

美妙的几何魔法

——高立多边形与高立多面体

王淑红 蒋迅

古希腊柏拉图学院的门上有一句名言：不懂几何者不得入内。不但自古以来几何就有着独特的地位，而且几何的美是浑然天成的，不管是随风飘动的枝条还是静谧安然的山峦，不管是天空中流动的白云，还是海洋中漾起的波澜，都可以归宿于形象的几何。

于是，人们常常津津乐道于构造出新的几何图形，把几何的构造当成一种使命，也作为一种乐趣，亦或是与大自然亲密耳语的一种姿态。

近年来，除了传统的几何图形之外，两种新的几何图形的构造引起数学家们的兴趣。一种是 Lee Sallows 创造的平面几何图形 golygon¹，因 A. K. Dewdney 1990 年在《科学美国人》（*Scientific American*）专栏上的普及广为人知²。另一种是 Joseph O'Rourke 新近创造的立体几何图形 golyhedron³。

它们的奇妙在哪里呢？简洁地讲，就是顶角都是直角，且边长或表面积成某种数列的多边形或多面体。目前国内还未见有它们的中文译名，我们姑且取其谐音，把它们称为高立多边形与高立多面体。下面就请跟随我们一起来欣赏它们的奇思特想和构造之美吧。

1. 高立多边形

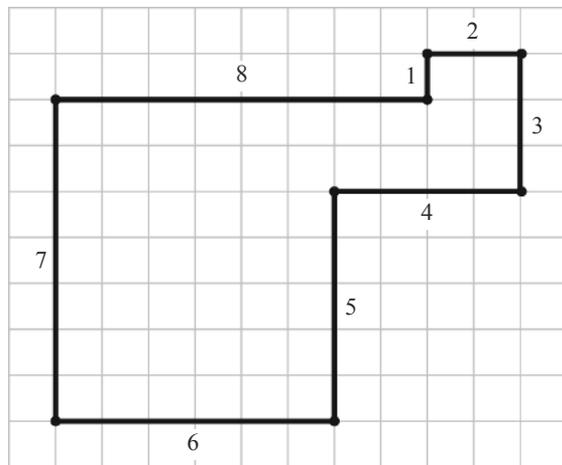
我们不妨先从较为简单的（自然）高立多边形谈起。一个（自然）高立多边形相当于一个格多边形（lattice polygon），它的各个角都是直角，不能自相交，也不能走回头路，且边长必须是连续的整数 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 。按照这个定义，我们所知的最简单的

¹ Wikipedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/Golygon> 和 Wolfram, Golygon, <http://mathworld.wolfram.com/Golygon.html>.

² Dudeney, A. K. "An Odd Journey Along Even Roads Leads to Home in Golygon City." *Sci. Amer.* 263, 118-121, July 1990.

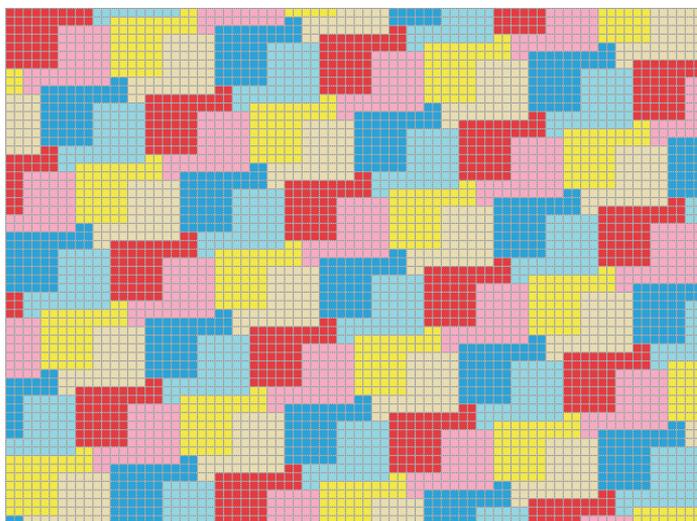
³ P. Goucher, Golygons and golyhedra, <http://cp4space.wordpress.com/2014/04/30/golygons-and-golyhedra> 和 P. Goucher, Golyhedron update, <http://cp4space.wordpress.com/2014/05/11/golyhedron-update>.

