

宇宙距离之梯（下）

——2010年爱因斯坦讲座公众数学演讲

Terrence Tao（陶哲轩）/ 演讲 欧阳顺湘 / 译注

第四阶 行星⁸

现在我们转向行星，即水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星和海王星。

通过占星家以及一些其他事情，古希腊人发现所有的行星虽然都在运动，但都经过黄道带（zodiac），位于一个称为黄道面的平面上⁹。黄道带是（黄道上）绕着地球转的星座组成的环带。因此，不管行星如何运动，它也仅仅是一个二维问题，而不是三

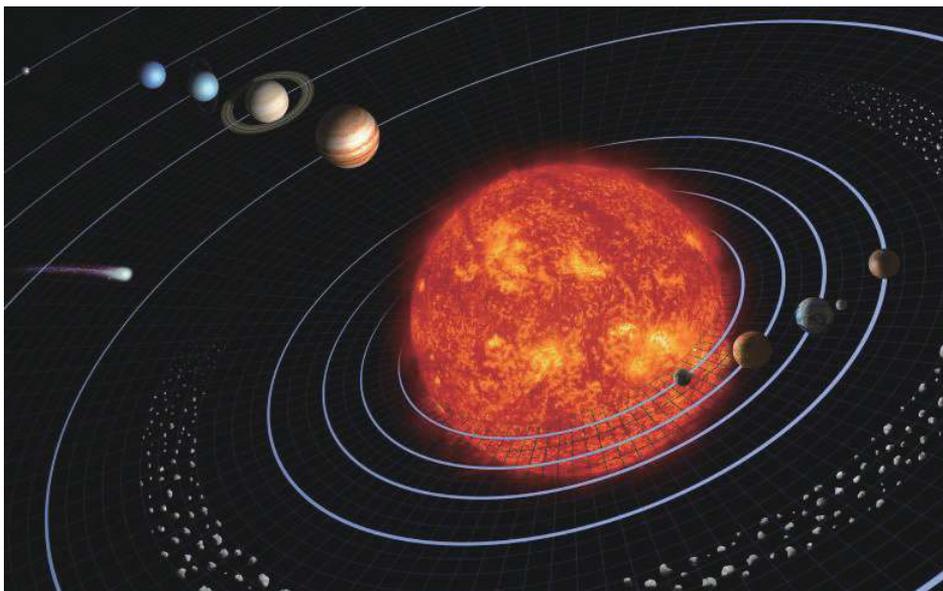


图 18. 太阳系

⁸ 对此段中涉及的相关历史，推荐著名的费恩曼物理讲座的第一讲。实际上，陶哲轩在一篇博客（<http://terrytao.wordpress.com/2009/07/15/feynmans-lectures-online/>）中，介绍了费恩曼物理讲座视频，并提到自己在《宇宙距离之梯》的演讲也涉及费恩曼物理讲座的第一讲中的部分内容，只是角度不同，而且谦虚地表示自己的介绍稍逊费恩曼。另外，可以参考阿瑟·库斯勒（Arthur Koestler）的《梦游者：人类宇宙观的演化史》（*The Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe*, Hutchinson, 1959）。也可参考莫里斯·克莱因（Morris Kline）的《数学：一个文化的途径》（*Mathematics: A Cultural Approach*, 1962）。

⁹ 从天球的北极观看太阳系内的行星，所有行星都以逆时针方向围绕太阳公转，这些行星运动的平面称为“黄道面”。

维问题。

但是，古希腊人不知道行星的轨道。例如，火星的轨道看起来非常好玩，它有时往西，有时往东，前后来回运动，非常奇怪¹⁰。总的来说，古希腊人仍有许多基本问题不知道如何回答：

1. 行星（例如，火星）有多远？
2. 它们的轨道如何？
3. 在轨道上运行一周要多长时间？



图 19. 托勒密 (90 - 168)

