本科代数课程的整体性和连贯性

朱富海

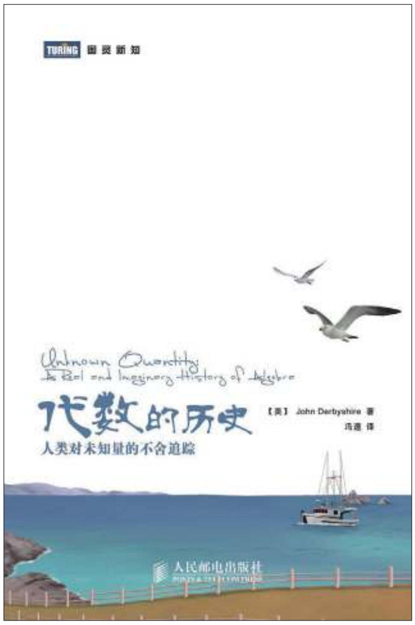
记得在大一第一学期期末考试前的一个下午，我拿着高等代数的课本从头到尾翻看，深入思考各个难点，慢慢发现很多知识点是有联系的。随着理解的深入，领悟到这种联系实际上是无处不在的，通过这些或明或暗的线索，一学期所学的内容就融合在一起了，那种融会贯通的感觉至今难忘。可惜这种体会直到有了一点研究基础和教学经验后才重新有，而在大学四年中似乎没再出现过，一方面是自身的惰性而懒于思考，另一方面是迷茫，学的越多迷茫越大。

在过去十余年的大学教书生涯中，我时常能注意到学生们都有类似的问题，甚至明显有加剧的趋势。给高年级学生授课或开讨论班时，我发现不少学生把以前学过的东西忘得差不多了，记住的东西在该用的时候也想不起来，因为这些东西都是零散的，或清晰或模糊地散落在大脑的各个角落，形不成一个整体，看不到彼此间的联系。而给大一新生上课时，发现他们对于大学数学很不适应，以前的学生需要一两个月就能适应大学的教学，现在很多学生需要半年甚至更长时间来适应。我通常会在期中考试后让大一学生写个总结，分析一下进入大学后学习数学时遇到的问题，希望他们借此机会思考一下大学数学和中学数学的学习内容和方法的差异；也会时常提醒高年级学生不仅要关注知识点本身，更要去思考课程知识点的纵向联系以及与其他课程的横向联系。不过，收效并不令人满意。如何让同学们自愿（或者被迫）地去思考数学？如何对他们进行合适的引导？这些问题都不太容易回答。

个人的体会是，几乎每一门数学课程都是一部完整的思想史，是前人多年智慧的结晶。课程的知识点固然重要，更重要的是这些课程内容背后闪光的思想。从教师角度来说，在教学中适当引导学生们走前人走过的路，让他们切身体验数学理论发展的历程，应该会有不一样的教学效果。从学生角度来说，要想领悟课程的奥妙，需要认识到课程是一个整体，每个章节之间有密切的联系，而不是各自为政，随意地堆砌在一起，把自己放到所学理论的历史发展的阶段去，通过自己的努力在一定的引导下重复前人的发现，这样才能体会“再发现”的乐趣，欣赏其中的美，领悟其中光辉的思想，甚至是数学中最奇妙的地方——很多表面上看起来互不相干的数学对象之间有着深刻的联系。

对于不少初学者而言，代数学比较抽象，相对于分析学更难学。我们不妨来做一次穿越之旅，看看代数学是如何从原始状态逐渐发展成为如今庞大的数学分支，慢慢体会前人是如何做研究的，如何一步步提出新的概念、新的方法和新的理论的。其实，同样的事情对于分析和几何等其他数学分支也值得做，甚至整个数学也是一个整体。

代数学起源



《代数的历史》

《代数的历史》一书中提到，在大约 4000 年前，古埃及人已经在求解“一个量加上它自身的四分之一等于 15”这样的一元一次方程，他们的成就在公元前 1700 年左右被一个叫阿默士（Ahmes）的书记员记录在纸草书中，这种纸草书在 19 世纪被莱茵德（Alexander Rhind）发现，引起了广泛的关注。

大约成书于四、五世纪的《孙子算经》中有一个著名的“鸡兔同笼”问题，这实际上是一个二元一次方程组。而在更早的《九章算术》一书的第八卷“方程”中记录了一些三元一次方程组，其解法后来被称为高斯消元法。

