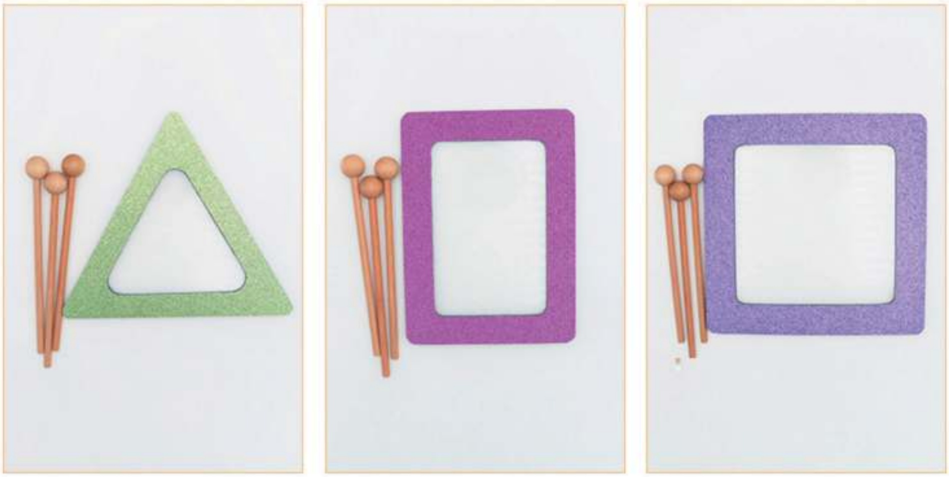
听鼓声判形状的数学奥秘

马世光

1. 问题的叙述及历史

等谱问题在数学中是一个很有趣的问题。它可以表述为：假如有一面形状不规则的鼓，你可以从它发出的声音来判断它的形状吗？



蔡文姬是东汉末年著名的才女，古代有“文姬辨琴”的故事。相传蔡文姬的父亲蔡邕颇通音律。有一天他在弹琴的时候，一根琴弦断了。蔡文姬听了琴声后说：“第二根弦断了。”她父亲以为她是偶然说中，为了考验她，故意又弄断了一根琴弦。她又说：“怎么第四根弦也断了？”从此他父亲认定她非常有音乐天赋（还有一说是蔡文姬能从琴声中听出一个人的心事，但这与我们的话题无关）。我们知道，古琴共有七根弦，它们长度是一样的，但粗细不同，因此发出的声音不同。蔡文姬根据声音可以判断第几根琴弦，也算在某种意义上判断了“琴弦的形状”。但即使以蔡文姬之聪，也未必能听出鼓的形状。

我们在生活中也许对鼓的认识有一点刻板，认为它只能发出单一的“咚咚”的声音，其实我们在敲击鼓面的不同部位的时候，声音是可以有高低差别的。现在假设我们拥有的是一面“理想的鼓”，它可以发出从低到高的无穷多种频率的声音，在数学上我们将鼓面抽象成一个平面有界区域 D，其上取 x, y – 直角坐标系，那么这些频率的平方可以表示为 D 上拉普拉斯算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\Delta$ 的 Dirichlet 特征值。即考虑，

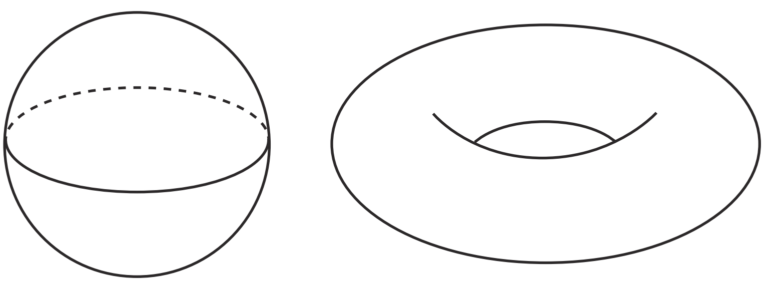
$$\begin{cases} -\Delta u(x,y)=\lambda u(x,y), \\ u(x,y)|_{D\text{的边界}}=0. \end{cases}$$