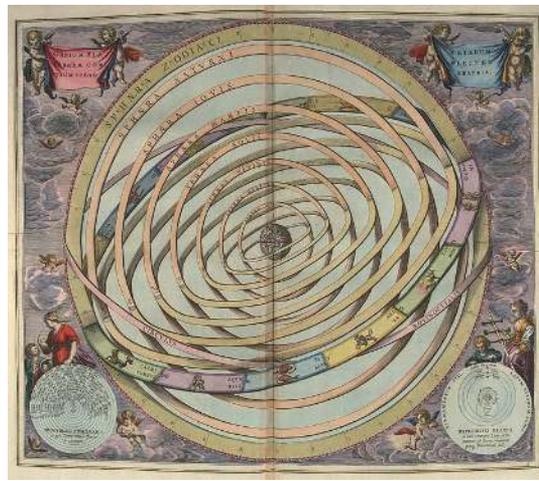


图 20. 托勒密的地心模型

古希腊人也尝试回答这些问题，但所得的答案基本上是完全错误的。例如，托勒密 (Ptolemy) 是第一位曾做了认真努力的人。但是，因为托勒密用了错误的模型，所

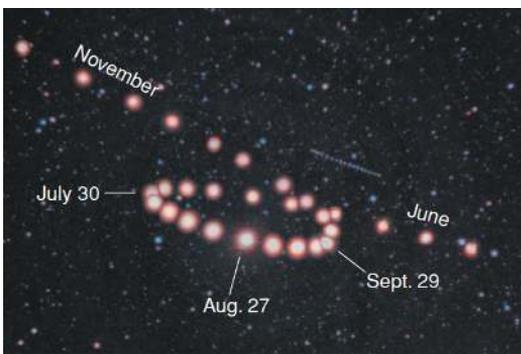


图 21. 展示火星逆行的火星观察合成图 (图片来自 Bennett 等著的 *The Essential Cosmic Perspective*)

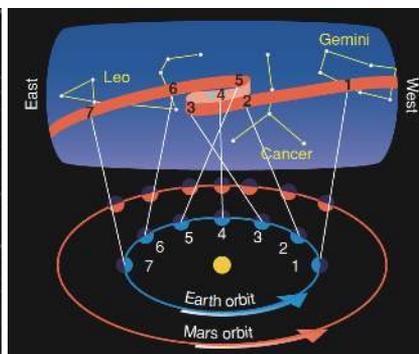


图 22. 基于日心说的火星逆行解释，内层为地球轨道，外层为火星轨道 (图片来自 Bennett 等著的 *The Essential Cosmic Perspective*)

¹⁰ 即所谓的火星逆行 (retrograde motion) 现象，这是火星的视运动，即以地球为中心所观察到的火星运动，它由地球的公转和行星的公转复合而成。请参考如上火星的观察合成图 (图 21) 以及基于日心说的火星逆行解释图 (图 22)。

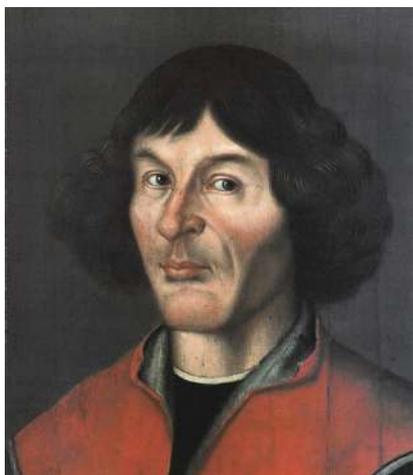


图 23. 哥白尼 (1473-1543)

白尼认为太阳系所有的行星都绕着太阳转，而不仅仅是地球在绕着太阳转。

哥白尼从古巴比伦人的记录着手考虑。古巴比伦人甚至比古希腊人还早进行星空观察。古巴比伦人已经认识了行星并作了记录。他们将观测结果传给了希腊人，希腊人又传给了阿拉伯人，阿拉伯人再传给了欧洲人。因此哥白尼知道古巴比伦人的记载。例如，哥白尼从古巴比伦人的记载中了解到了火星的视运动，即从地球上观察到的火星的视运动。

火星每隔 780 天就重新（即火星的会合周期，synodic period）回到原来的位置。也就是说，火星的视运动周期是 780 天¹²。由于使用日心模型，哥白尼知道 780 天不是火星的真实周期，因为不但火星在绕着太阳转，同时地球也在绕着太阳转。所以火星的角速

