

数学与心理学

它们以各自的特性互惠互利

Joseph Malkevitch / 文 赵京 / 译

引言

什么学科属于科学范畴呢？通常人们立刻会想到物理学和另一个与它相近的学科——天文学。也许，最初正是赏星星和观看夜晚天空的变化引发了人类对这个世界的好奇心。人类学属于科学吗？社会学和经济学呢？如果不是，为什么？

要回答这个问题我们得首先来看看这个词的含义。大多数人对于化学属于科学毫无异议，但不觉得烹饪是门科学。他们或许会同意烹饪中包含了科学的成分，因为很多厨师都擅长做实验。与科学相关的人类行为其实在艺术领域内有所体现。众所周知，杰出的艺术大师们曾依赖科学来创作，比如帕西奥利（Pacioli）、达芬奇（daVinci）、布鲁内莱斯基（Brunelleschi）和丢勒（Dürer）。所以，艺术是包含“科学”的。

艺术和科学与行为科学的最根本区别是可测性。某些著名电影将厨师神化了，他们不用任何菜谱，仅凭直觉来确定佐料的用量从而将一份普通菜肴变成美味佳肴。然而，要想重复做出同样佳肴的话就必须有具备可测性和“程序”步骤功能的菜谱使得制作的每一步骤都不漏掉。

托比亚斯·丹尼克（Tobias Dantzig），数学家乔治·丹尼克（George Dantzig）的父亲曾出版过一本书《数字：科学的语言》（*Number: The Language of Science*）。书中，他当然倾向于数学是科学的语言这个归类。魏格纳（Eugene Wigner）曾经谈论过数学在物理学中的“不合理影响”。加入这场辩论的伽利略曾评论道“除非我们完全了解这种语言并熟悉它的写作符号，否则我们将无法了解宇宙。它的字母是由三角形、圆形和其它几何图形组成。没有它们，人类一个字也不会懂。没有它们，我们还在黑暗的迷宫里转圈呢。”

多数人都毫无疑问地将物理学视为科学，也把化学、生物学和地质学等视为科学。与此同时，民众们也会谈论行为科学，但是否将它们视为与物理等同的科学学科呢？同样地，数学是社会科学的语言吗？对它们起着不合理的作用吗？社会科学，包括人类学、经济学、政治学、心理学和社会学，不会公开承认数学的影响力。但是，我们会看到数学和心理学以它们各自的特性受益于彼此交流合作。

历史

科学的一大特征是可以通过实验手段得到观察结果。第一位将实验手段用于行为科学而取得认知的先驱是韦伯（Ernst Weber）。

韦伯的实验是和感官知觉有关的。他首创了“最初明显差（first noticeable



恩斯特·韦伯 (1795-1878)

difference) ”这个概念。多数人不觉得水管流出的水是甜的。如果逐渐向水中加入少量的糖，起初，大多数人还是不会注意到糖的出现。这个过程持续一段时间后总会有人率先得出结论：加糖的水是“甜的”。

韦伯的学生费西纳 (Gustav Fechner) 将韦伯的实验推广到通过不同的感官刺激，包括听觉、味觉和视觉，来了解感知。

韦伯和费西纳的实验结果被总结为如下所列的著名韦伯 - 费西纳定律：

$$p = C \log(S/S_0),$$

S_0 代表使用刺激物后第一次引起感官变化的“值”。 C 是依赖于个体和感知的常数，而 p 则代表感

官可预知的“量”。

当你看到以上“定律”后，心中难免会产生很多疑虑。对同一种刺激物，每个人的“感知”幅度会是相同的吗？如何测量刺激物的“多少”和初始值 S_0 ？以上“定律”会和熟知的用微分方程的解表达的牛顿定律或牛顿冷却定律属于同一范畴吗？质量和幅度是否有足够的共性当我们讨论测量它们的时候可以用同一标准吗？

在物理学和生理学方面都做出过杰出贡献的亥姆霍兹 (Hermann von Helmholtz) 也曾做过和感觉信息及心理相关的工作。亥姆霍兹感兴趣



古斯塔夫·费西纳 (1801-1887)

的是数学与眼球运动、神经传导及测量之间的关系。例如，他曾演示沿着神经传递的“信号”其速度要比想象的慢（有些人认为信号是以光速传播的）。他在 1851 年初彻底改造了用来测量眼角膜的仪器——检眼镜。

赫尔德 (Otto Hölder) 是另一位驰骋在数学及心理学两个领域的先驱。他最著名的工作是以他的名字命名的不等式，一个由他创立的定理成为科学领域中以数学作为测量工具的基石。在学校低年级课程中，我们就学过测量，包括用尺子丈量长度，并初步了



