从费尔马多边形数猜想到华罗庚的渐近华林数猜想

纪念杨武之教授诞辰 120 周年

林开亮 郑 豪

现代数论诞生了两次。它的第一次诞生必定是在 1621-1636 年间的某一天，很可能靠近后一个年份。1621 年，巴彻（Claude Gaspard Bachet）出版了丢番图的《算术》（*Arithmetica*）的希腊文本和附带了大量评注的拉丁文译本。费尔马是在何时得到了该书的一个复本，又是何时开始读这本书的，我们不得而知。但我们从他的通信中得知，在 1636 年，他不仅已经仔细地阅读了它，而且发展出他本人对与该书相关的各类课题的想法。

……至于它重生的日子，我们则可以知道得一清二楚。在 1729 年 12 月的头一天，哥德巴赫询问欧拉对费尔马关于所有形如 $2^{2^n}+1$ 的数都是素数这一断言的意见。欧拉在答复中表达了质疑；直到 1730 年 6 月 4 日之前，欧拉都没再说什么，然而在这一天，欧拉宣称他“只不过一直在读费尔马”，并对费尔马关于每个正整数都是四个平方数的和（也是三个三角形数的和、五个五边形数的和，如此等等）印象深刻。从这一天起，欧拉再也没有忘记过这个学科——广而言之——数论；终于拉格朗日也跟上来了，然后是勒让德，再后是高斯，数论也随之而臻于完全成熟的境地。

安德烈 • 韦伊，《数论》[1]

费尔马的多边形数猜测

16 世纪的业余数学家费尔马的名字之所以到今天都家喻户晓，主要是因为所谓的费尔马大定理历经 350 多年才被 20 世纪的英国数学家怀尔斯证明。但鲜为人知的是他有一个重要的身份——现代数论之父。

费尔马大定理原本是费尔马 1637 年在阅读古希腊数学家丢番图（被誉为“代数学之父”）的《算术》时所作的一个断言：当幂指数 $n>2$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 只有平凡的正整数解（即 x, y 之一等于 0）。[2] 费尔马声称发现了一个绝妙的证明，但可惜书边缘的空白不够写下整个证明，因而略去了。据数学家、数学史家韦伊 [1] 分析，费尔马很可能后来意识到，他的证明方法仅适用于 $n=3$ 与 $n=4$ 的情况（这在几何上对应于亏格为 1 的椭圆曲线）。

费尔马一定想不到，后人探索证明的道路竟是如此曲折漫长。但事实上，费尔马生前最感兴趣的数论结果并非他自以为解决了的费尔马大定理，而是他于 1636 年发现的多边形数定理。他在 1636 年 9 月写给梅森（Mersenne）的信中说：[3]

[1] A. Weil, Number Theory: An Approach through History from Hammurahi to Legendre, Birkhäuser,Boston, Mass., 1983. 中译本《数论：从汉穆拉比到勒让德的历史导引》，胥鸣伟译，高等教育出版社，2010 年。

[2] 注意 $n=1$ 的情况方程是平凡的，而 $n=2$ 就得到了毕达哥拉斯三元数组（勾股数）。

[3] E. Deza, M. M. Deza, Figurate Numbers p. 313, First Edition, World Scientific, 2012.

现代数论之父：费尔马（1601-1665）

我第一个发现了下述优美而完全一般的定理：每个正整数可以写成不超过 3 个三角形数之和；可以写成不超过 4 个平方数之和；可以写成不超过 5 个五边形数之和；如此等等以至无穷，不论对六边形数、七边形数还是任意的多边形数，都有类似的结果。我不能在此给出证明，它将依赖于正整数的诸多深奥的性质；我将计划就这个题目写一整本书，以介绍算术在这方面的惊人进展。

完全有理由推断，韦伊界定“现代数论第一次诞生是在 1621-1636 年间”（本文开篇的引语）的后一个年份“1636”，正是以费尔马提出多边形数猜测为依据的。

平方数、三角形数、五边形数以及更一般的多边形数的概念可追溯到毕达哥拉斯学派，他们曾提出“万物皆数”的理念。 我们不打算在此详细解释多边形数名称的由来，仅满足于给出 s 边形数（其中 $s \geq 3$）的定义：一个 s 边形数是一个形如

$$P_s(n) = (s-2)\cdot\frac{n^2-n}{2} + n, \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