以得到了彻底错误的答案。托勒密拒绝阿里斯塔克斯的日心模型，使用地心模型，认为太阳绕着地球转，非常复杂。尽管托勒密付出了极大的努力，但不幸的是，得到的答案基本上是绝对的垃圾。因为托勒密体系错得太离谱了，我这里就不叙述了¹¹。

首先得到地球到行星的距离，以及行星的运行规则等问题的正确答案的人是尼古拉·哥白尼 (Nicolaus Copernicus)。这是哥白尼的伟大成就。这也是哥白尼为什么出名，为什么出现在教科书里的原因。阿里斯塔克斯认为地球绕着太阳转。然而，哥



图 24. 古巴比伦世界地图(公元前 7-8 世纪)

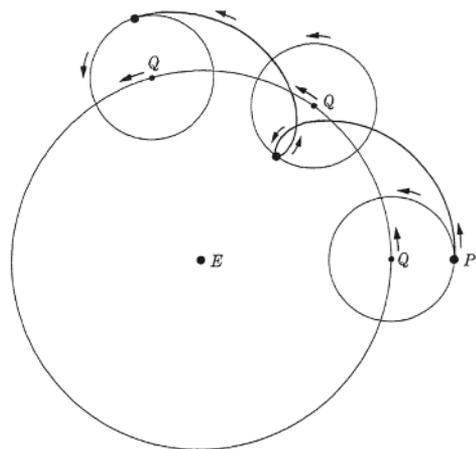


图 25. 行星在本轮上做匀速圆周运动，而本轮的圆心又在均轮上作匀速圆周运动（图片来自克莱因的《数学：从文化的方法》第 176 页）

¹¹ 托勒密的体系设计了复杂的本轮、均轮系统来用圆周运动解释当时已经观察到的行星运动现象，例如逆行以及与地球的距离有变化等现象。他们假设行星 P 围绕着 Q 作匀速圆周运动，而 Q 又围绕着地球 E 做匀速圆周运动（实际中，他们又假设地球不在中心，存在偏心率）。他们把 P 所围绕的圆周称为本轮 (epicycle)，而 Q 所围绕的圆周称为均轮 (deferent)。有时还使用两个本轮来代替一个本轮。这个理论虽然错误，但还是能够在一定程度上与观测相符，如在一、二个小时的误差范围内预测月食。

¹² 太阳、火星（或其他行星）和地球的相对位置循环一次的时间称为“会合周期”，如太阳、地球和火星三者连成一条线后（火星冲），下次再出现相同情况的时间间隔。

度并不是 $\frac{1}{780}$ ，这个角速度只是地球的角速度与火星的角速度之差。

另一方面，哥白尼知道地球每一年绕太阳一周，这里的年是太阳年，365 天。再一次，同样只是中学数学水平的问题，对所得的角速度做减法，他得出火星每 687 天绕太阳一周，即火星的恒星周期（sidereal period）或说公转周期为 687 天¹³：

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\text{地球}} - \omega_{\text{火星}} &= \frac{1}{780 \text{天}} \\ \omega_{\text{地球}} &= \frac{1}{1 \text{年}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_{\text{火星}} = \frac{1}{687 \text{天}}.$$



图 26. 第谷 (1546-1601)

对其他行星也可以做类似的计算。

于不同日期测量行星在黄道带上的位置（通过测量角度），并假设轨道是圆的，哥白尼借助于日地距离，也计算出了所有行星的轨道半径。例如，他计算出火星与太阳的距离为 1.5 倍天文单位，这是相当好的测量。

哥白尼对火星周期以及火星与太阳的距离的测量都精确到了两个小数位，精度为 1%。但不是完全精确。

稍后的第谷·布拉赫（Tycho Brahe）因为一些原因决定做非常细致的观测。他对行星很着迷。他设法得到了一位国王的资助，并获赠一座岛屿来建立天文台，前后一共花了十多年的时间测量行星的位置¹⁴。