高立多边形就是下面这个有点像手枪的 8 边形 (octagon) :



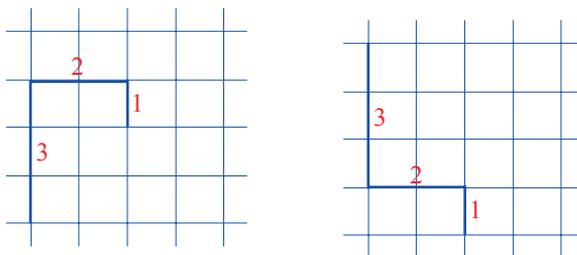
为了方便后面的讨论, 我们把这个多边形用 $\{1N 2E 3S 4W 5S 6W 7N 8E\}$ 来表示, 其中的英文字母 E、S、W、N 分别代表东、南、西、北 4 个走向。

注意, 边长是按照顺时针 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 的次序排列的。有意思的是, 当我们把它平铺在平面上, 然后把另一个相同的 8 边形旋转 180° , 它们能够完全嵌合在一起。如果有多个这种 8 边形, 那么它们的嵌合具有周期性的规律, 最终可以形成一个相互嵌合的平面, 如下图所示:



大家对这幅图是否有些眼熟呢? 是不是很像婴幼儿喜欢玩儿的拼图游戏呢? 不知道市场上是否有了这种图案的拼图, 如果还没有的话, 生产商就有新的拼图方案了, 消费者也会有新的选择。

这是题外, 下面我们接着来谈高立多边形。显然, 对于所有的自然数 n , 不是都能作出一个高立多边形。以 $n = 4$ 为例。我们不妨假定第 1 步是向上走, 那么第 2 步就必须是向左或向右。我们假定它是向左。这时第 3 步必须向上或向下。如下图所示, 无论向上还是向下, 我们看到第 4 条线都无法回到初始点。



事实上，我们前面构造出的高立多边形是最简单的一个。我们自然会问，在什么条件下我们可以得到一个高立多边形呢？更一般地，在什么条件下至少存在一个高立多边形呢？首先， n 必须是偶数，因为这些折线必须在横向和纵向上交替进行。一个必要条件是，它的边长数（偶数） n 必须是下面方程组的解：

$$\begin{aligned} \pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \cdots \pm (n-1) &= 0, \\ \pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm \cdots \pm n &= 0. \end{aligned}$$

这是因为第 1、3、5、 \cdots 条边都同时是横向或同时是纵向；第 2、4、6、 \cdots 条边都同时是纵向或同时是横向，而它们都必须回到原点。注意这里方程中的未知变量是加减号 \pm 。在上面 $n = 4$ 的例子中，这组方程变成了

$$\begin{aligned} \pm 1 \pm 3 &= 0, \\ \pm 2 \pm 4 &= 0. \end{aligned}$$

显然，无论我们如何选择加号或减号，都不能使它们成立。同理， $n = 6$ 时它们也不可能成立。注意这个条件不是充分的，因为它包含了自相交和回头路的情况。如果禁止自相交，问题会更困难，因为我们还需要计算一个有特殊性质的自回避行走（self-avoiding walks）。

美国著名数学科普作家加德纳（Martin Gardner）给出了另一个必要条件：偶数 n 必须具有 $n = 8k$ 的形式，其中 k 是一个自然数。为什么呢？我们已经知道， n 必为偶数，还应注意 $2 + 4 + 6 + \cdots + n$ 应为 4 的倍数，以便能够将它划分为两个偶数组的和。这是因为其中第一组偶数代表着向一个方向行走的方向，另一组偶数代表着向相反方向行走的方向。在上面 $n = 8$ 的例子中，2 和 8 在一组里，4 和 6 则在另一组里。下一步，我们通过偶数项的和来说明 n 必须被 8 整除或者余数为 6。据等差数列求和公式，可知 $2 + 4 + 6 + \cdots + n = (n/2)(n/2 + 1)$ 。注意，前面已经说过 $2 + 4 + 6 + \cdots + n$ 能被 4 整除，因此 $n/2 \equiv 0 \pmod{4}$ 或 $(n/2 + 1) \equiv 0 \pmod{4}$ ，即 $n/2 \equiv 0 \pmod{4}$ 或 $n/2 \equiv 3 \pmod{4}$ ，这意味着 $n \equiv 0 \pmod{8}$ 或 $n \equiv 6 \pmod{8}$ 。再来看奇数项的和 $1 + 3 + 5 + \cdots + (n-1)$ ，它应为偶数，以便能够将它划分为两个奇数组的和。据等差数列求和公式，可知 $1 + 3 + 5 + \cdots + (n-1) = (n/2)(n/2)$ ，因此 $n/2 \equiv 0 \pmod{2}$ ，即 $n \equiv 0 \pmod{4}$ ，这意味着 $n \equiv 0 \pmod{8}$ 或 $n \equiv 4 \pmod{8}$ 。综合以上结果，可知 $n \equiv 0 \pmod{8}$ ，即 $n = 8k$ 。

