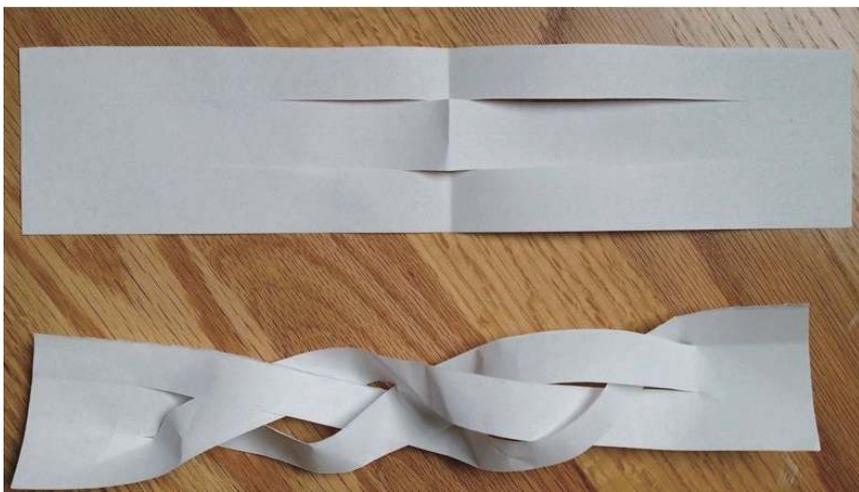
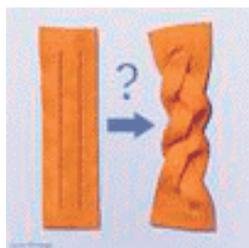
辫可辫，非常辫

万精油

今年四月是美国数学普及协会推出的数学月。在其网站 (<http://www.mathaware.org/mam/2014/>) 上有一个四月份的日历，每天都是一个与数学有关的趣味话题。有一天的题头图是下面这个辫子图。那个问号是问：图中左面开了双口的布条是否可以不被破坏地辫成右面的辫子。

这个趣味问题叙述简单，不要求什么深刻的知识，大众可以理解。于是我把这个问题发在我的微博上。我在微博中说：

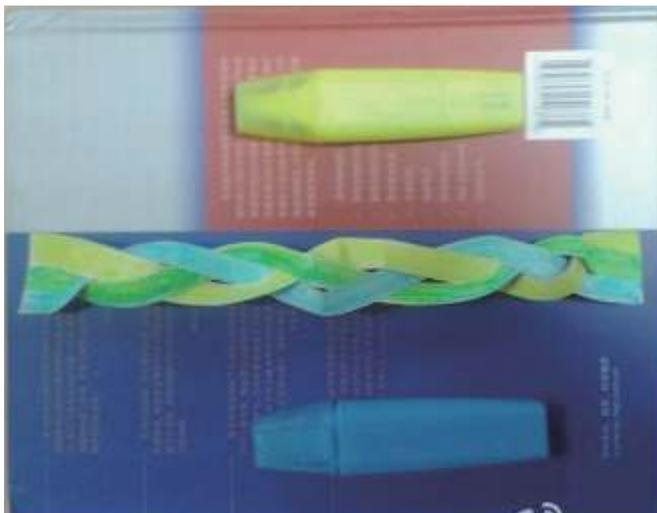
前几天提到四月是数学月，数学普及网站每天一个话题。有一天的话题是“辫论” (Braids Theory)，从理论上研究哪些辫子成立，哪些不成立。比如，下图中上面开了双口的纸条就可以不被破坏地辫成下面的辫子。今天有空试了一下，虽然很难看，但总算是成功了。



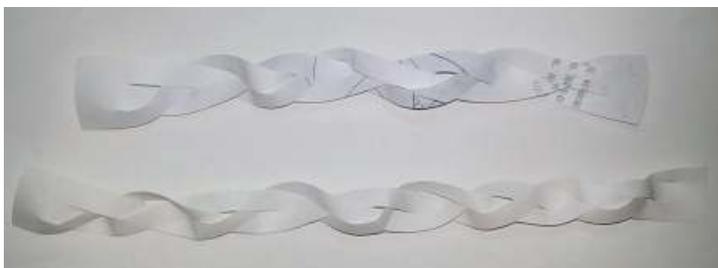
这个微博贴出后，感兴趣和转贴的很多。开始有很多人不相信能够在不破坏纸张的条件下辫出那个辫子。后来有人自己辫出来了，大多数人才相信能够做到。

