从圆锥曲线到格罗滕迪克的概形
——代数几何的演进之路

陈 跃

2014年11月13日，20世纪最伟大的数学家之一、代数几何基础的奠基者亚历山大•格罗滕迪克（Alexander Grothendieck）在法国逝世。消息传来，令人震动，这是自这位数学神人在1991年开始隐居以后，唯一的有关他的确实消息。

在20世纪现代数学的众多学科中，代数几何是一个十分重要而又比较特别的分支，它与代数、分析、数论、几何、拓扑以及数学物理等各主要学科都有紧密的联系，因此代数几何在数学中起着一种中心纽带的作用，是现代数学统一化的主要体现者。然而从19世纪到20世纪的中叶，代数几何其实一直是在一个缺乏严格逻辑基础的环境中艰难地向前发展的。最终，格罗滕迪克在1960年代用概形理论为代数几何奠定了牢固的逻辑基础，从而促进了现代数学的大发展。格罗滕迪克的功勋之卓著，堪比建立了现代物理时空基础理论的爱因斯坦。本文简要回顾了从古希腊发现的圆锥曲线到20世纪的概形理论之间的漫长发展历程，从中我们可以初步感受以格罗滕迪克为代表的一批杰出数学家们的深刻思想的魅力。

代数簇（algebraic variety）是代数几何的主要研究对象，而概形（scheme）又是代数簇的抽象推广，因此概形理论的历史实际上就是代数几何的历史。代数簇又称为代数流形，或者暂时可以简单地认为是一组多元多项式的零点集合（也称为代数集）：

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases}.$$

如果这些多项式都是一次的，那么它就是线性代数所研究的线性方程组，此时的代数簇就是我们都熟悉的线性方程组解空间。然而当多项式不是一次时，代数簇的研究就非常地复杂，需要用到代数、几何与分析等学科的大量数学方法和工具。

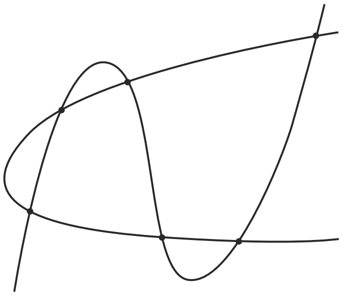
一、从古希腊至18世纪的发端

代数簇的研究实际上从古代希腊就开始了。两千年前的古希腊数学家们所熟悉的直线、圆、圆锥曲线、三次曲线、平面、球面、柱面和二次曲面等都属于只用一个多项式来确定的最简单的代数簇。在没有直角坐标系的条件下，阿波罗尼乌斯（Apollonius）对圆锥曲线做了详尽的研究，发现了它的许多性质。而梅内克缪斯（Menechmus）则发现了可以用平面和圆锥相交来产生圆锥曲线。

到了近代笛卡尔和费马能够用代数符号表示任意代数曲线方程的时候，事情就发生了质的飞跃。希腊数学家由于没有解析几何的工具，他们只能局限于研究低次代数方程所表示的曲线或曲面，而有了解析几何之后，在理论上就可以讨论任意次数的代数曲线或曲面。

17和18世纪属于代数几何的“探索”阶段。费马证明了所有非退化的二次曲线都是圆锥曲线。微积分的发明者之一、数学家牛顿对三次平面曲线进行了初步的分类（共有72种），而欧拉则对所有的二次曲面进行了分类。此时人们对最简单的代数曲线和曲面的奇点现象有了初步的认识。

牛顿和莱布尼兹还用“消去法”得到了确定两条代数曲线相交点的方程组（即高等代数课本中的“结式”方程组），在此基础上，贝祖（Étienne Bézout）证明了贝祖定理：设 C 和 C' 是次数分别为 m 和 n 的平面射影曲线，则 C 和 C' 相交于 mn 个点（计入重数）。例如在下图中，一条 3 次代数曲线与一条 2 次抛物线相交于 3×2 ＝ 6 个点。



这个著名的定理是代数几何中一个重要分支——相交理论的起点。

射影几何是产生代数几何的三大主要来源之一。早在 17 世纪时，德沙格（Girard Desargues）通过研究画家的透视方法而形成了射影对应的概念，他还引进了无穷远点的概念。在普通的欧氏平面和空间中加入了无穷远点后，就得到了封闭、紧致的射影平面和射影空间，它们是大多数经典代数簇所在的空间。另一方面，欧拉的虚数概念的引入也完成了代数方面的“封闭化”，从而简化了数学命题的叙述。例如在射影平面中，非退化的二次曲线只有一种（在普通平面中分为椭圆、双曲线和抛物线这 3 种），三次曲线不是牛顿所分的 72 种，而是只有三种曲线，又例如两个圆永远相交于 4 个点，其中两个点是无穷远点（圆点），尽管此时将它们的方程看成是实曲线的方程时可以是不相交的。