的数。按此定义，三边形数（三角形数）即形如 $n(n+1)/2$ 的数，四边形数（即平方数）即形如 n^2 的数，五边形数即形如 $n(3n-1)/2$ 的数。

于是，费尔马的多边形数猜想可以表述为：

费尔马多边形数猜想：设 s 是一个大于 2 的整数，则对任意的正整数 n，丢番图方程

$$\sum_{i=1}^{s} P_s(x_i) = n$$

对 $x_1, \cdots, x_s \in \mathbb{N}$ 有解。

1654 年，在写给友人帕斯卡（Blaise Pascal）的一封信中，费尔马声称这个发现是他最重要的成果，然而费尔马的证明以及他所宣称要写的书，却从未被发现。

费尔马多边形数猜测的证明

欧拉与拉格朗日对四平方和定理的贡献

现代数论之“亚父”：欧拉

费尔马的种种不带证明的论断忙坏了欧拉。欧拉为费尔马的许多漂亮断言所吸引，开始了他的数论研究，并成功证明了部分命题。例如，对费尔马大定理，欧拉本人就证明 $n=3$ 与 $n=4$ 的情况。但跟费尔马一样，最吸引欧拉的，还是费尔马的多边形数定理，特别是其第二条特款：每一个正整数可以写成四个平方数之和。欧拉一度尝试证明这个结果，但直到 1748 年 5 月 4 日，他才迈出决定性的一步——那一天他发现了下述著名的四平方和的乘积公式（见 [1]）：

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2,$$

其中 z_1, z_2, z_3, z_4 为 [4]

$$z_1=x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4,\quad z_2=x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3,$$
$$z_3=x_1y_3-x_2y_4+x_3y_1+x_4y_2,\quad z_4=x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2+x_4y_1.$$

由此，根据算术基本定理（每个大于 1 的整数可以分解为素因子的乘积），只要证明，每个素数可以写成四个整数的平方和。然而欧拉在此卡住了，他只能够证明每个素数（进而每个正整数）可以写成四个有理数的平方和。1770 年，拉格朗日首先克服了欧拉的困难，从而给出了四平方和定理的第一个证明。1773 年，欧拉简化了拉格朗日的证明，此即哈代与赖特的经典教材 [5] 第 20 章给出的第一个证明。

高斯的三角形数定理

费尔马多边形数定理的第一条特款——每一个自然数是三个三角数之和，最早是由高

[4] 事实上， 它们就是四元数乘法公式。1817 年，高斯也许正是从欧拉的这个等式预见到四元数，这比哈密尔顿（Hamilton）要早出 26 年。

[5] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, Oxford, 5th edition, 1979. 中译本《数论导引》，张明尧、张凡译，人民邮电出版社，2008 年。

斯证明的。这件事对年方十九的高斯意义非凡，因而被记载在他的《数学日记》中（作为全部 146 条日记中的第十条）：

1796 年 7 月 10 日　　EYREKA.　　num $=\Delta+\Delta+\Delta$.

这里Δ代表三角形数，而“EYREKA”是阿基米德洗澡时发现浮力定律后冲到大街上的欢呼，即“有了！”num 即 number 的缩写，指代任意的正整数。因此整条日记是说，高斯证明了每个正整数都可以写成三个三角形数之和。高斯的证明可见于他 1801 年出版的划时代数论著作《数论研究》[6] 第 293 目，他证明了下述等价的

高斯定理：每一个满足 $n\equiv 3(\mathrm{mod}\ 8)$ 的正整数 n 都是三个奇数的平方之和。

柯西、勒让德、纳坦松对费尔马多边形数定理的贡献

直到 1815 年，柯西才对一切 $s\geq 3$ 证明了费尔马的多边形数断言。因此，这个结果也被称为柯西 – 费尔马多边形数定理。我们在此正式表述一遍：

定理 A（柯西 – 费尔马多边形数定理）：设 s 是一个大于 2 的整数，则每个自然数可以写成不超过 s 个 s 边形数 之和。

勒让德在 1830 年出版的第三版《数论随笔》[7] 中简化了柯西的证明，并证明了这样的结果：

勒让德定理：若 $s\geq 5$ 是奇数，则每一个$\geq 28(s-2)^3$ 的整数是 4 个 s 边形数的和；若 $s\geq 6$ 是偶数，则每一个$\geq 7(s-2)^3$ 的整数是 5 个 s 边形数的和，其中之一是 0 或 1。