赫尔曼·冯·亥姆霍兹 (1821-1894)



奥托·赫尔德 (1859-1937)

解了实数系统的本质。对实数系统的关注（无穷多的数）几乎都花在了代数演算上，包括加法和乘法。我们学习代数运算法则，加法和乘法中的可交换律（实数遵循 $ab = ba$ ），结合律和分配律。然而，恰恰是实数作为代数结构中群和与之相关的其它性质反而更加重要。可以测量实数规模的这个事实对测量学来讲是至关重要的。

相信可以将数学引进心理学的部分人最初接受的是心理学教育，另一部分人接受的数学教育而后将数学知识用于心理学的。

测量

试图在包括心理学在内的社会科学领域中使用数学起初是鲜为人知的。当质量、时间和力这些概念变得微妙和随时间而变化时，我们达到了一个共识。那就在历史的长河中以何种方式测量这些概念和如何理解它们是密切相关的。

让我们想象有一群人，并用 $H(i, j)$ 来代表第 i 个人与第 j 个人身高之差。比如，要对军队服役人员的身高变化趋势做个研究。在不同背景和物理条件下，我们会有下列疑问：用怎样的数值代表约翰的身高？随着年龄的增长身高如何变化？但是为了满足某个数学目的，我们还理所当然地定义了函数 $H(i, j)$ 。可是，如果 $H(i, j)$ 定义为第 i 个人对第 j 个人（或者反过来）的敌意呢？看似和第一个函数类似的第二个函数就产生了许多令人费解的因素。如果对心理学家使用的数值有疑虑的话，那么由这些数值得出的结论就更令人生疑了。

物理、化学及天文学等学科与众不同的是它们为定量学科，而非定性学科。我们听惯了“规律”或“法则”等词汇，“法则”绝对是有事实根据的。但是，物理更让人信服的是因为它可以定量描述某种事物而非定性描述。我们可以准确地测出铅的质量比铁的质量高多少。我们可以确定冥王星距太阳最近的距离也比火星距太阳最远时的距离大，并可以精确地说出这些距离。

难道我们不了解测量系统中已为人知的常用手段吗？年轻人会用尺子丈量长度，用秤称重量和用表看时间。使用诸如卷尺、秤或钟表等仪器就必须熟悉数字。学会其运算，特别是加、减法会很有用，例如可以计算出带到学校背包里所装东西的重量和体积。然而，人们很快发现测量中的一些细节并不像想象中的那样容易和直观。部分难度源于人们意识到不同物体可以用不同系统和方法来测量。比如，我们可以用盎司（磅）或公克（公斤）来称桔子以及用华氏或摄氏测量温度等。而且我们可以在不同系统之中互相转换。1 公斤 = 2.2 磅（大约），因此我们也可以把磅转换成公斤或公克。我们可以称出某一个南瓜的重量是另一个的三倍，所以测量也时时需要数值的乘或除法。随着人类不断的成熟，我们认识到重量和质量的不同。一个人的重量是和他/她所处的位置有关。大多数人都看到过太空人失重的图像，也明白月球上物体的重量与它们地球上的重

量不同。而质量代表一个物体所储藏的“东西”是它本身的特性，重量则和所处位置有关。可是，质量这个概念随着物理中的相对论而变得微妙起来。当一个物体以接近于光的速度飞行时，它的质量与其“静止”时的质量不同。有没有可能从数学的角度来了解测量中的复杂性呢？数学家与数学心理学家对测量体系的发展都作出过巨大贡献并将它们应用于物理和心理学领域。

收益

当测量某一值时，很显然，可以用不同方式来“测量”。因此，一张5美元钞票在特定时间对所要购买的东西来讲是有值的。当然，除了购买力之外，金钱的值还取决于其它因素。尽管大多数人都认为钱多比钱少好，但在有些情况下，还是会有人选择不去获取更多的钱。例如，某人的腰很疼，当看到人行道上有张一元钱钞票时很可能不会弯腰捡起。但如果是100元钞票时，同一人会忍着疼痛弯腰将它捡起（不知是否会交给警察？）。引进收益的概念正是为了帮助“理解”对这种货币值以外的评估，而一个物体会会有几种不同的收益，那就是物体的使用值。

收益背后最直观的想法是按照某种模式给不同选择或物体分配值，越高代表它越受欢迎。因此可以用钱来衡量物体的复杂性。对钱这个收益的追求会从0飞速增长至3百万，但过了这个数字就会如下图所示了。