有好几个评论说“东北人的麻花散就是这样做的”。那其实是不一样的。用面做的时候，辫子的另一端是分开的，可以任意交叉，辫好以后再合上。我后来又发微博说：如果看得仔细，可以发现我做的那个纸辫有6个交叉。有定理说6的倍数的交叉才可以做到。女生（或者手很仔细的男生）如果能做一个12甚至18交叉的辫子，可以贴出来秀一秀。

那个微博刚贴出几分钟，就有人做出了 12 交叉。整齐清楚，而且色彩分明，比我那个好看多了，真正可以做装饰品了。下面是一个男网友辫出的 12 交叉图。



有男生辫出来，女生当然不服。于是一个女网友辫出一个 18 交叉。



后来又有不少人分别辫出来了。甚至还有网友找到了这种辫子在装饰品中的应用。可以看出，下图每只鞋上的辫子是由一块没有被破坏的整皮辫成的。



上面这些例子充分说明有不少交叉是可以在不破坏边界的情况下辫出来的。很自然的问题是，有没有不可以辫出来的交叉。答案是肯定的。比如下面这个图就不能被辫出来。



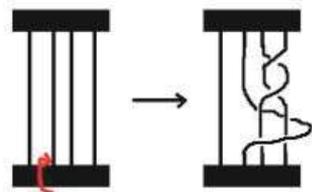
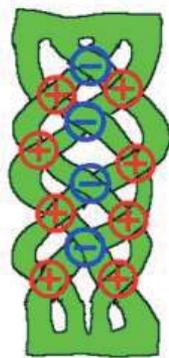
证明一项任务能够被完成比较容易，实际操作一下，成功了就证明了。但要证明某项任务不可能被完成就不容易了，不管你试了多少种方法，总是有种没有穷尽所有可能性的感觉。数学上的证明当然不是穷尽所有的方法，而是把这些方法归类，然后严格地证明每一类方法都不可能完成任务。

我们下面就来看如何证明上面那个辫子是不可能完成的任务。

仔细看上面的图，你会发现有些交叉是右面在上，左面在下。我们把这些交叉记为正交叉，用+号表示。有些交叉左面在上，右面在下，我们把它们记为负交叉，用-号表示，如下图。

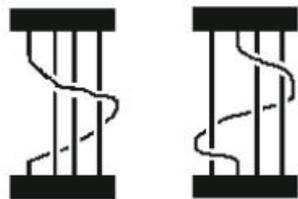
把所有这些交叉加起来，我们得到+4（+号比-号多4个），我们称这个辫子的交叉指数为4。现在我们再来看一看，在不破坏两端的条件下，我们可以有哪些类操作，它们能产生什么样的指数。

对一个有三个开口（四条线）的条子，如果不破坏其边界，我们只能有如下四种操作：

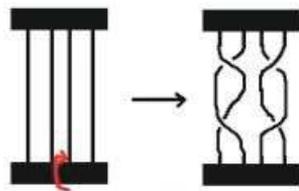


1. 把下端从前面穿过左边的开口，如左图。左边那条线不受影响。整理清楚后，我们可以看见，所有的交叉都是正交叉，有6个。所以指数是6。如果是从反面穿过来，则所有交叉都是负交叉，其指数是-6。穿过右边的开口与此类似，指数是6或-6。

2. 把下端从中间开口穿过。两个正交叉，两个负交叉，指数为0。



3. 把一条线从下面绕过。根据绕的方向，它会生成六个正交叉或六个负交叉，指数是6或-6。



4. 上面固定，下面转半圈。根据转的方向，它会生成六个正交叉或六个负交叉，指数是6或-6。



从上面的讨论可见，所有的操作，指数的增长都是6的倍数。所以，无论怎样辫，最后结果的指数应该是6的倍数。我们前面给的那个辫子指数是4，不是6的倍数。从0指数开始是不可能辫出这种指数为4的辫子的。