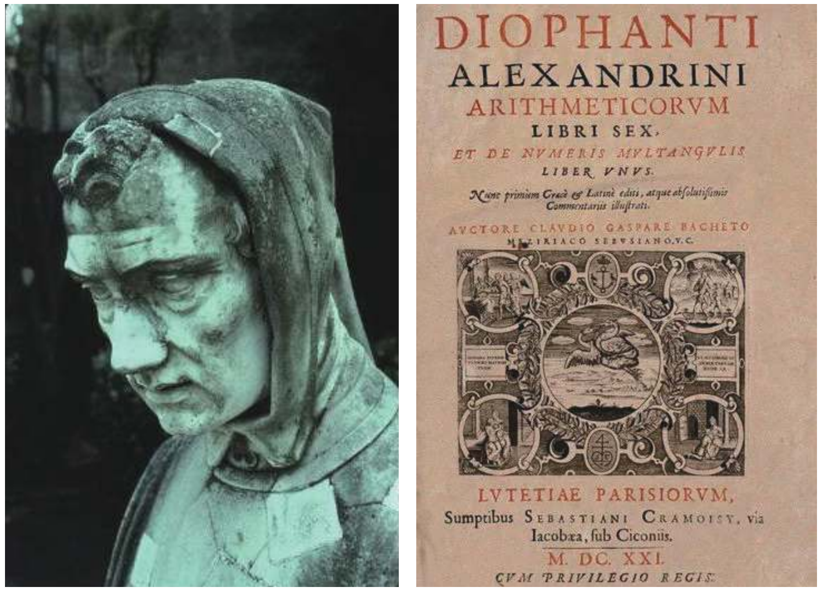
千禧年难题之 BSD 猜想——不定方程的有理解问题

马英浩 / 文　袁新意 / 指导

千禧年大奖难题（Millennium Prize Problems），又称世界七大数学难题，是七个由克雷数学研究所（Clay Mathematics Institute, CMI）于 2000 年 5 月公布的数学猜想。BSD 猜想是其中之一，B 和 SD 分别是两位数学家姓氏的首字母，全称为贝赫与斯维纳通 - 戴尔猜想（Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture），是数论领域的著名问题。为了描述某一种特殊不定方程（椭圆曲线）有理解的集合大小，BSD 猜想通过两个截然不同的思路给出两个不同的指标——代数秩和解析秩，并猜测它们相等。虽然猜想表述艰深晦涩，但却和课本上曾出现的一些流传几千年的数论知识一脉相承，是进入现代社会以来，真理的追求者对古老问题的进一步探索。

绵延千年的古老问题

数学是一个历史悠久的学科，而数论是数学的一个古老分支，至少有两千多年的历史。在这两千多年中，素数的分布问题和有理系数不定方程的有理解问题也一直困扰着人们。早在公元前 3 世纪，欧几里得就用反证法证明了素数有无穷多个，并寻求过勾股定理的通解。五六百年后，大约相当于中国的三国时期，丢番图（Diophantus）集中研究了有理系数多项式构成的不定方程，讨论了它们的有理数解。他所著的《算术》是人类第一本系统阐述代数方程的著作，讨论了很多相关问题，因而不定方程也被称为丢番图方程。在此后的近两千年，人们使用了各种方法试图解决这些问题，得到了一些成果，但也有很多局限性。近代以来，数学家们逐渐提出了更加复杂而深刻的办法，借用了很多其他数学



丢番图塑像和他的《算术》拉丁文译本（图片来源于网络）

分支的工具，一定程度上推进了有关问题的理解，但还有很多问题悬而未决。BSD 猜想就是一个不定方程问题的例子。

丢番图方程的例子有很多，小学奥数就有一次不定方程的例子，而二次不定方程的佩尔（Pell）方程理论就已经是高中竞赛的知识了。事实上，英国数学家约翰 • 佩尔和这个理论没有多大关系，该问题由古印度数学家婆罗摩笈多（Brahmagupta）提出，之后在费马再次提出后，直到 18 世纪才被拉格朗日最终解决。称其为佩尔方程是因为欧拉的误记。

