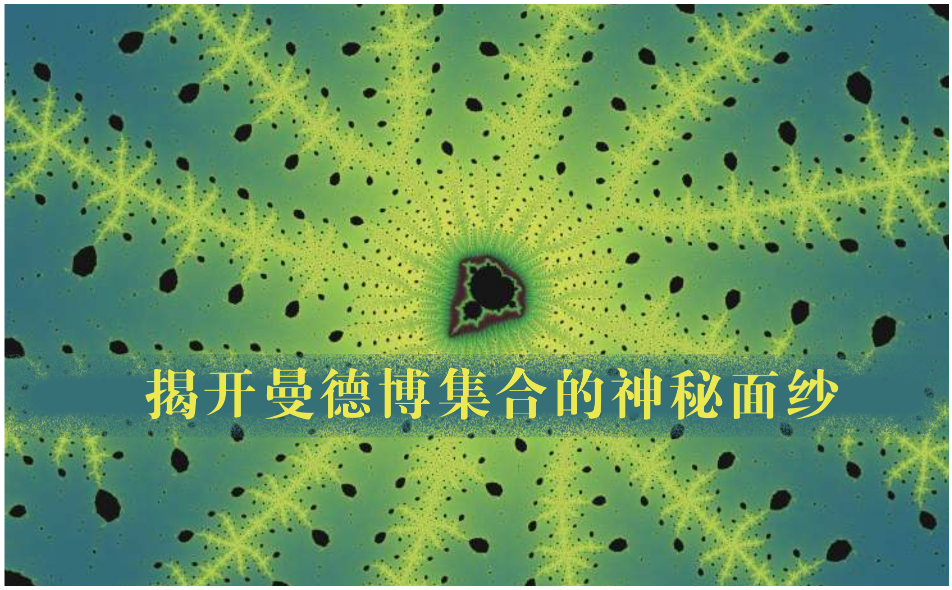

揭开曼德博集合的神秘面纱

罗伯特•德瓦尼（Robert L. Devaney）/ 文　崔继峰 / 译

回溯至 20 世纪七八十年代，数学家所从事的动力系统领域，是由计算能力不断增强的计算机绘制他们所研究对象的图像而构成。这些图像使他们大吃一惊：类分形结构的美和复杂性竟可以与大自然本身相媲美。分形图像的绘制主要是利用了曼德博集合，曼德博集合即使在动力系统领域外也为世人所知晓。这篇文章将详细阐述曼德博集合的来龙去脉并探究它无限的复杂性。

迭代

曼德博集合是由所谓的迭代生成，这也意味着一再地重复反馈过程。在数学中，迭代常常被用来做函数的迭代。对曼德博集合而言，参与迭代的函数是一些想象中最简单的函数：它们被称作二次多项式并具有形式 $f(x) = x^2 + c$，其中 c 为常数。接下来，我们会具体地探讨有关 c 的取值问题。

为了开始迭代 $x^2 + c$，我们须先选定一个初始值，并将该初始值记作 x_0。将初始值 x_0 代入函数 $x^2 + c$，这样便得到一个新的数

$$x_1 = x_0^2 + c$$

现在，我们对前一次所得结果施行相同的运算步骤，得到一系列新的数，即

$$x_2 = x_1^2 + c$$
$$x_3 = x_2^2 + c$$
$$x_4 = x_3^2 + c$$

如此等等。由该迭代生成的数 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 拥有一个名字：x_0 在 $x^2 + c$ 迭代下的轨

道（orbit）。

迭代函数的理论来源于现实生活中的问题，建立动物种群数量增加的数学模型就是其中的一个例子。一个繁殖周期后，动物种群的数量依赖于它当前的数量，因此我们可以凭借函数 $f(x)$ 来建立种群数量增长的数学模型，其中 x 表示当前的动物种群数量，$f(x)$ 则给出一个繁殖周期后种群的数量。若要得到若干个繁殖周期后的种群数量，我们则需要对函数 $f(x)$ 进行迭代。种群数量增长标准模型中用到的是二次多项式函数，巧合的是，这与我们将在此处考虑数量的函数极其类似，这也是他们利用二次函数来研究种群数量增长的最初动机。

这将导致了数学领域的一个重要问题：典型轨道本质上是什么样子？它们是收敛的还是发散的？它们的轨道是环形的还是无规则的？曼德博集合正是回答这一问题的几何版本。

我们来考虑一些例子，其中令 $c = 1$，且选择 0 作为初始值，那么此时的轨道为

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= 0^2 + 1 = 1 \\
x_2 &= 1^2 + 1 = 2 \\
x_3 &= 2^2 + 1 = 5 \\
x_4 &= 5^2 + 1 = 26 \\
x_5 &= 26^2 + 1 = \text{大数字} \\
x_6 &= \text{更大的数字} \\
x_7 &= \text{真正地大数字},
\end{aligned}
$$