韦伊曾一度认为，不存在柯西多边形数定理的简短而容易的证明。 然而，1987 年，就在韦伊的书出版三年后，纳坦松（M. B. Nathanson）就给出了一个简短证明 [8]。除了借用佩平（Théophile Pépin）与迪克森（Leonard Eugene Dickson）制作的数表，纳坦松主要利用了下述关键的柯西引理：

柯西引理：设 a 和 b 是两个正奇数，满足 $b^2<4a$，且 $3a<b^2+2b+4$。则存在自然数 s, t, u, v 使得

$$\begin{cases} a=s^2+t^2+u^2+v^2, \\ b=s+t+u+v. \end{cases}$$

柯西引理的证明用到了高斯的三角形数定理。因此，大致可以这么说：费尔马的那一连串多边形数定理中第一个成立，可以推出其余的都成立。

[6] C. F. Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, Yale Univ. Press. New Haven, Conn., and London, 1966. 中译本《算术探索》，潘承彪、张明尧译，哈尔滨工业大学出版社，2012 年。

[7] 据说，还在上中学的黎曼（Riemann）在一周之内就把这本 800 多页的大部头著作读完并能够准确回答与之相关的种种问题！

[8] M. B. Nathanson, A short proof of Cauchy's polygonal number theorem, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 99, No. 1. (Jan., 1987), 22--24. 中译文，Cauchy 多边形数定理的一个简短证明，雷艳萍译，《数学通报》2013 年第 2 期。

华林问题

18 世纪下半叶英国的数学领袖：华林

20 世纪上半叶的数学领袖：希尔伯特

费尔马提出多边形数猜想过了百余年后，到了 1770 年时，英国当时的领袖数学家华林（Edward Waring）在其《代数沉思录》（*Meditationes Algebraicae*）第二版中提出了一串猜测：

> 每个正整数可以写成 4 个平方数之和，可以写成 9 个立方数之和，可以写成 19 个四次方数之和，如此等等。

这就是所谓的华林问题。这里“如此等等”并不像费尔马那里的“如此等等”那么好理解。比如，接下来的一句“每个正整数可以写成几个五次方数之和呢？”因为华林没有交代清楚，所以我们暂时把他的猜测理解为一个定性的命题：对于每个给定的正整数 k，存在一个正整数进而存在一个最小的正整数 $g(k)$，使得每个自然数 n 都可以写成不超过 $g(k)$ 个 k 次方数之和。

根据拉格朗日定理（以及 7 不能写成 3 个平方数之和的事实），我们知道 $g(2)=4$，这就是华林的第一个断言。因此，华林问题可以看成是四平方和定理的一个推广。

1859 年，刘维尔（Joseph Liouville）对华林问题迈出了第一步。他利用下述简单（但并不显然）的代数等式和拉格朗日四平方和定理证明了 $g(4)\le 53$，从而肯定了 $g(4)$ 的存在性（见 [5]）：

$$6(x^2+y^2+z^2+w^2)^2=(x+y)^4+(x-y)^4+(z+w)^4+(z-w)^4+(x+z)^4+(x-z)^4+(y+w)^4+(y-w)^4+(x+w)^4+(x-w)^4+(y+z)^4+(y-z)^4$$

直到 1895 年，梅勒（E. Maillet）才证明了 $g(3)\le 21$。他的证明依赖于下述等式

$$6x(x^2+y^2+z^2+w^2)=(x+y)^3+(x-y)^3+(x+z)^3+(x-z)^3+(x+w)^3+(x-w)^3.$$

1909-1912 年，维费里希（Arthur Wieferich）和坎普纳（Aubrey J. Kempner）终于确定出 $g(3)=9$。

1909 年，希尔伯特通过推广刘维尔所用的代数恒等式，对一切正整数 k 证明了 $g(k)$ 的存在性，从而解决了华林问题的定性部分。他用多重积分的技巧证明了下述结果，这原本是他的同事胡尔维茨（Adolf Hurwitz）1908 年为攻克华林问题所提出的一个猜

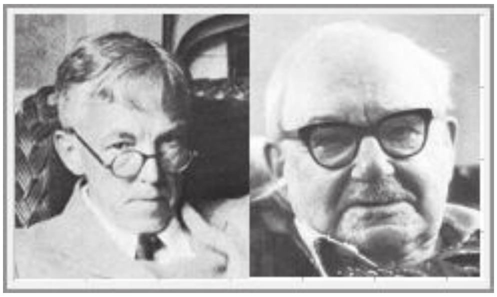
想[9]：

定理（希尔伯特恒等式）： 对任意的正整数 m 和 r，存在正有理数 a_j 与整数 b_{ij} 使得

$$(x_1^2+\cdots+x_r^2)^m=\sum_{j=1}^{M}a_j(b_{1j}x_1+\cdots+b_{rj}x_r)^{2m},$$

其中 $M=(2m+1)^r$.