第谷对火星以及其他行星做了长期而又

¹³ 火星的恒星周期 687 天为绕日周期，又名火星年（作为对比：地球年约为 365 天）。为了使部分读者更好地理解演讲中有关火星周期的计算，我们这里作更多解释。不妨设角速度的单位为度/天。分别用 $\omega_{\text{地球}}$ 和 $\omega_{\text{火星}}$ 来表示地球和火星的角速度。这样，地球和火星每天在轨道上分别绕行 $\omega_{\text{地球}}$ 度和 $\omega_{\text{火星}}$ 度。同时，可知地球和火星的公转周期分别为 $360^\circ/\omega_{\text{地球}} = 1 \text{年} = 365.25 \text{天}$ 和 $360^\circ/\omega_{\text{火星}}$ 度。若会合周期为 s ($=780 \text{天}$)，则首次会合时，地球和火星分别运转了 $\omega_{\text{地球}} \times s$ 度和 $\omega_{\text{火星}} \times s$ 度。考虑到地球的运动速度比火星快，它们的差为 360° ，即

$$\omega_{\text{地球}} \times s - \omega_{\text{火星}} \times s = 360^\circ.$$

等价地，有

$$\frac{360^\circ}{365.25 \text{天}} - \frac{360^\circ}{1 \text{火星年}} = \frac{360^\circ}{780 \text{天}}.$$

因此，

$$1 \text{火星年} = \frac{1}{\frac{1}{365.25} - \frac{1}{780}} = 687 \text{天}.$$

¹⁴ 1560 年 8 月 21 日的日食，特别是这次日食被预测到了，给 14 岁的第谷以很深的印象，使得第谷开始学习研究天文学。此外，也有人认为，第谷在 1566 年 12 月与一位丹麦贵族的决斗中失去了一部分鼻梁，也导致第谷致力于不需与别人打很多交道的天文观测。第谷有他自己介于日心说与地心说之间的模型，认为太阳围绕静止的地球作圆周运动，而除地球之外的其他行星围绕太阳作圆周运动。丹麦国王腓特烈二世给第谷提供了厄勒海峡中的文岛（Hven）以及巨额资金建立天文台——乌拉尼亚堡（Uraniborg）。第谷是最后一位裸眼观天的天文学家，他的天文观测数据达到了前所未有的精确度。此后不久，伽利略等人即开始使用望远镜等设备对星空进行观测。特别，1610 年 1 月，伽利略用望远镜发现了木星的四颗最大的卫星。

极其详细的观测。不幸的是，他的数据与哥白尼的模型不符合。如果尝试将第谷的观测数据代入哥白尼模型所假设的任何圆形轨道，会发现总有偏差。例如，他对火星的观测数据就与理论预测有偏差。