显然，只要存在一个高立多边形，就至少存在 4 个，因为第 1 条边按东南西北 4 个方向出发就产生出 4 个高立多边形。它们是全等的。但是为了讨论方便，让我们暂时把它们算作 4 个不同的高立多边形。我们现在给出 n 边高立多边形的个数（记住， n 是 8 的倍数）。记下面两个多项式：

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \prod_{i=1,3,\dots}^{n-1} (x^i + 1) = (x+1)(x^3+1)\cdots(x^{n-1}+1), \\ p_2(x) &= \prod_{i=1}^{n/2} (x^i + 1) = (x+1)(x^2+1)\cdots(x^{n/2}+1). \end{aligned}$$

记 $p_1(x)$ 的展开式中 $x^{n^2/8}$ 的系数为 k_1 , $p_2(x)$ 的展开式中 $x^{n(n^2+1)/8}$ 的系数为 k_2 。那么 n 边高立多边形的个数为 $k_1 \times k_2$ (其中 $n = 8k$)。利用这个结果, 我们可以得到下面的表格:

k	n 边高立多边形的个数 N	$N/4$
1	4	1
2	112	28
3	8432	2108
4	909228	227322
5	121106960	30276740
6	18167084064	4541771016
7	2956370702688	739092675672
8	510696155882492	127674038970623

这个结果是 Sloane 得到的。1991 年, Sallows 和 Vardi 等人得到了一个渐近公式⁴:

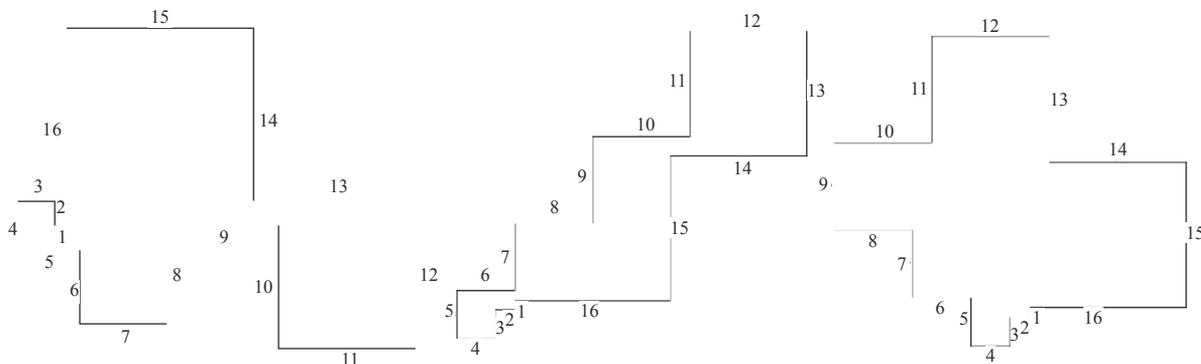
$$N(n) \sim \frac{3 \cdot 2^{8n-4}}{\pi n^2 (4n+1)}.$$

这是一条呈指数增长的曲线。注意这里居然出现了 π 。回到 $n = 8$ 的例子, 我们有,

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x+1)(x^3+1)(x^5+1)(x^7+1) \\ &= x^{16} + x^{15} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + 2x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1, \\ p_2(x) &= (x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1) \\ &= x^{10} + x^9 + x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