由此可以推出 $g(k)$ 的存在性，这一结果被称为希尔伯特 - 华林定理。然而，希尔伯特的方法不能确定出 $g(k)$ 的值。由于对希尔伯特的代数方式的证明不满意，哈代与李特尔伍德在哈代 – 拉曼纽扬（Ramanujan）关于数的分拆的工作基础上开创了圆法，随后维诺格拉多夫（Ivan Vinogradov）将它发扬光大，解析数论亦因此一度繁荣。 沿此方向，林尼克（Yuri Linnik）最终得到希尔伯特 – 华林定理的一个初等证明，其中一个重要的概念是俄国数学家施尼勒尔曼（Lev Schnirelmann）引入的密度。关于这方面的介绍，可见华罗庚的经典著作《数论导引》[10]、纳坦松的标准加性数论著作[11]和埃里森对此课题的精彩综述[12]。



20 世纪英国领袖数学家：哈代与李特尔伍德

关于华林问题的小欧拉猜想

华林问题的定性方面解决以后，剩下的问题就是在定量的方面确定 $g(k)$ 的值，从而完善华林 1770 年的论断。 事实上，欧拉（Leonhard Euler）的长子小欧拉（Johann Euler）在 1772 年提出了以下猜想（又称为理想华林猜想）：

小欧拉猜想 I： 对一切 $k\in\mathbb{N}^+$，有 $g(k)=2^k+[(3/2)^k]-2$。

考虑数 $m=2^k+[(3/2)^k]-1$，容易看出 $g(k)\geq 2^k+[(3/2)^k]-2$。因为 $m<3^k$，

[9] 这个乍一看来有点神秘的希尔伯特恒等式，后来在等距嵌入、球面函数的求积等理论中得到了更深刻的理解与发展，而不再是一个孤立的辅助结果，见雷兹尼克（B. Reznick）的报告 The secret lives of polynomial identities（http://www.math.uiuc.edu/ reznick/eiu10413f.pdf）以及那里的参考文献。雷兹尼克教授曾在回函中特别指出，希尔伯特所给出的恒等式是非构造性的（a_j 与 b_{ij} 具体可以怎样取值并不清楚），人们一直在探索显式的希尔伯特恒等式，但进展缓慢。

[10] 华罗庚，《数论导引》，科学出版社，1957 年。收入《华罗庚文集：数论卷 II》，科学出版社，2010 年。

[11] M. B. Nathanson, *Elementary Methods in Number Theory*, GTM195, Springer-Verlag, New York, 2000.

[12] W. J. Ellison, Waring's problem. *American Mathematical Monthly,* volume 78 (1971), 10-36.

欧拉的长子：小欧拉 (1734-1800)

所以只有 2^k 和 1^k 可以用来表示这个数，而最精简的表示 $m=([(3/2)^k]-1)\cdot 2^k+(2^k-1)\cdot 1$ 要 $[(3/2)^k]-1$ 个 2^k 和 2^k-1 个 1^k，因此 $g(k)\geq 2^k+[(3/2)^k]-2$。

小欧拉猜想 I 的证明进展缓慢，但今天这个问题原则上已经解决，主要贡献者如下：

小欧拉猜想 I 进展一览表

k	$g(k)$	解决者	年份
2	$g(2)=4$	Lagrange	1770
3	$g(3)=9$	Wieferich, Kempner	1909–1912
7	可确定	Dickson, Pillai,Rubugunday, Niven	1936–1944
6	$g(6)=73$	Pillai	1940
5	$g(5)=37$	陈景润	1964
4	$g(4)=19$	Balasubramanian, Deshouillers, Dress	1986