这个问题由后来的约翰内斯·开普勒（Johannes Kepler）继续研究。

开普勒实际上有他自己关于太阳系的理论。为了支持他的理论，开普勒窃取了第谷的数据，其中是有故事的¹⁵。但他发现观察数据并不符合他的理论，也不符合哥白尼的理论。



图 28. 开普勒（1571-1630）

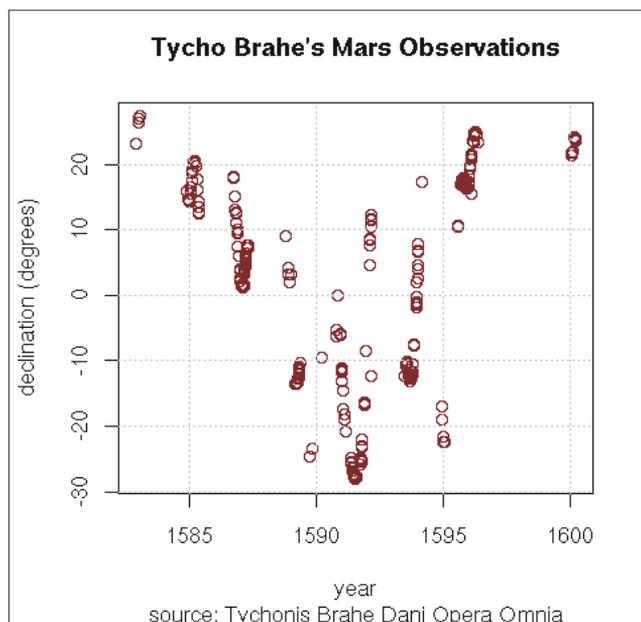


图 27. 第谷火星观测数据

最终，他只好断定，地球和火星的轨道并不是哥白尼所认为的完美的圆，而是别的东西。

开普勒现在的任务是利用第谷的数据，计算地球和火星的轨道。

但如何根据第谷的数据，同时算出地球和火星的轨道呢？如果你懂一点数学，就知道解方程的时候，需要的方程数至少和未知数的个数一样多。但现在要从数据中求出地球和火星的轨道，看起来就像只用一个方程来求解两个未知数——似乎是不可能的！

更糟糕的是，第谷的数据只给出了火星的方向，即在给定的时间上火星的方向，没有给出距离。如果你学过极坐标，你就知道，若要决定平面上一个点的位置，你需要两个数，夹角和距离。但当时没有办法来测量距离，只能测量方向。所以，开普勒实际上只有半个数据来确定两个未知数。

看起来似乎没有充分的信息来解决这个

¹⁵ 1601年10月13日，第谷参加了一个由上层社会的宴会。按开普勒的记述，第谷太过礼貌，没能起身解手而致膀胱出问题，回家之后不到两周即去世。按照第谷的遗愿，他的所有资料由其后代保存。开普勒只好设法窃取了第谷的资料（实际上第谷一直不肯轻易允许开普勒接触到他的数据）。1605年，开普勒在一封信写道：“我承认，当第谷去世后，我趁……之机，将观测数据置于我的照顾之下，或说窃取了它们。”也有说法认为第谷之死是由于水银中毒，而开普勒有施毒的嫌疑。正因为数据使用权利问题，直至1609年，开普勒才发表他的《新天文学》（*Astronomia Nova*）。

问题。然而，开普勒做到了。他找到了精巧独创的方式来解决这个问题。开普勒用到了两个重要的想法。第一个想法是，若要精确地计算火星的轨道，先要弄清地球的轨道。因为如果不知道地球的轨道，又要坐在地球上观察行星运动，那是不可能求出其他行星是如何运动的。怎样求出地球的轨道呢？他的第二个天才的想法是，可以间接地利用火星！

这是如何做的呢？为解释其中的原理，我们先考虑一个简单情形。我们知道地球和火星都在运动，但为简单起见，我们先假设火星固定的在空中，而不是绕着太阳转动，只是地球沿着未知的轨道运动。

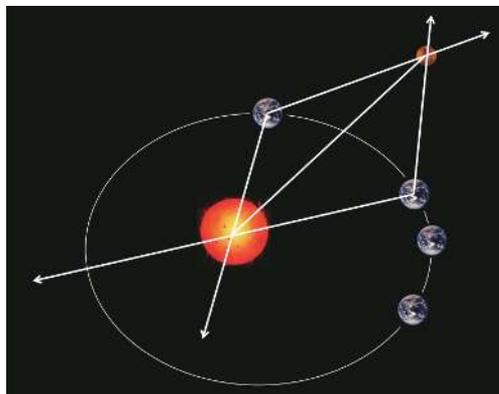


图 29. 假设太阳、火星不动，只有地球在动，可以用三角测量确定地球的轨道

不管你在哪里，太阳都在某处，你可以见到火星，可以见到太阳，可以从地球上测量火星、太阳（相对于黄道带上其他恒星）的位置。这样，就能观察到与太阳、火星的方向。另一方面，因为假设火星与太阳一样是固定不动的，就存在一条固定的轴，即火星与太阳之间的轴。因此，我们得到了一条固定的边，两个夹角，这就可以确定地球相对于火星和太阳的位置。如果你知道中学几何中的“角边角”定理，即如果你知道一条边和两个角，那么你就可以确定这个三角形，因而可以