我们看到轨道中的值越来越大——轨道趋向于无穷远处。

我们再来看另外的一个例子，此时令 $c = 0$，初始值仍然为 0，然而如下，轨道明显不同了，迭代后仍固定于一点 0

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= 0^2 + 0 = 0 \\
x_2 &= 0^2 + 0 = 0 \\
x_3 &= 0^2 + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

如果我们令 $c = -1$，发生了这样的事：初始值为 0 时，轨道却为

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= 0^2 - 1 = -1 \\
x_2 &= (-1)^2 - 1 = 0 \\
x_3 &= 0^2 - 1 = -1 \\
x_4 &= (-1)^2 - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

此时我们可以看到，迭代值在 0 和 −1 之间振荡，这是一条周期为 2 的轨道。

为了理解轨道的性质，我们经常采用一种最简单的方式，即几何绘图：绘制轨道的时间序列图为研究轨道的性质提供了大量的信息。以下四幅图中，我们依次展示了 x^2+c 在 $c=-1.1, -1.3, -1.38$ 以及 $c=-1.9$ 时的时间序列图。在每一幅图中，我们计算了以 0 为初始值的轨道点值，并用直线段将点值连接起来。我们可以看到，轨道的性质随着 c 的变化而变化：$c=-1.1$ 时，轨道的周期趋近于 2；$c=-1.3$ 时，轨道的周期趋近于 4；$c=-1.38$ 时，轨道的周期趋近于 8；$c=-1.9$ 时，轨道的周期并无显著模式可循。数学家则运用“混沌”

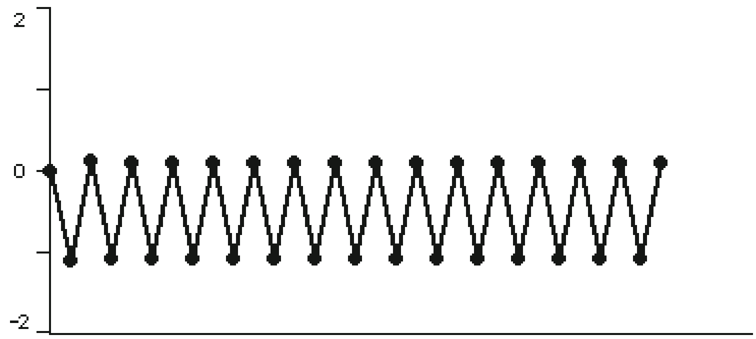

图 1：函数 $x^2-1.1$ 以 0 为初始值的迭代轨道，它的周期趋近于 2

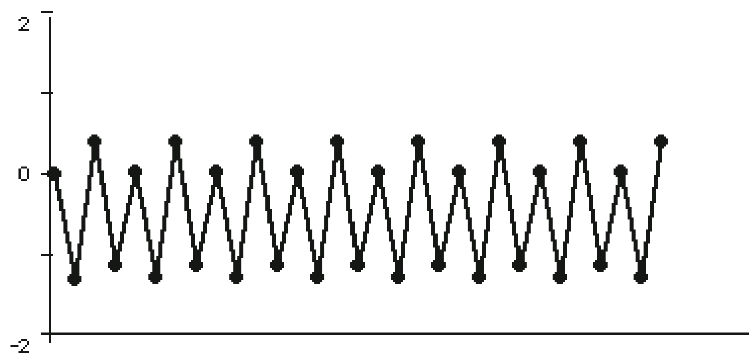

图 2：函数 $x^2-1.3$ 以 0 为初始值的迭代轨道，它的周期趋近于 4

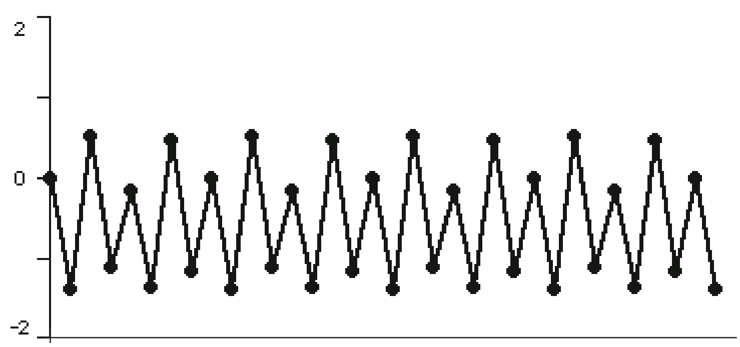

图 3：函数 $x^2-1.38$ 以 0 为初始值的迭代轨道，它的周期趋近于 8