这些人物中我们要特别介绍三位：迪克森（L. E. Dickson）、皮莱（S. S. Pillai）和陈景润。

美国数论先驱：迪克森（1874-1954）

印度数论专家：皮莱（1901-1950）

中国数论学家：陈景润（1933-1996）

迪克森是美国本土数学家，主攻代数与数论。从 1927 年起开始关注华林问题，受到维诺格拉多夫 1934 年的解析结果的激励，迪克森一鼓作气致力于解决理想华林猜想，终于在 1936 年对这个问题取得了近乎圆满的解决。迪克森培养了许多数论学

家，中国近代代数和数论的先驱杨武之 [13] 就是他数论方向的首批博士生。除了杨武之，迪克森还指导了珀尔（G. Pall, 1929）、詹姆斯（R. D. James, 1932）、卡特兰德（H. Chatland, 1937）和尼文（I. M. Niven, 1938）等人完成了华林问题方面的博士学位论文。迪克森精力充沛，在多产的数学研究之外，还完成了三卷大部头《数论史》[14]，搜集整理了相当丰富的史料。

皮莱是自拉曼纽扬之后第二个为印度赢得国际声誉的数学家。他在同一时期也集中精力研究理想华林猜想，并稍稍领先于迪克森而取得了同样的结果。 但因为他的论文系列发表在流通有限的印度刊物上而不受关注，后来陷入与迪克森的优先权之争。不过，皮莱的突出贡献最终得到了认可。1950 年，普林斯顿高等研究院邀请他访问一年。然而不幸的是皮莱在赴美途中飞机失事，英年早逝。

陈景润对哥德巴赫猜想取得了举世瞩目的成就，一度成为中国最红的数学明星，他的故事也激励了许多年轻人学习数学。事实上，他对华林问题亦有突出贡献，他不仅证明了 [15] $g(5) = 37$ ，还证明了 $g(4) \le 27$，而且他的结果和方法激励了后继者最终得到 $g(4) = 19$。

容易验证，当 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 时，上表中给出的结果均与小欧拉的猜测 $g(k) = 2^k + [(3/2)^k] - 2$ 吻合。 但尚不能确定的是，是否对一切 k 都有 $g(k) = 2^k + [(3/2)^k] - 2$。 不过，根据迪克森与皮莱的结果，后者对某个给定的 k 成立的一个充分条件是：

$$2^k\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^k\right\}+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]\le 2^k,$$

其中 $\{(\frac{3}{2})^k\}$ 与 $[(\frac{3}{2})^k]$ 分别表示 $(\frac{3}{2})^k$ 的小数部分与整数部分。上述不等式等价于，3^k 除以 2^k 的余数 $r \le 2^k - [(\frac{3}{2})^k] - 2$ 。目前所有检测过的 k 都满足这个不等式，有人证明了，例外的 k 至少大于 471600000。马勒（K. Mahler）曾证明，至多只有有限多个例外。 人们猜测根本不存在例外，从而小欧拉猜想 I 对一切正整数成立。此外，还有这样的结果，如果著名的 abc 猜想 [16] 成立，那么上述猜测成立。然而，日本数学家望月新一（Shinichi Mochizuki）近年来对 abc 猜想给出的证明，尚未得到数学界的确认。

[13] 杨武之，字克纯，英文名为 Ko - Chuen Yang。 杨武之 1928 年的博士论文考虑的是华林问题的一个变体，也正是他将近代数论特别是华林问题介绍到中国。 以华罗庚、陈景润为代表的中国数论学派在华林问题方面贡献的源头就是杨武之的这一工作，参见林开亮、张爱仙，杨武之的九金字塔数定理，《数学传播》第 38 卷（2014 年）第 4 期，42-52 。

[14] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, 3 Volumes. New York: Dover, 2005. 数学家盖伊（R. Guy）很小的时候得到了这部书，十分迷恋， 后来在接受访谈时说（见 *Fascinating Mathematical People*: *Interviews and Memoirs* , Edited by Donald J. Albers & Gerald L. Alexanderson, Princeton University Press, 2011 ）：“得到它 [迪克森的《数论史》] 比得到整套《莎士比亚全集》还要痛快！”

[15] 英国数学家康威（J. H. Conway）在 1965 年也独立地得到了 $g(5) = 37$。对当时正准备靠这个结果作为学位论文申请博士学位的康威来说，这样的坏消息无异于晴天霹雳。因此他一度非常沮丧，不过最后还是挺过来了。这个故事很励志，我们与读者分享一下康威的人生感悟（引自 M. Cook, *Mathematicians: An outview of the inner World*, Princeton University Press, 2009. 中译本《当代大数学家画传》，林开亮等译，上海世纪出版集团，2015 年）：