二、19 世纪对代数簇的研究

19 世纪是射影几何的“黄金时代”，以庞斯列（Jean-Victor Poncelet）为代表的一批数学家建立了射影几何的系统理论，总结和整理了大量出现的射影几何命题和方法，特别是射影变换的理论。例如可以将圆锥曲线看成是两个相互射影对应线束的对应直线的交点轨迹等。

在射影几何里还有一些涉及到计数几何（enumerative geometry）的定理，例如可以证明每个三次代数曲面上都有 27 条直线、每条非退化 4 次平面代数曲线都有 28 条与曲线同时相切两次的双切线、与 5 条已知圆锥曲线都相切的圆锥曲线一共有 3264 条等。这些定理都是通过运用射影空间里的相交理论，并且经过复杂的计算过程而得到的。

代数几何的第二个主要来源是复变函数论中的椭圆积分和阿贝尔积分的理论。所谓椭圆积分，是指如下形式的积分：

$$\int_{\beta}^{\alpha}\frac{r(t)}{\sqrt{p(t)}}dt,$$

其中的 $r(t)$ 是有理函数，$p(t)$ 是 3 次或 4 次多项式。欧拉对一个比较简单的椭圆积分，曾经证明了一个与三角函数性质相似的“加法公式”：

$$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}+\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=\int_0^{\frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

在 19 世纪初，阿贝尔又将椭圆积分大幅度地推广成了阿贝尔积分（即有理函数积分）

$$\int_{z_0}^{z}R(x,y)dx,$$

其中的 $R(x, y)$ 是有理函数，x 与 y 必须满足代数方程（即代数曲线）

$$f(x,y)=y^n+f_1(x)y^{n-1}+\cdots+f_n(x)=0,$$

其中的函数 $f_i(x)$ 是多项式。并且阿贝尔也得到了关于阿贝尔积分的类似的“加法公式”。这个公式实际上显示了用积分形式表示的代数曲线上除子（divisor）的等价性关系，它在后来黎曼等人的手中进一步发展成为代数曲线上的阿贝尔簇（Abelian variety）的理论。阿贝尔簇是一种在现代数论中十分重要的代数簇。

黎曼是 19 世纪最伟大的数学家之一。他在研究阿贝尔积分理论的过程中提出了内蕴的黎曼面的概念[1]和黎曼面上代数函数的理论。黎曼的初始目标是对黎曼面上所有的阿贝尔积分进行分类，由此出发他得到了一系列刻画黎曼面性质的重要定理。由于黎曼面的另一种表现形式是代数曲线，所以他实际上是得到了不少关于代数曲线的重要成果，因此我们可以讲，是黎曼首创了用分析来研究代数曲线的方法。

黎曼首次明确提出了“亏格”这一现代几何的基本概念，以及代数几何中最基本的双有理变换的概念：如果代数曲线 $f_1(x, y)=0$ 上的点 $P(x, y)$ 与 $f_2(x, y)=0$ 上的点 $P'(x', y')=0$ 之间有以下的有理变换（对应）关系

$$x'=\frac{g_1(x,y)}{h_1(x,y)} \text{ 与 } y'=\frac{g_2(x,y)}{h_2(x,y)} \text{（这里的二元函数都是多项式），}$$

那么就称这两条代数曲线是双有理等价的。双有理变换是一种比射影变换更加宽泛的变换，它能够保持代数曲线的亏格不变，并且此时两条代数曲线上的有理函数域一定是同构的。注意到有理函数域是一个代数对象，因此这实际上就是建立了几何与代数之间的联系。从黎曼的时代到现在，从某种程度上说，整个代数几何主要研究的其实就是一般代数簇的双有理分类问题。

黎曼和他的学生罗赫一起发现了著名的（代数曲线上的）黎曼 - 罗赫定理：

$$l(D)-l(K-D)=d-g+1,$$

其中 $D=\sum a_iP_i$ 是代数曲线上的任意除子（a_i 是整数，P_i 是代数曲线上的点），$d=\sum a_i$ 是 D 的次数，$l(D)$ 是由代数曲线上全体有理函数组成的线性空间 $L(D)=\{f|(f)+D\geq 0\}\cup\{0\}$ 的维数，K 是由代数曲线上的微分形式所确定的典则除子，上述等式右边的 g 就是代数曲线的亏格。这个定理反映了等式左边的函数空间的性质是如何受到几何不变量 g 控制的。这个深刻定理后来在 20 世纪被推广到了高维代数簇情形。

