

剩余定理情未了

史定华 陈关荣

中国对数学基本理论的贡献不多，能让国人自豪并以“中国”命名的古老数学命题可能只有“中国剩余定理”一个，因而我们常常为之余情未了。本文回顾了剩余定理的简要历史和内容，并谈及其几个经典和最新应用。

同余的发现

古人为安排农事而编制历法，需要计算周期的起点。期间，数学同余概念的产生和利用反映了中国农耕文明的历史辉煌，而与之相应的诗情画意般的求解歌诀更体现了深厚的中华文化底蕴。

1 “物不知数”问题

这是中国古代一道著名算题。原载《孙子算经》，为卷下第二十六题。

“今有物，不知其数，三三数之，剩二，五五数之，剩三，七七数之，剩二。问：物几何？答曰：二十三”。

从这里引申出了一个重要的数学概念：同余。例如，“三三数之剩二”概括了多种“剩二”的情况，譬如5除以3余2，8除以3也余2，说明5和8除以3时有相同余数。进一步，还能观察到2、5、8、11、……除以3余2的周期现象，同时可将无限的自然数集合按周期的起点分成0、1、2三个不同的剩余类，等等。

上述“物不知数”问题用现代数学式子表达的话，可归结为求

$$x \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{7}$$

这组一次同余式的整数解。

《孙子算经》是中国古代一部非常重要的数学著作，成书大约在公元四、五世纪的南北朝时期，也就是一千五百多年前，其作者生平和编写年代不详。传本的《孙子算经》共分三卷：卷上、卷中、卷下。“物不知数”问题也称“韩信点兵”问题（有多个版本）。其中一个版本如下：

传说刘邦建立汉朝之前有一大将韩信，计算士兵数目的方法十分特别。他不是五个五个或十个十个地数，也不要士兵“一、二、三、四、……”地报数，而是叫他们排成队伍，依次在他面前列队行进：先是每排三人，再是每排五人，然后是每排七人。他只将三次队列行进完毕后所余的士兵数目记下来，就知道了士兵的总数。据此有人认为《孙子算经》的作者是撰写《孙子兵法》的孙武。其实

不然，卷下“今有佛书”一问，说明《孙子算经》的作者和总结《孙子兵法》的孙子是不同时代的人。

我国古代天文历法资料表明，一次同余问题的研究受到天文和历法需求的推动，特别是和古代历法中所谓“上元积年”的计算密切相关。任何一部历法，都需要一个理想的时间起算点——这个起算点要从制定某部历法的当年往回逆推，所得起算点称为“上元积年”。在这个起算时刻，日、月、行星都恰好位于它们各自周期的起点，同时这一天的纪日干支又要恰好是“甲子”，如此等等，故上元积年的推算需要求解一组一次同余式。如南北朝时期祖冲之的《大明历》，要求上元积年必须是甲子年的开始，而且“日月合璧”、“五星联珠”（就是日、月、五大行星处在同一方位），同时月亮恰好行经它的近地点和升交点。在这样的约束条件下来推算上元积年，需要去解 10 个联立同余式，相当之不容易。

2 《孙子歌诀》解法

《孙子算经》解这道题目的“术文”是：“凡三三数之，剩一，则置七十，五五数之，剩一，则置二十一，七七数之，剩一，则置十五，一百六以上，以一百五减之；而三三数之，剩二，置一百四十；五五数之，剩三，置六十三；七七数之，剩二，置三十。并之，得二百三十三，以二百十减之，即得”。需要注意的是，古称“106”为“一百六”，而称“160”为“一百六十”。这里：被 3 除余 1，并能同时被 5、7 整除的最小数是 70 好理解；被 3 除余 2，并能同时被 5、7 整除的最小数是 35，为什么置一百四十？因为题目没有要求“最小”，“剩一，则置七十，剩二，置一百四十”，按同余运算顺理成章；但为了答案唯一，故最后都按“一百六以上，以一百五减之”直到最小。

明代著名的大数学家程大位，在他所著的《算法统宗》中，对于这种解“孙子问题”的方法，还编出了四句歌诀，名曰《孙子歌诀》：

“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆正半月，除百零五便得知”。

从数学文化的角度，选择一个问题，离不开教学及历史、诗歌和绘画，特别是思想与创新。而“物不知数”问题就很符合这些条件。

以数糖果为例进行少儿教学，9 粒符合七七数之，剩二，但不符合五五数之，剩三；16 粒也如此。然而 23 粒符合七七数之，剩二；五五数之，剩三；三三数之，剩二。故 23 为一个答案，除法验证 128 也是答案。然而网上流传的“韩信点兵”问题（另一版本）：他带 1500 名士兵去打仗，战死四百多。余者，大刀队 3 人一排，多出 2 人；长矛队 5 人一排，多出 4 人；弓弩队 7 人一排，多出 6 人。问活着士兵人数？这个版本见图 1 左下，但这里的问题描述是不对的！正确描述应该是：余者，3 人一排，多出 2 人；5 人一排，多出 4 人；7 人一排，多出 6 人。问活着的士兵人数？在此基础上，有些小学生能够准确回答为 1049 人。

图 1 右图是上海行知小学四年级学生史佳妮按照《孙子歌诀》所作的画。它诗意盎然宛如一幅国画！据此“韩信点兵”问题中的

$$x = (2 \times 70 + 4 \times 21 + 6 \times 15) \pmod{105} = 104$$



图1 有关教学的插图

容易接受；但对于 $104+9 \times 105 = 1049$ 小学生还得动动脑筋。

该问题的思想与创新将在后面的“同余的情缘”篇中进一步谈及。

3 “中国”剩余定理

《孙子歌诀》只能解答用 3、5、7 作除数的题目，遇到用其他数作除数的算题，它就行不通了。南宋数学家秦九韶将它推广，在《数书九章》中用大衍求一术给出了一个系统性解法。德国数学家高斯 (K. F. Gauss, 公元 1777-1855 年) 于 1801 年出版的《算术探究》中用现代数学语言把它明确地写成一个定理。

定理： 设整数 m_1, m_2, \dots, m_n 两两互质，则同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

有唯一解

$$x = \sum_{i=1}^n a_i t_i M_i \pmod{M},$$

其中

$$M = m_1 m_2 \cdots m_n, \quad M_i = M/m_i, \quad t_i M_i \equiv 1 \pmod{m_i}.$$