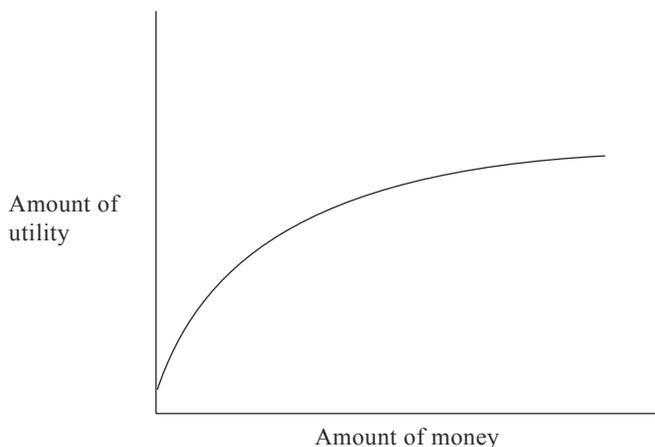


图1 金钱受益例子之一

不同领域的众多学者对收益的内涵及根据它所做出的决策做出过巨大贡献。这其中包括数学家丹尼尔·伯努利 (Daniel Bernoulli)，冯·诺依曼 (John von Neumann)，萨维奇 (Leonard Savage)，路斯 (R. Duncan Luce)，菲什伯恩 (Peter Fishburn)，经济学家边沁 (Jeremy Bentham)，摩根斯坦 (Oskar Morganstern) 和心理学家库姆斯 (Clyde Coombs)，西蒙 (Herbert Simon)，特沃斯基 (Amos Tversky)，卡尼曼 (D. Kahneman)。其中一部分人的学术兴趣纵横许多领域，但他们都没有放弃数学的理论及其应用。

博弈论者或心理学家的专长是对有收益的游戏及决策提供建议。这些建议的框架是根据合理定义的“理智”人在同样情况下会做出的。通常情况下，规

范分析会给出最佳选择。然而，面对选择时，人们经常会不理智做为。所以分析人类行为举止的一个不同方法就是研究面对选择时人们实际上是如何反应的。这样的研究是可以通过对比试验来进行的，其目的是描述面对决策时人们是如何反应的。许多人曾尝试将规范性的效益公式化。例如，当某个人需要采取通过一系列“小动作”“组合”而成的大决定时，他/她就可以将每个小动作的收益值叠加起来给大决定一个总体收益值。这一过程显而易见地会引发收益和决策是如何“挂钩”的研究。但是，决策研究中还是包含了一部分关于“自相矛盾”的情况，也就是说事情的发展不合常理。

概率论的一个基本概念是期待值。假设我扔出一个均匀的硬币，它以头像落地的话就赢 4 美元，是反面的话就赢 2 美元。这一“动作”的期待值是重复多次掷币后的平均值。除了硬币是均匀的这一事实外，这一实验重复多次的结果是一系列毫无规律的 2 和 4。然而，因为一半的时间是赢 2 美元，另一半时间的是赢 4 美元，所以一系列 2 和 4 的“平均”值是 3 美元。我们可以想象做如下的试验： $(1/2)(2) + (1/2)(4) = 3$ 。更普遍的期待值算法是将每个结果出现的概率（位于 0 和 1 之间）也考虑进去。

再举一个例子。掷出一个均匀的骰子，回报是比点数多一个单位的价钱。那么，可能出现的结果和概率如下表所列：

点的数目	概率	付价
1	1/6	2
2	1/6	3
3	1/6	4
4	1/6	5
5	1/6	6
6	1/6	7

如果将这个实验重复多次，我们会得到一系列 2 至 7 的数字，期待值计算如下：

$$\text{期待值} = 2(1/6) + 3(1/6) + 4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6) + 7(1/6) = 4.5$$

需要说明的是期待值不必是整数，也不必是可能出现的结果之一。它不是概率，也可以是负数。如果将回报作为收益而非数值的话，我们可以讨论试验的期待收益。

很多决定是基于游戏的。比如说选择掷币游戏或扔骰子试验。如果“理智”的行为意味着取得最大值或最大期待值的话，我们可以通过观察“真人”的行为而不是用“数学模型”来模拟他们的行为举止。“真人”是否会争取最大值呢？如果不会的话，应该如何看待以计算效益和根据其性质而建立的数学模型呢？

这里列举两个著名的例子。一个是美国经济学家丹尼尔·埃尔斯伯格提出的，他的名气来自对五角大楼文件的贡献。另一个是有着工程背景的法国经济学家莫里斯·阿莱提出的。两个例子都有几种不同的表达形式（换句话说就是不同数值），