



公元前梯形公式中的微积分思想

蒋迅

2016年,《科学》杂志发了一篇关于古巴比伦人计算木星位置的文章^{1,2}。这篇文章让那些猎奇的小编们忙活了一两个月,然后就被人们渐渐忘记了。但这是一个重要的结果,因为它把积分(特别是微积分第二基本定理)的思想整整提前了一千四百年。这不能不说是古巴比伦的一个奇迹。让我们通过这段历史来了解一下古巴比伦的数学成就。

1. 巴比伦的数学成就

巴比伦文化出现在公元前4000年的美索不达米亚地区(大体位于现在的伊拉克)。我们早就知道,巴比伦曾经对数学做出过许多重要的贡献。他们的贡献一直持续到了塞琉古时期,几乎到了基督教诞生的前期。比如,古巴比伦人已经能够解一元一次、二元一次、一元二次甚至一元三次方程,另外还发现有讨论级数问题的泥板,他们用近似值的方法算出 $\sqrt{2} = 1.414222$ 。在几何学上古巴比伦人把圆分为360等份,并求出 $\pi = 3.125$;他们在三角学方面不仅掌握计算直角三角形和等腰三角形面积的计算方法,还知道相似直角三角形对应边成比例、等腰三角形顶点垂线平分底边及内接半圆的三角形为直角三角形,最了不起的是他们发现在直角三角形中,斜边平方等于两条直角边的平方和。巴比伦人还计算了正五边形、正六边形、正七边形的面积和边长的比例。他们把结果都用楔形文字刻在泥板上。迄今出土的50多万块楔形文字泥板书中,约有300块为纯数学泥板。其中包含乘法表、除法表、倒数表、平方表、平方根表、立方表、立方根表甚至还有指数表和对数表³。

¹ M. Ossendrijver, Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiters position from the area under a time-velocity graph. *Science*, 351(6272), 482-484 (2016).

² <https://science.sciencemag.org/content/suppl/2016/01/27/351.6272.482.DC1>

³ M. 克莱因,古今数学思想,第一册,邓东皋,张恭庆译,上海:上海科学技术出版社,2002; [美]维克多·J·卡兹主编,东方数学选粹:埃及、美索不达米亚、中国、印度与伊斯兰,纪志刚等译,上海交通大学出版社,2016; 梁宗巨,王青建,孙宏安,世界数学通史,辽宁教育出版社,2004.



古巴比伦人采用的是六十进制。数字以先进的楔形文字表达，分“个位”和“十位”，1以Y代表，2为YY，3为YYY，如此类推，直至9；10则为<，20为<<，如此类推，直至50（<<<<<）。这套数字系统是公元前三千年至公元前两千年的苏美人传至巴比伦的。现在我们纪录时间、角度和地理座标都是从这里延续下来的。

到二十世纪上半叶，人们对美索不达米亚的数学成就有了更深刻的认识。在出土的一块巴比伦泥板书上，人们发现巴比伦人用表格几何方法计算木星的位置，而且他们是通过计算时间 - 速度曲线下的面积来实现的。这不正是我们现代微积分的方法吗？因为在时间 - 速度曲线下的面积正是物体的位置函数。

对于巴比伦人来说，天文学是推动他们数学研究的原始动力。从公元前400年到公元前50年之间的340块泥板上都是有关行星和月球的数据。但在此之前，我们只知道他们的天文研究是计算的。新的发现是唯一的几何方法。他们也用几何知识于其他领域，比如土地和建筑。他们的先进书写系统、大量使用表格、对天文特别是行星运动的兴趣等多种因素使他们开发出了具有初等微积分思想的计算。