知道你在哪里。这是一种被称为“三角测量 (triangulation)”的技术。

海上航行时，要确定船的位置。如果可以见到地标，测量其方向，就得到了足够的信息来确定你在哪里了。你可能会认为这个太简单了，我们今日已不再需要用到它了。但实际上，你们中的许多人可能已经通过应用它来找到会场，来到这里。GPS（陶哲轩掏出手机），即用到三角测量。或说三边测量 (trilateration)，用到四颗卫星，但其中的原理是相同的¹⁶。

现在我们知道，假设太阳和火星是固定的，用三角测量，可以确定地球相对于太阳与火星的位置，即确定地球的轨道。不巧的是，火星并不是固定不动的，它自己也沿着未知的轨道运动。这样一来，似乎三角测量派不上用场：三角测量中一条边不是

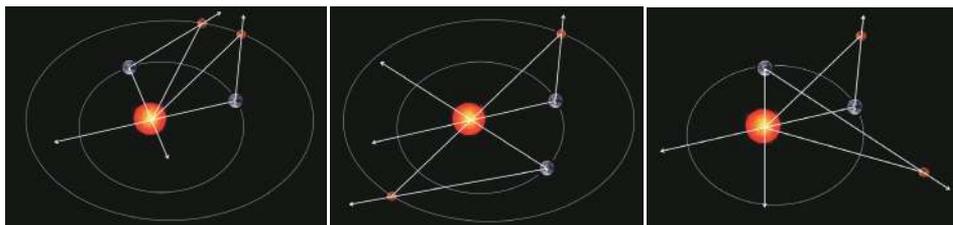


图 30. 地球和火星都在运动

¹⁶ GPS 是英文 Global Positioning System（全球定位系统）的缩写，它利用卫星导航进行测时和测距。三边测量是利用测量距离来确定位置的方法。三维空间中，如果知道到四个已知位置的距离，则可以确定该点的位置。

固定的，而是在按照一种你不知道的方式在运动。

但开普勒并没有放弃，他有另外的一条信息，一条你们已经从哥白尼那里获得的信息：每隔 687 天，火星会回到原来的位置。因此，如果你不选取所有的数据，而是将第谷的数据按 687 天的距离间隔来使用，则在分割点上，火星是固定的，因而对这样的分割点，可以使用三角测量。

第谷的数据中，有勉强足够的信息，使得开普勒可以这样做。好在第谷连续做了十余年的观测。这样，用 687 天对数据进行分割的数据，用三角测量，相应于火星轨道上的某个不动点，足以给出地球的轨道。

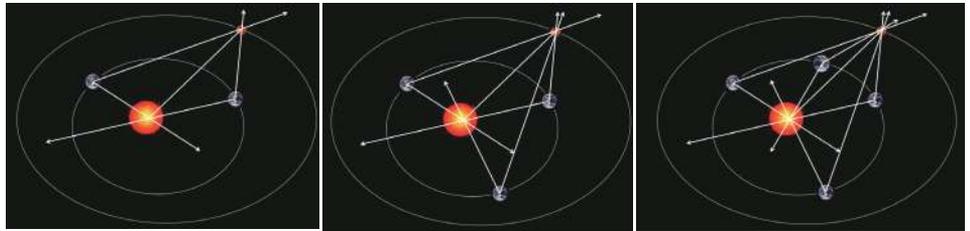


图 31. 通过火星不动点计算地球轨道

一旦有了地球的轨道，就能够反过来将地球轨道当做固定的参考点。利用另外一个用 687 天分割的数据序列，可以参考已经得到的地球轨道，得到火星轨道上的另外一个点。不断地这样做，就可以得到火星的轨道。

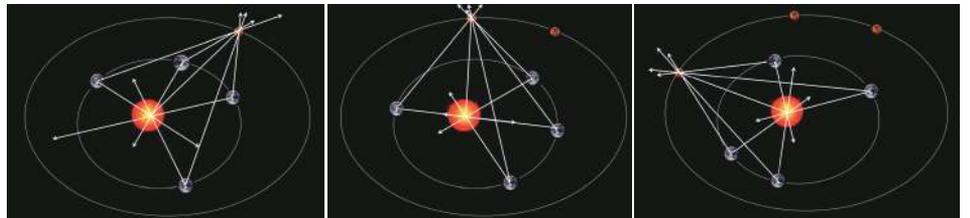


图 32. 已知地球轨道，计算火星轨道

这就是开普勒的想法。爱因斯坦曾给一本关于天文学，实际上是一本关于开普勒的书¹⁷，写过前言。爱因斯坦在其中称开普勒的这个想法是“真正的天才想法 (an idea of pure genius)”。要知道，爱因斯坦自己也是天才，做得很好。