汉谟拉比时代的古巴比伦人则有另一项杰出的成就，他们给出了一元二次方程的求根方法，即中学课本中的求根公式。古巴比伦人的解法很神奇，本质上是求出两根之和与两根之差，从而把较难解的一元二次方程转化成了很容易解的二元一次方程组。这个思想后来被证明是非常有用的，不仅蕴含了后来的韦达定理，也与拉格朗日对三、四次方程的统一解法不谋而合。

由此，代数学从简单的一元一次方程起步开始在两个不同方向发展：未知量个数增加，方程的个数也适当增加；未知量的个数不变，方程的次数增加。前者发展出线性方程组和线性空间理论，后者则发展成高次方程乃至伽罗瓦理论。当然，这两者实际上是互相交织的，就像古巴比伦人告诉我们的一元二次方程与二元一次方程组的关系。

代数学大厦的地基早早地建立了，不过随后的发展历程非常缓慢，直到 19 世纪才迎来真正的爆发。在这漫长的三千多年里，丢番图（Diophantus）、花剌子米（Al-Khwarizmi）和文艺复兴时期的为三次方程求根打得热火朝天的几位意大利数学家是数学史上的亮点，他们的故事众所周知，不再赘述。

我们快速翻过这一页，进入近代代数学发展的黄金时期。以下我们基本按照国内本科代数学课程的设置来叙述，与历史上的顺序会稍有出入。

线性世界

一般大学的本科阶段可能开设的代数类课程有高等代数（与解析几何）、

抽象代数、有限群表示论、李代数和数论等。我们首先从最基础的高等代数谈起。

从现代的观点看，高等代数既是代数学的基石，也是很多理论的思想源泉；而从历史上看，高等代数与后续的代数学理论是在此起彼伏中相互促进、交替进展的。这门课程主要分为多项式和线性代数，有学校把解析几何也融入进来，因为解析几何与高等代数是密不可分的。不少学校是把解析几何作为一门课单独开设，我个人并不建议这么做，因为这会把高等代数与解析几何这两个联系紧密的内容分割开来，不利于课程的开设和学生们的理解。

由高次方程研究发展而来的一元多项式理论的核心内容是因式分解，这也是很多人比较熟悉的。在小学我们就知道了整数的质因数分解，多项式的因式分解理论与之一脉相承，它们的共性是环论研究的重要内容。在因式分解中，求多项式的一次因式实际上就是我们熟知的方程的求根问题。笛卡尔猜想复系数多项式必有复根，后由高斯证明，即为代数基本定理。而一般域的情形则需要判别多项式的不可约性。

与高次方程研究平行发展的是线性方程组理论。在解线性方程组的过程中，整个线性代数理论得以逐渐发展起来。中学时接触的二元一次方程组通常只有唯一解，求解方法主要是消元（代入消元与加减消元）。一个容易忽略的问题是，这类方程组有没有求解公式？而在历史上，正是因为对这个问题的探索（至少是原因之一），行列式这一概念才被日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨在 17 世纪末几乎同时提出来，并经过深入研究发展为整套理论，而当方程组有唯一解时的求解公式是克拉默（Gabriel Cramer）在 1750 年给出的，也就是克拉默法则。行列式有一个非常重要的几何意义：二阶行列式是平行四边形的有向面积，而三阶行列式是平行六面体的有向体积。利用平面或空间直角坐标系很容易得到这一点。有趣的是在计算过程中能很自然地引入向量的内积和外积的概念，这是高等代数与解析几何的一个结合点。

对于一般的方程组，解未必是存在的，即使存在也不一定是唯一的。对此的研究发展了在数学、物理、计算机及经济等领域有重要应用的矩阵理论。矩阵理论的关键在于其中的运算：加、减、乘、除（求逆），其中的乘法是凯莱（Arthur Cayley）在 1857 年利用变量替换引入的。矩阵乘法是一种与我们熟知的四则运算不同的运算方式，主要体现在交换律的缺失。比较奇怪的是，矩阵理论出现得相当晚，比行列式晚了 170 年左右，甚至比伽罗瓦的群论还要晚。不管怎样，矩阵理论的出现为代数学打开了新的大门，代数学理论才变得更加丰富多彩。我们不仅可以发现多项式、行列式和矩阵这三者有很多内在的联系，也会发现很多代数学理论在矩阵论中慢慢萌芽。

随着矩阵的引入，我们的研究对象会越来越多，而他们的共性是我们关注的重点。首先，矩阵、多项式、数域以及中学已知的向量等都有加法和数乘的运算，它们的性质都是类似的，如加法的性质和整数加法是一样的。我