2. 六十进制数字系统

为了了解古巴比伦人的方法，我们必须了解他们的计数系统，即60进制⁴。我们还不能确定他们是怎么开始使用这个系统的。有人认为是出于天文上的某种

⁴ [美] 维克多·J·卡兹主编，东方数学选粹：埃及、美索不达米亚、中国、印度与伊斯兰，纪志刚等译，上海交通大学出版社，2016。

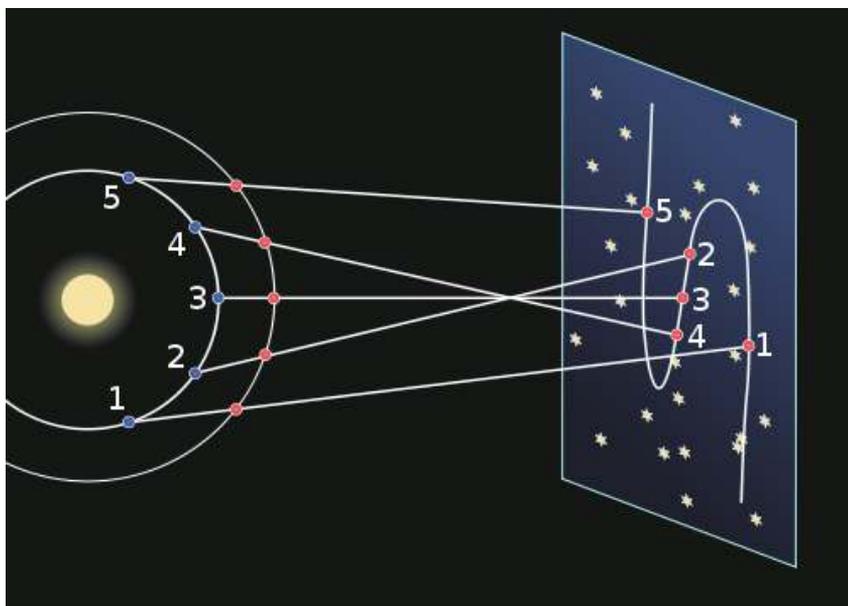
考虑，或者是十进制与六进制相结合的自然产物。但更可能的是他们自觉地采用度量衡学的结果：一个具有 60 个单位的量纲可以被容易地半分、三分、四分、五分、六分、十分、十二分、十五分、二十分、三十分。不管他们的原因如何，六十进制使得初等积分的思想可以出现，因为定积分就是起始于这种细分的思想。

六十进制看起来甚为复杂，但它实际上与我们现在熟悉的十进制非常相似。在我们现在的十进制体系中的每一个实数，它的每一位上的数代表着 10 的一个部分或者 10 的一个幂。这就是说，我们有一个百位数 (10^2)，一个十位数 (10^1)，一个个位数 (10^0)，一个十分之一位数 (10^{-1})，一个百分之一位数 (10^{-2})，等等。在十进制里，一个数 $x + \frac{y}{10} + \frac{z}{10^2}$ 就写成 $x.yz$ ，其中 x, y 和 z 都是 0 到 9 之间的某一个数字。比如，3.14 就是 $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2}$ 。

在六十进制里，一个数也是分成整数部分和分数部分，但是小数点换成了分号“;”。比如， $x + \frac{y}{60} + \frac{z}{60^2}$ 就写成 $x;y,z$ ，其中 $x, y,$ 和 z 都是 0 到 59 之间的某一个数字。例如，十进制中的 0.325 经过换算可以写成 $\frac{19}{60} + \frac{30}{60^2}$ 。所以在六十进制里，这个数就是 0;19,30。

3. 巴比伦的行星理论

我们还需要了解巴比伦人的行星理论⁵。我们都知道，地球和木星都围绕太阳在同一个平面上同向运转。由于地球运转的速度比木星快，所以过一段时间，地球就将赶上并超过木星。如果一个人在地球观察木星的移动，他会发现有时候木星在天空中会向后移动。这个现象在下面的图中容易理解。因为这只是视觉上的倒行，所以我们称之为“视逆行”。地球大约每 399 日会在轨道上超越木星一次，这个时间称为会合周期。在这个周期里，有大约 40 天里，我们在地球上看不到木星。



⁵ N. M. Swerdlow, *The Babylonian Theory of the Planets*, Princeton University Press, 1998.