开普勒计算了所有行星的轨道。当然，我们今日不需计算了，因为我们现在有开普勒定律。但在当时，开普勒并没有这些定律。正是因为开普勒花了很多功夫算出火星和土星等所有行星的轨道，他才总结出了他的行星运动三大定律¹⁸：

1. 椭圆律：每一个行星的轨道是椭圆，而太阳处在椭圆的一个焦点上；
2. 面积律：在相等时间内，太阳和运动着的行星的连线所扫过的面积都是相等的；
3. 周期律：行星椭圆轨道半长轴的立方与周期的平方成正比。

¹⁷ 这本书是 Carola Baumgardt 写的开普勒传记 *Johannes Kepler: Life and Letters*, New York: Philosophical Library, 1951。原文表述为“an idea of true genius”。

¹⁸ 似乎开普勒没有类似地计算其他行星的轨道。1609 年出版的《新天文学》中包含了三大定律中的前两个，第三定律出现在 1619 年出版的《世界的和谐》(Harmonices Mundi)。

开普勒的定律在其之后的一、二个世纪的物理学的发展过程中非常重要。牛顿 (Issac Newton, 1643-1727) 从开普勒的定律导出他自己的定律, 即万有引力定律:

任意两个质点相互吸引, 吸引力与质量成正比, 与距离平方成反比:

$$|F| = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

这对我们理解行星的运动规律非常重要。

借助于天文单位, 开普勒的方法可以做的一件事情就是给出各个行星到地球的距离, 非常精确。

- 水星 (Mercury) : 0.307-0.466 AU
- 金星 (Venus) : 0.718-0.728 AU
- 地球 (Earth) : 0.98-1.1 AU
- 火星 (Mars) : 1.36-1.66 AU
- 木星 (Jupiter) : 4.95-5.46 AU
- 土星 (Saturn) : 9.05-10.12 AU
- 天王星 (Uranus) : 18.4-20.1 AU
- 海王星 (Neptune) : 29.8-30.4 AU

反过来, 如果有另外的方法来计算行星距离, 则可以给出天文单位的测量。例如, 假如我们能测出金星到地球的距离, 则结合开普勒给出的结果, 可以反过来算出天文单位。

对天文单位的第一次精确测量就利用了开普勒的方法, 并且结合了到行星 (如金星) 的距离测量。

一个测量这样的距离的方法是视差法 (parallax)¹⁹。如果你能在两个不同的地点, 如分别在南半球和北半球同时观测同一个行星, 测量从两个地点进行观测的视角。考虑这两个视角的差, 因为我们已经知道地球的半径, 按照三角学, 如果我们知道地球

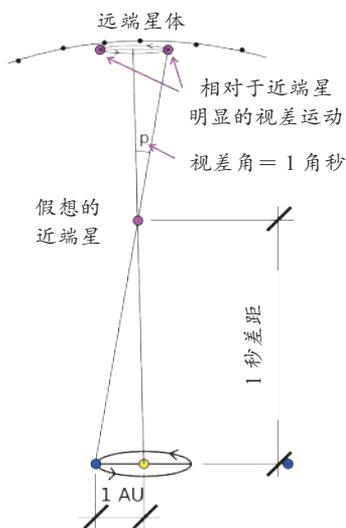


图 33. 秒差距与恒星视差

¹⁹ 读者可以将手指竖于脸前来演示视差法的原理 (最好有一个有参照物的背景)。分别以左眼、右眼看手指, 可以发现手指似乎移动了位置。若将手指离脸放远点, 则会发现视差移动变小了。如果测量出手指与每一只眼睛的夹角, 双眼间的距离, 则可以通过计算得出脸与手指的距离。