鼓声的频率的平方恰好是使得上述方程有非零解的 λ 的值。这些特征值也称作谱。这里，$u(x, y)$ 表示振动时鼓面的位移，我们之所以用 Dirichlet 边界条件 $u(x, y)|_{D\text{的边界}}=0$，是因为在振动的时候，边界是固定的。一般说来，存在一列

$$0<\lambda_1<\lambda_2\leq\lambda_3\leq\cdots\to+\infty$$

使得上述方程有非零解。那么问题的严格表述是：$\{\lambda_i; i=1, 2,\cdots\}$ 可以决定 D 的形状吗？

这一问题还有“闭黎曼流形”(即紧致无边流形)的版本。二维的闭黎曼流形，不太了解的朋友可以理解为如下的闭曲面。而高维的闭黎曼流形直观上比较难想象，暂时也可类似理解。



我们可以把闭黎曼流形看作一个“无边的鼓”。它也有一个拉普拉斯算子 Δ. $-\Delta$ 也有一列趋于无穷大的谱，

$$0 = \mu_0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3 \le \cdots \to +\infty .$$

那么谱相同的两个黎曼流形一定具有完全相同的几何形状吗？

这个问题让大家熟悉，是从卡茨（Mark Kac）1966 年的文章 *Can one hear the shape of a drum*？（我们可以听出鼓的形状吗？）开始的，但实际上对于这个问题的研究早就展开了。卡茨是一个波兰犹太人，研究的兴趣主要是概率论。1938 年他离开波兰去了美国。不到一年，德国入侵，他的家人都遇难了。后来他在康奈尔大学任教，结识了物理学家费曼，他们合作得到了费曼 – 卡茨公式。除了费曼 – 卡茨公式，上述文章也是让卡茨变得出名的原因之一，他因为这篇文章，获得了 1967 年的 Lester R.Ford Award 和 1968 年的 Chauvenet Prize 两个奖项。

卡茨的文章中记录了如下的故事：在 1910 年 10 月，荷兰物理学家洛伦兹[1]（Hendrik Lorentz）被邀请到德国的哥廷根作五场报告，主题是：“物理学中的新老问题”。在第四场报告的最后，他说：“这里有一个数学问题，可能会引起在座数学家的兴趣。”问题是从电磁波的角度提出的，翻译成数学语言就是：一个欧氏区域的拉普拉斯算子的介于 $[\alpha, \beta]$ 的特征值个数，如果 α 充分大，应该正比于此区域的体积。对于一些特殊区域（如圆盘），这个比例是容易计算的。据此猜想，对于 R^n 中的区域 D，用 $N(\lambda)$ 表示 $-\Delta$ 的小于 λ 的 Dirichlet 特征值个数，那么应该有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda)}{\lambda^{n/2}} = (2\pi)^{-n}\omega_n \mathrm{Vol}(D),$$

其中 Vol (D) 是 D 的体积，ω_n 是 n 维单位球体积。当时数学家外尔在场，他对这个问题很感兴趣。据说他的导师希尔伯特曾预言，这个问题在自己有生之年不会解决。但事实上不到两年，外尔就解决了这个猜想（$n = 2, 3$ 情形），用的是希尔伯特发展的积分方程的方法。这说明，区域的体积是可以“听出来”的。随着问题的发展，发现谱可以决定更多的几何性质。因此数学家们猜想，谱是否可以完全决定欧氏空间中的区域或者一个紧流形的形状呢？但是后来人们发现，两种情况下都存在反例。那么究竟谱可以决定哪些几何性质呢？下面我们具体讨论。

2. 谱怎么影响几何

下面我们探讨，谱影响几何性质的原理。

[1] 即狭义相对论中洛伦兹变换的提出者