在我二十好几的时候，曾一度非常沮丧，因为虽然我很快就在剑桥大学找到了职位， 但我觉得我所做的工作与我的职位还有差距。之后我做出了一个又一个的发现，首先是“大群（即现在以他命名的 Conway groups）”，这在职业数学家看来是我最好的工作。紧接着，我发明了“生命游戏”，又发现了超实数（surreal numbers）。一段时间以后，好像我触摸的每一样东西都变成了金子，而在几年之前，我触摸的东西没有一样开花结果。

[16] 对 abc 猜想的一个通俗介绍，见卢昌海，ABC 猜想浅说，《数学文化》2014 年第 4 期，64-69；更详细的介绍可见，普拉达·米哈伊内斯库，关于 ABC 猜想，翟文广译《中国数学会通讯》，2014 年第 2 期。

小欧拉与贝格兰关于多边形金字塔数的猜想

小欧拉在 1772 年还提出了以下两个猜想[17]。

小欧拉猜想 II：每个自然数可以写成不超过 12 个形如 $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ 的数的和。

小欧拉的第三个猜想经过简单的代数变形后，可以重新表述如下：

小欧拉猜想 III：设 d, s 是给定的正整数，

$$f_{d,s}(n)=s\frac{(n-1)n(n+1)\cdots(n+d-2)}{d!}+\frac{n(n+1)\cdots(n+d-2)}{(d-1)!}=s\cdot\binom{n+d-2}{d}+\binom{n+d-2}{d-1},$$

如果每一个自然数都可以用不超过 m 个形如 $f_{d,s}(n)$ 的数求和表出，有 $m\geq 2d+s-2$。

注意 $d=1$ 是平凡的，这里不考虑。当 $d=2$ 时，

$$f_{2,s}(n)=s\frac{n(n-1)}{2}+n=P_s(n)$$

其实就是费尔马的 $s+2$ 边形数。 当 $d=3$ 时，

$$f_{3,s}(n)=s\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}+\frac{(n+1)n}{2}$$

即三维空间的多边形金字塔数；一般地， $f_{d,s}(n)$ 是 $s+2$ 边形数 $f_{2,s}(n)$ 的 d 维推广。另一方面，当 $s=1$ 时，

$$f_{d,1}(n)=\binom{n+d-2}{d}+\binom{n+d-2}{d-1}=\binom{n+d-1}{d},$$

便得到了三角形数的 d 维推广，即所谓的 d 维单形数（三角形即 2 维单形）。[18]

与欧拉同时代的贝格兰[19]一度断言，小欧拉猜想 III 可加强为[20]：

贝格兰猜想：对给定的正整数 d, s，存在自然数 $m=m(d, s)$ 使得每一个自然数都可以用不超过 m 个形如 $f_{d,s}(n)$ 的数求和表出，而且 m 的最小值为 $2d+s-2$ 。

注意，当 $d=2$ 时，这就是费尔马多边形数猜想的加强版本。为看出这一点，只要证明 $s-1$ 个 s 边形数（这里 $s\geq 3$ ）无法表出所有的自然数。容易验证 $P_s(0)=0$, $P_s(1)=1$, $P_s(2)=s$, $P_s(3)=3s-3$ 由此立即推出，自然数 $2s-1=2P_s(2)-1=P_s(2)+(s-1)P_s(1)$ 至少需要 s 个形如 $P_s(n)$ 的数求和得出。

贝格兰一度以为他找到了费尔马多边形数猜想的一个漂亮推广。然而他很快就发现，自己过于乐观了。正如他本人后来指出的，对于

$$f_{4,1}(n)=\binom{n+3}{4},$$

[17] L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, 2 Volumes.

[18] 在早期的文献中， figurate numbers 特指这种二项式系数（俗称组合数），而在中国被朱世杰称为垛积数。 中国古代数学家在高次开方的算法中发现了二项式系数以及（正整数次幂的）二项式定理，在中国，第一个注意到二项式系数在种种垛堆数中之独特地位的，是元代的朱世杰（1249–1314）。

[19] Nicolas de Béguelin，1714 生于瑞士，1789 卒于柏林。贝格兰 15 岁入学巴塞尔大学，学习法律和数学，其数学老师之一是伯努利家族的约翰·贝努里（Johann Bernoulli）。

[20] L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, 2 Volumes, 14.