后文将涉及所谓的秒差距 (英文 parsec, 缩写 pc), 这是天文学上的一种长度单位, 与恒星视差有关。解释秒差距的同时可以解释视差原理, 因此借用一图解释如下。

以地球公转轨道的平均半径 (即 1AU) 为底边所对应的三角形内角 (即视差) 为 1 角秒 (3600 分之一度) 时, 这个三角形一条边的长度 (即地球到这个恒星的距离, 这个三角形可视为等腰三角形) 就称为 1 秒差距。

的半径，又知道夹角，即可知道到行星的距离。然后根据开普勒定律，可以得到到太阳的距离。

原则上可以这样做，但很需要技巧。首先你需要旅行到星球的另一边，此外，你需要精确的钟表，好的望远镜和好的六分仪。哥白尼没有这些东西，开普勒也没有。但到 18 世纪，欧洲人已经有了这些，能把天文单位计算得相当精确了。

第一位如此做，并且得到非常准确的天文单位的测量的是詹姆斯·库克（James Cook, 1728-1779）。他通过观测金星凌日（transit of Venus）²⁰ 来测量太阳视差。他做了两个测量中的一个。大家知道，必须要有人去南半球做另外的测量。詹姆斯得到了这个机会。詹姆斯的航行很出名，特别是在我的祖国——澳大利亚。但他的航行是有科学任务的，他的部分任务就是做观测。发现澳大利亚实际上是一个意外收获。

我们现在已经有了更为精确的方法来测量天文单位。利用如雷达和星际卫星等现代技术，天文单位与行星的轨道已经能被极其高精度地得到：

$$1 \text{ 个天文单位} = 149\,597\,871 \text{ 千米} = 92\,955\,807 \text{ 英里。}$$

得到精确的测量非常重要。因为只有这样，才能发现开普勒定律并不完全准确。特别地，考虑水星的轨道。开普勒说，水星的轨道是一个椭圆。但实际上，水星每转动一次，它的轨道就偏移一点。这种近日点进动（precession）不能完全由牛顿力学来解释。这是一个重要的观察，是广义相对论的第一个验证或说爱因斯坦广义相对论的第一个应用。在距离之梯后面的阶梯中，我们需要用到广义相对论。

我们已看到天文学帮助了物理学的发展；反过来，物理学的发展也有益于天文学的发展。两者携手前行，互相促进。

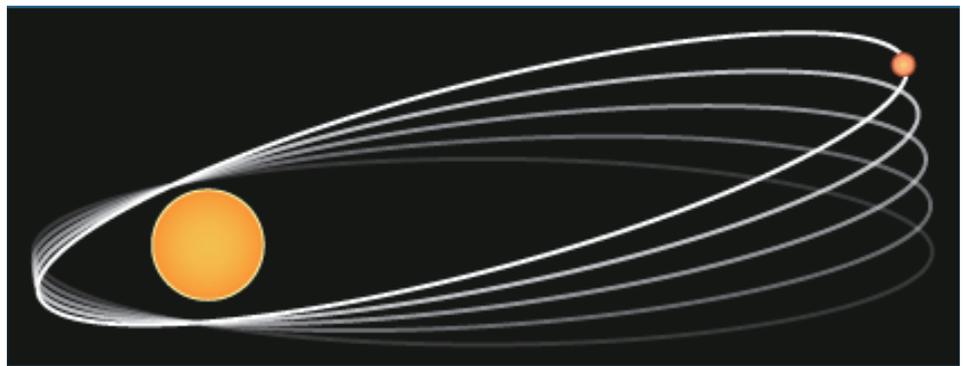


图 34. 水星轨道（此图为译者加）

²⁰ 金星凌日是指位于太阳和地球之间的金星直接从太阳的前方掠过，成为太阳表面的可见暗斑（遮蔽一小部分太阳对地辐射）的天文现象。当凌日发生时，从地球可以看见金星是在太阳表面上移动的一个小黑点。哈雷的方法就是在不同观测地点，测定这个小黑点经过太阳表面的时间（观察整个凌日的过程比单独测量如凌始或凌末时的视差角要精确些），经过计算可以得到太阳视差，加上两个观测点之间的距离，就可以用三角法得到日地距离。