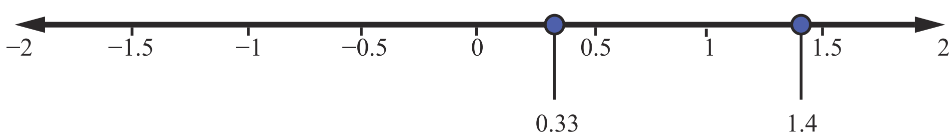
实数和柯西数列

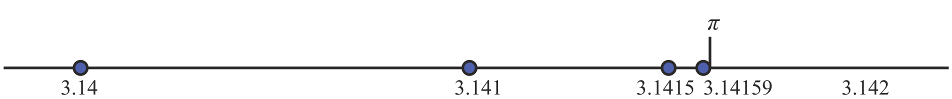
Marianne Freiberger ／文　崔继峰 杨城毅／译

实数是什么？最直观的答案或许是：实数是你能在数轴上找到的所有点。在数轴上，属于实数的整数们均匀分布，形成一组等距点集。而其他一些数字，就像 1.4 或 0.33，我们可以在两个整数之间合适的位置找到它们。



在实数中，小数位数有限的（例如 1.4 = 7/5 ）或以一些无限循环的数组结尾的（例如 0.3333⋯ = 1/3）数字被称作有理数，它们可以被写成分数。除此之外，还有一些数字的末尾是不能循环的数组，例如 π = 3.141592⋯和 $\sqrt{2}$ =1.414213⋯，我们把它们叫做无理数，而它们不能被写成分数。

无理数的这些性质使得（在数轴上）找到它们十分困难，因为我们的思维和测量工具是有限的。为了找到它们，我们必须研究（无理数的）近似值。举个例子，当我们研究 π 时，根据所需要的（或者所能达到的）精确度，我们可能会使用诸如 3, 3.1, 3.14 或者 3.141 之类的近似值。这些近似值小数位数越多，它们就越精确。



这个由近似值组成的数列中的数都拥有有限的小数位数，因此，它们是有理数。为了满足现实需要，通过对 π 的小数位数的研究，我们可以确定一个由越来越精确的近似值所组成的数列。这个数列在它的极限 π 处收敛：数列中，越往后的项与 π 的距离越近。所以，我们可以通过选取数列中足够靠后的项来（让近似值）足够接近 π。而这种方法对于其他的无理数和它们的小数展开都适用。

因此，在数字的小数中我们可以发现另一种看待实数的观点：不是使用小数展开，而是使用一个收敛于它们的有理数列来表示它们。下面，让我们使用