我们分别取 $p_1(x)$ 中 x^8 的系数 $k_1 = 2$ 和 $p_2(x)$ 中 x^5 的系数 $k_2 = 2$, 得到 8 边高立多边形的个数为 4。因为这 4 个高立多边形是全等的, 我们得出结论: 8 边高立多边形在全等的意义下只有一个。

再看 $n = 16$ 的时候。我们知道, 应该有 28 个不全等的高立多边形。下面是其中 3 个例子:

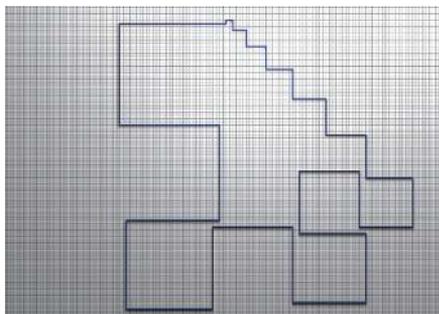


$n = 16$ 时的高立多边形 (来源: Mauro Fiorentini)⁵

⁴ Sallows, L.; Gardner, M.; Guy, R. K.; and Knuth, D. "Serial Isogons of 90 Degrees." *Math Mag.* 64, 315-324, 1991 和 Vardi, I. "American Science." § 5.3 in *Computational Recreations in Mathematics*. Redwood City, CA: Addison-Wesley, pp. 90-96, 1991.

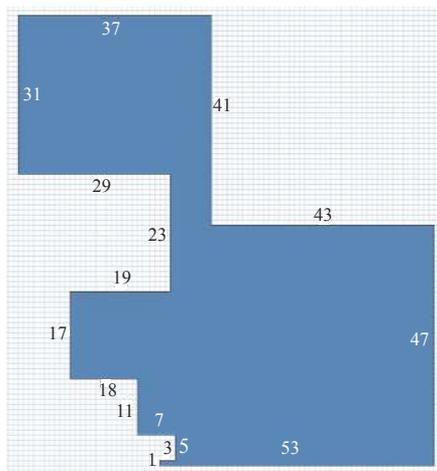
⁵ Mauro Fiorentini, Goligoni (numero di), <http://www.bitman.name/math/article/628>.

Sallows 等人已经找到了全部 28 个。对于 $n = 32$ 的情形，我们只给一个例子：



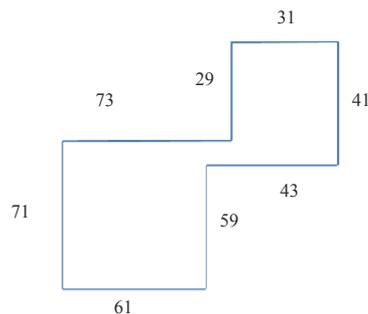
$n = 32$ 时的高立多边形 (来源: fdecomite)

高立多边形的边可以不是以自然数为序。如果一个高立多边形的边长为奇素数的话，我们称之为素数高立多边形。这也是《科学美国人》里就已提到的。如果允许以 1 开始，我们可以得到下面的高立多边形 $\{1N\ 3E\ 5N\ 7W\ 11N\ 13W\ 17N\ 19E\ 23N\ 29W\ 31N\ 37E\ 41S\ 43E\ 47S\ 53W\}$ ⁶：



(几乎)素数高立多边形

注意，从第 2 位的 3 到第 16 位的 53 是连续素数。可以验证， $\{1N\ 3E\ 5S\ 7W\ 11S\ 13W\ 17N\ 19E\ 23N\ 29W\ 31S\ 37E\ 41S\ 43E\ 47N\ 53W\}$ 也可以构成一个高立多边形。不过，这两个例子都有一个缺点：它们都以 1 开始，因而不是真正的素数高立多边形。右面是一个不以 1 开始的真正的素数高立多边形 $\{29N\ 31E\ 41S\ 43W\ 59S\ 61W\ 71N\ 73E\}$ ：



真正的素数高立多边形

⁶ Harry J. Smith, Golygon Letter to Mr. A. K. Dewdney, <http://www.reocities.com/hjsmithh/Golygons/GolygonL.html>.