虽然人们很快找到了一次和二次不定方程的通解，但更高次的不定方程人们几乎没有处理的有效手段。其中三次不定方程的有理解问题介于“可解”和“不可解”之间，因而一直广受数论学家的关注。

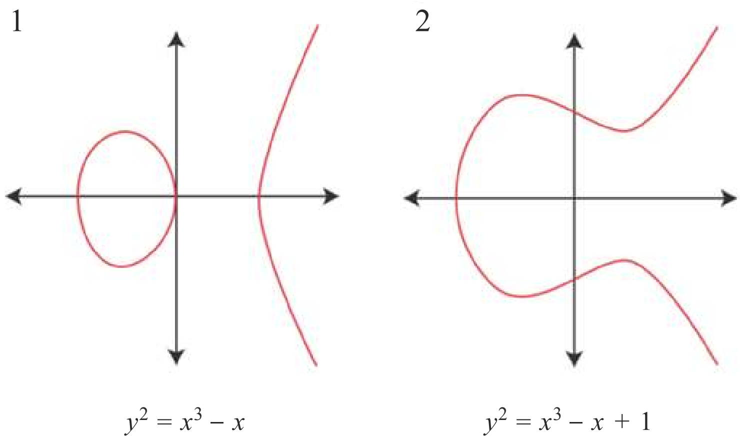
椭圆函数——一个三次不定方程

椭圆曲线起初并非是数论学家研究的对象。19 世纪，数学家们开始广泛研究各类特殊函数理论，其中就包括椭圆曲线。尽管最近几十年除了一些斯拉夫数学家，特殊函数理论鲜有人问津，以致于数学系相关的课程都很少，但在物理学或其他很多领域特殊函数还有很深远的影响。

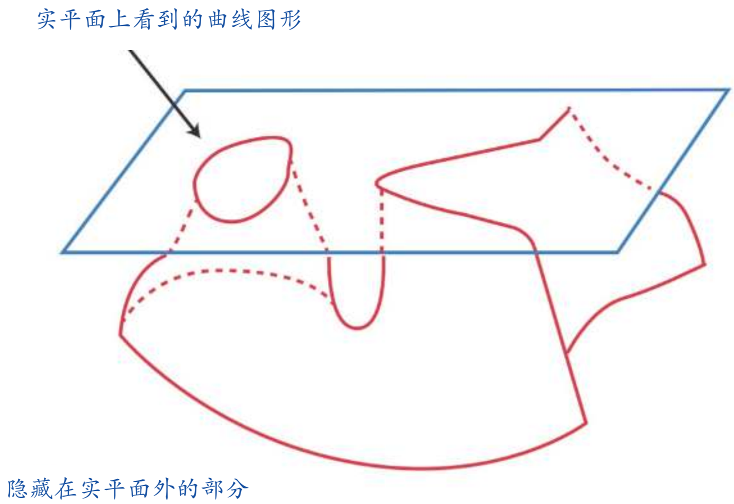
最初人们研究椭圆周长时，通过一定的积分变换技巧可以把椭圆弧长公式转换成下述积分：

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{x^3+ax+b}} .$$

出于一些圆锥曲线的巧妙性质，该积分无法通过基本初等函数表示，但与



非退化的实数域上椭圆曲线



复数域上椭圆曲线示意图 [1]

魏尔斯特拉斯（Weierstrass）椭圆函数有一定的对应关系。其中分母的函数项平方即为形如 $y^2 = x^3 + ax + b$ 的方程，这被称为椭圆曲线。

最初人们研究的是定义在实数域和复数域上的椭圆曲线，特别是复变函数带来的几何直观。但在二次不定方程已被解决的年代，作为有着良好性质的三次不定方程，椭圆曲线似乎注定对数论产生深远的影响。

数论中历史悠久的“同余数”问题就可以归结为对椭圆曲线的研究。在公元 10 世纪以前，阿拉伯数学家就开始思考如何判断一个数是不是某个三条边

[1] 图片选自《浅说椭圆曲线》, 数学文化 (2013), 第 4 卷第 3 期 .