我们有理由设想，黎曼在 1854 年的著名讲座中所给出 n 维黎曼流形的初步概念，其实是在为探索一般的高维代数簇性质所做的准备工作，而不仅仅是为了研究物理学意义上几何空间。黎曼第一次发现除了非欧几何以外，在一般微分流形上也可以设置任意的度量。他经过推算发现了刻画黎曼流形局部几何性质的主要不变量——黎曼曲率张量 R_{ijkl}。这些张量正是现代整体微分几何发展的起点，并且最终都会通过某种形式进入到代数几何中。更令人难以置信的是，黎曼所提出的数论中大名鼎鼎的“黎曼猜想”，后来竟也变成了推动代数几何发展的强大动力！所谓的黎曼猜想是说：黎曼 ζ 函数

$$\zeta(s)=\sum n^{-s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{-s}}\right)^{-1}$$

[1] 陈跃，黎曼面的起源，数学文化，Vol.6, No.1 (2015)。

的全部复零点的实部都等于 1/2。现在我们知道，这个猜想的内涵极其丰富，它可能是现代数学还没有解决的最重要的猜想。

代数数论是代数几何的第三个主要发展来源。为了研究代数数域的需要，19 世纪的数学家克罗内克（Leopold Kronecker）和戴德金（Richard Dedekind）等人引入理想、赋值和除子等基本概念。并且他们还进一步发现代数曲线上有理函数域的理论与代数数域的理论其实是平行的，这个重要发现促使他们想到是否可以对黎曼用分析方法给出的结果做出纯代数的抽象证明。如果能够做出这样的证明，那么就能够得到不依赖于复数域、并且可以适用于所有代数数域的一般性的结果。毋庸置疑，这种观点对于代数几何这门学科的性质以及今后的发展来讲，是至关重要的。

现在我们介绍一下这些被称为“代数学派”的数学家们是怎样来抽象地构造黎曼曲面的。如前所述，每个代数曲线（或黎曼曲面）的双有理（或共形）等价类都对应和确定了一个同构的有理函数域 L，它是复数域 C 的有限扩张。如果已知代数曲线（或黎曼曲面）S，则每个点 $p \in S$ 都可以确定一个离散赋值：$L^* \to Z$（Z 是整数集）。戴德金和韦伯（Heinrich Weber）的想法是将这个过程倒过来：从给定的域的有限扩张 L/C 出发，具体地构造出一个代数曲线（或黎曼曲面）来，使得它的有理函数域正好就是这个域 L。从这个大胆的想法里我们可以看到现代概形的雏形：从代数的对象出发来构造几何对象。戴德金和韦伯在用域 L 构造代数曲线时，将 L 上的每个非平凡的离散赋值都定义为“L 所对应的代数曲线（或黎曼曲面）S 的一个点”，从而就得到了一个抽象的“代数曲线（或黎曼曲面）”。当然，构造这种抽象的“代数曲线”并不是在做无聊的数学游戏。在研究代数簇的双有理分类问题中，经常需要在同一个等价类中寻找一个性质比较好的代表元素，而这个元素往往就是通过这种奇怪的方式人为地构造出来。例如 1939 年扎里斯基（Oscar Zariski）在证明代数曲面的奇点解消定理时，也是运用了这个方法。

与此同时，以马克斯•诺特（Max Noether）和克莱布施（Alfred Clebsch）为代表的“几何学派”继续从经典射影几何的角度研究复代数曲线和复代数簇，他们发现了平面曲线奇点解消的基本方法，即所谓的二次变换“胀开”（blow up）的方法。

三、19 世纪末到 20 世纪早期对代数簇的深入研究

从 19 世纪末期到 20 世纪初，以皮卡（Emile Picard）和庞加莱为代表“分析学派”试图将黎曼的复代数曲线（即黎曼面）理论推广到复代数曲面上。这标志着代数几何的历史进入了一个新的阶段，虽然从代数曲线到代数曲面，(复的）维数仅仅增加了一维，但是与代数曲线完全不同，研究代数曲面需要克服许多困难，难度极大（复代数曲面是实 4 维流形，难以直观想象）。类似于黎曼研究 $f(x, y) = 0$ 上的有理函数的积分

$$\int R(x,y)dx,$$

皮卡研究代数曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上有理函数的积分

$$\iint R(x,y,z)dxdy.$$

他用形如 $y = c$（c 为常数）的一组平面去截割上述代数曲面，在所得的代数曲线上再运用黎曼的结果，然后分析当 c 变化时的情形，得到了一些重要的结果。

与代数曲线一样，代数曲面上有理函数的积分也受曲面的拓扑性质的控制。例如对于曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上与微分形式有关的典则除子 $K = R(x, y, z)dx\wedge dy$，由它所确定的函数空间的维数满足 $l(K) = p_g$，其中的 p_g 被称为代数曲面的几何亏格。与代数曲线只有单一的亏格 g 不同，刻画代数曲面除了几何亏格 p_g 以外，还需要算术亏格 p_a 等其他的不变量。

在研究代数曲面的过程中，非常需要了解高维流形的拓扑性质。为了弄清楚黎曼所说的高维“贝蒂（Betti）数”到底是什么，庞加莱开始建立单纯复形的同调理论，以便能够严格地证明黎曼的直观猜想。他从 1895 开始，写出了著名的关于同调理论的一系列文章。不过，庞加莱在他的同调论中还没有使用群论的语言，后来在 1930 年代经埃米 • 诺特（Emmy Noether）建议，人们才改用了群论的术语。在今天，我们可以用简练的语言来描述庞加莱所引入的基本概念：

先将代数簇 M 进行三角剖分后得到单纯形 $C_i(i = 0, 1, \ldots, n)$，然后定义边界运算同态 $\partial_i: C_i \to C_{i-1}$，从而可以得到单纯复形

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0.$$

由于有基本的等式 $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$, 所以能够构造单纯同调群（其实也是线性空间）

$$H_i(M, Z) = \ker \partial_i / \operatorname{im} \partial_{i+1}.$$

这样，第 i 个贝蒂数就是

$$B_i = \dim H_i(M, Z).$$

它们都是拓扑不变量，可以用来刻画代数簇的几何性质。

接着莱夫谢茨（Solomon Lefchetz）在 20 世纪初期用这个同调理论开始研究复代数曲面的拓扑性质，得到了许多深刻的定理。当然，研究代数曲面的最主要贡献还是来自于著名的意大利学派。这个学派的三个主要代表人物是卡斯泰尔诺沃（Guido Castelnuovo）、恩里奎斯（Federigo Enriques）和塞维里（Francesco Severi），他们用天才的几何直觉和高超的几何技巧，综合运用包括分析与拓扑方法在内的各种方法，创造了复代数曲面的一个非常深刻的理论，包括代数曲面的奇点解消、除子与线性系的经典理论、代数曲面的黎曼 - 罗赫定理的初步形式、代数曲面的模空间等等。但同时他们的工作也有一个致命的缺陷，就是基本上只使用双有理几何的传统方法，一些证明依赖于几何直观，缺乏严密性，此时整个代数几何学科还没有一个统一的逻辑基础。和数学史上常见的情形类似，这种逻辑基础不稳的状况严重阻碍了代数几何的进一步向前发展，这时候，只有等待合适的数学语言的出现，才能最终解决这个问题。

四、抽象代数方法的引入

在 1900 年到 1930 年之间，出现了一些抽象代数的理论，例如群、环、域和模等。环与理想概念来自于戴德金的代数数论，它们的最早雏形是数域的代数整数环及其理想的概念。克罗内克在这个基础上抽象出了一般的环与理想的概念，并且他和拉斯克（E. Lasker）在 20 世纪初期就发现了理想与代数簇之间一些最基本的天然联系，例如不可约簇所对应的“坐标环（coordinate ring）”一定是整环，而不可约簇的几何维数实际上就等于这个整环的商域在复数域上的超越次数等。

现在我们来解释环（ring）为什么对代数几何来说是很重要的。在由全体 n 元多项式组成的多项式环 $k[x_1,\ldots,x_n]$ 中，任何由 m 个多元多项式所确定的代数集 $V = \{P \mid f_i(P) = 0, i = 1,\ldots,m\}$ 也确定了一个理想：

$$I(V) = \{f \in k[x_1,\ldots,x_n] \mid f(P) = 0, \forall P \in V\},$$

所谓代数集 V 的坐标环，就是由这个理想所确定的商环

$$A(V) = k[x_1,\ldots,x_n]/I(V),$$